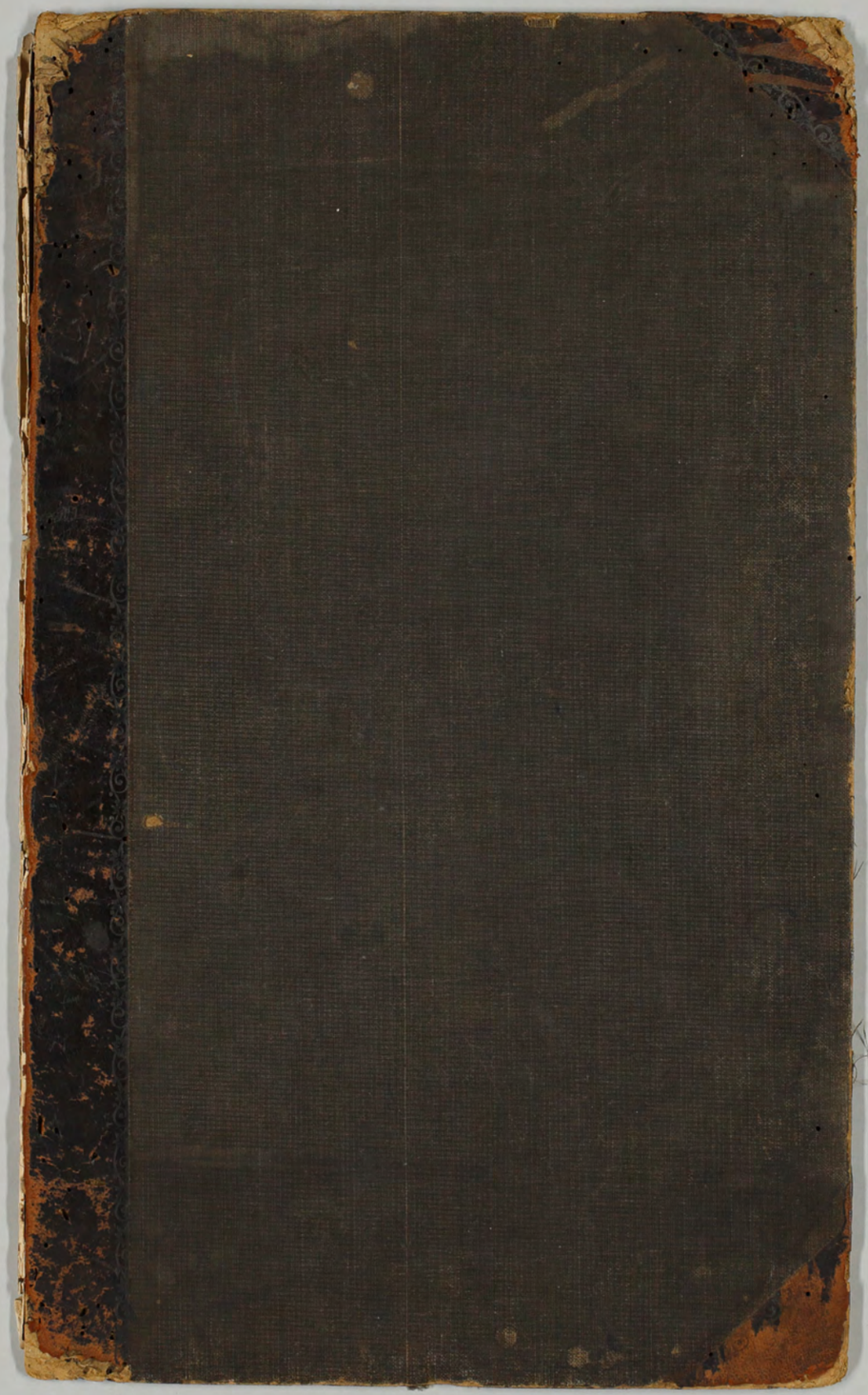
OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	寺尾寿自筆ノート[110]
Author(s)	寺尾, 寿
Citation	
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/89952
rights	Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka



大阪帝國大學圖書館
理
28110
昭和8年11月22日受入

VII. Digression sur l'Interpolation.

I. *Préliminaires.* – Soient $u_0, u_1, u_2, \ldots$ les valeurs d'une fonction de x pour les valeurs de x égales à $x_0, x_1, x_2, \ldots$ en progression arithmétique de raison h, soient $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots$ les différences successives de la suite correspondante à la valeur u_0. Revenons en appelons u la valeur de la fonction considérée pour une valeur x de la variable comprise entre x_0 et x_1, et soit

$$\frac{x-x_0}{h} = f$$

Nous savons que l'on a:

$$(1) \qquad u = u_0 + f\Delta u_0 + \frac{f(f-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{f(f-1)(f-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

Telle est la formule connue dans le nom de formule d'interpolation de Newton.

Nous allons traiter ici quelques nouvelles questions dont la solution est basée sur l'emploi de la formule de Newton.

II. – Problème inverse de l'interpolation. – On a souvent besoin de connaître la valeur de x qui correspond à une valeur donnée de la fonction. Alors dans notre équation (1), l'inconnue est f au lieu d'être u: nous avons ainsi une équation algébrique de m^{e} degré en f ou m, si nous nous arrêtons à $m+1^{\text{ième}}$ terme de la série. Mais au lieu de résoudre cette équation par le procédé général, on peut s'y prendre de la manière suivante:

Mettons l'équation (1) sous la forme:

$$\Delta u_0 . f = u - u_0 - \frac{f(f-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 - \frac{f(f-1)(f-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 - \ldots$$

ou bien:

$$x = x_0 + (u-u_0)\frac{h}{\Delta u_0} - \frac{h}{\Delta u_0}\left\{\frac{f(f-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 - \frac{f(f-1)(f-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 \ldots\right\}$$

Comme $\Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots$ sont généralement très-petits par rapport à Δu_0, on peut dans une première approx. [illegible] la parenthèse du second membre, ce qui [illegible] une première valeur approchée de x. En [illegible] cette valeur approchée dans la parenthèse

et calculant le second membre on aura une seconde valeur de x plus approchée que la première, que l'on substituera encore dans la formule si cela est jugé nécessaire, & ainsi de suite. On s'arrêtera aux approximations successives quand on aura obtenu deux valeurs successives de x sensiblement égales.

Appliquons ceci à deux exemples.

1° Trouver pour l'an 1886 l'époque où la longitude du Soleil est égale à 30°.

On a D'après le "Nautical Almanac" de pour 1886, pour le midi moyen de Greenwich:

dates	Longitude de ☉	Diff. 1re	Diff. 2de
avril 19	29° 20' 7",6	+58'30",1	− 1,7
20	30. 18. 37,7	58.28,4	− 1,7
21	31. 17. 6,1	58.26,7	
22	32. 15. 32,8		

En appelant donc x l'époque cherchée exprimée en temps moyen de temps Greenwich et comptée à partir du midi du 20 comme origine, nous aurons:

$$30° = 29°\,20'\,7",6 + 58'\,30",1\,\frac{x}{24} + \frac{0,85}{2}\,\frac{x}{24}\left(1-\frac{x}{24}\right).$$

D'où:

$$x = \frac{30° - 29°\,20'\,7",6}{58'\,30",1}\,24 - \frac{0,85}{58'\,30",1}\,\frac{x(24-x)}{24}\,\frac{x}{24}\left(1-\frac{x}{24}\right)24$$

ou

$$x = \frac{23924}{3510,1}\,24 - \frac{0,85}{3510,1}\,x(24-x) - \frac{2040}{3510,1}\,\frac{x}{24}\left(1-\frac{x}{24}\right).$$

En négligeant d'abord la 2me correction, on trouve $x = 16^h,354$. Puis $\frac{x}{24} = 0,68$ $\frac{2040}{3510,1} = 0,0058$. Donc correction $= -0,0058 \times 0,68 \times 0,32 = -0,003$. Donc enfin

$$x = 16^h,351 = 16^h\,21^m,06.$$

Un second calcul donnerait sensiblement la même correction que la première fois.

2° Déterminer l'époque d'une conjonction ou d'une opposition de la Lune avec le Soleil, ou exprimé l'époque où l'angle du ☉ et de ☾ aura une valeur donnée, par exemple, dans le Nautical Almanac pour 1886, on trouve qu'il y a opposition de la Lune entre le midi et le minuit de Greenwich des 27.

Le Nautical Almanac donne la longit. du ☉ pour chaque midi moy. et celle de la Lune pour chaque midi et chaque minuit moy de Greenwich. En appelant u_0, v_0 les valeurs de ces longit. pour le midi ou le minuit qui précède immédiatement avant l'époque considérée et x cette époque comptée en heures à partir de ce midi ou, on aura

$$u = u_0 + \frac{x}{24}\Delta u_0 + \frac{x}{24}\left(\frac{x}{24}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{2} + \frac{x}{24}\left(\frac{x}{24}-1\right)\left(\frac{x}{24}-2\right)$$

$$v = v_0 + \frac{x}{12}\Delta v_0 + \frac{x}{12}\left(\frac{x}{12}-1\right)\frac{\Delta^2 v_0}{2} + \frac{x}{12}\left(\frac{x}{12}-1\right)\left(\frac{x}{12}-2\right)\frac{\Delta^3 v_0}{6}.$$

On peut écrire la 1ère éq.

$$u = u_0 + \frac{x}{12}\,\frac{\Delta u_0}{2} + \frac{x}{12}\left(\frac{x}{12}-2\right)\frac{\Delta^2 u_0}{8}$$

ou $$u = u_0 + \frac{x}{12}\left(\frac{1}{2}\Delta u_0 - \frac{1}{8}\Delta^2 u_0\right) - \frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right)\frac{\Delta^2 u_0}{8}.$$

En désignant l'ég. $u - v_0 = a$ = distance angl. connue, on aura :

$$a = u_0 - v_0 - \frac{x}{12}\left(\Delta v_0 - \frac{1}{2}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 v_0\right) + \frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\Delta v_0 - \frac{1}{8}\Delta^2 v_0\right) - \frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right)\left(2-\frac{x}{12}\right)\frac{\Delta^3 v_0}{6}$$

D'où

$$x = \frac{(u_0 - v_0 - a)\times 12}{\Delta v_0 - \frac{1}{2}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 v_0} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\left(\frac{1}{2}\Delta v_0 - \frac{1}{8}\Delta^2 v_0\right)\times 12}{\Delta v_0 - \frac{1}{2}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 v_0}\,\frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\Delta^2 v_0 \times 12}{\Delta v_0 - \frac{1}{2}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 v_0}\,\frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right)\left(2-\frac{x}{12}\right).$$

équation qu'on résoudra par approximations successives.

Exemple. — On a, 1888 Janv. 26 Midi moy. Green :

$u_0 = 306^\circ 31' 4,''5$ $\Delta u_0 = 1^\circ 0' 57,''2$ $\Delta^2 u_0 = -0,''6$

$v_0 = 29^\circ 42. 1,4$, $\Delta v_0 = 6.34.4,1$ $\Delta^2 v_0 = -6'31,''8$ $\Delta^3 v_0 = 27,2$.

On aura donc pour chiffre l'époque prochaine de quadrature :

$x = \Delta v_0 - v_0 - 90^\circ = 6^\circ 49,3,1$

" $\Delta v_0 - \frac{1}{2}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 v_0 = 6^\circ 34' 4,''1 - 30' 28,''6 - 0,''1 = 6^\circ 3' 35,''4$

$\frac{1}{2}\Delta^2 v_0 - \frac{1}{8}\Delta^2 u_0 = -2' 45,''9 + 0,''8 = -2' 46,''7$

Donc :

$$x = \frac{6^\circ 49' 3,''1}{6^\circ 3' 35,''4} \cdot 12 - \frac{2' 46,''7 \times 12}{6^\circ 3' 35,''4}\,\frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right) - \frac{5,''4}{6^\circ 3' 35,''4}\,\frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right)\left(2-\frac{x}{12}\right)$$

en effectuant

$$x = 13,^h 50042 + 0,11003.\frac{x}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right) + 0,00249.\frac{x}{12}\left(\frac{x}{12}-1\right)\left(2-\frac{x}{12}\right)$$

La 1ère valeur approchée de $\frac{x}{12}$ est 1,125 ; ce qui donne une première valeur de la correction : $+0,^h 01571$. Donc :

$x = 13,^h 51613$. On aura alors la valeur de $\frac{x}{12} = 1,128$ 2e corr $= 0,01620$ $x = 13,^h 51682 = 13,^h 30^m 59,''8$.

$\log \frac{x}{12} = \bar{1},91072$ $\qquad \frac{x}{12} = 0,81417.$

et par suite pour une première valeur de la correction :

$-0,01184 - 0,00048 = -0,01232.$

La seconde valeur de x sera donc :

$9^h,77010 - 0,01232 = 9^h,75778.$

Avec cette seconde valeur de x, on a :

$\log \frac{x}{12} = \bar{1},91018$ $\qquad \frac{x}{12} = 0,81815.$

par suite pour une seconde valeur de la correction :

$-0,01189 - 0,00049 = -0,01238.$

La valeur définitive de x est donc :

$9^h,77010 - 0,01238 = 9^h,75772. = 9^h\,45^m\,27^s,79.$

III Valeurs numériques des dérivées d'une fonction dont on connaît les valeurs particulières pour les valeurs de la variable en progression arithmétique. — Notre problème consiste en ceci : Etant donnés $u_0, u_1, u_2 \ldots$, trouver les valeurs de $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3} \ldots$ pour $x = x_0, x_1, x_2 \ldots$.

Nous nous bornerons au cas où l'on peut négliger les différences $4^{èmes}$, parce que c'est le seul cas pratique.

Mettons l'éq. (1) sous la forme :

$$u = u_0 + \frac{\Delta u_0}{1}\frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 u_0}{1.2}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) + \frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)$$

ou en ordonnant :

$$u = u_0 + \left(\frac{\Delta u_0}{1} - \frac{\Delta^2 u_0}{2} + \frac{\Delta^3 u_0}{3}\right)\frac{x-x_0}{h} + \left(\frac{\Delta^2 u_0}{2} - \frac{\Delta^3 u_0}{2}\right)\frac{(x-x_0)^2}{1.h^2} + \frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}\frac{(x-x_0)^3}{h^3}$$

Maintenant en appelant u_0', u_0'', u_0''' les valeurs des dérivées du 1er, du 2e et du 3e ordre de u pour $x = x_0$, on a d'après le théorème de Taylor :

$$u = u_0 + \frac{u_0'}{1}(x-x_0) + \frac{u_0''}{1.2}(x-x_0)^2 + \frac{u_0'''}{1.2.3}(x-x_0)^3.$$

quelque soit x. On doit donc avoir en identifiant les deux formules :

$$u_0' = \frac{1}{h}\left(\Delta u_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 u_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 u_0\right)$$

$$u_0'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 u_0 - \frac{3}{2}\Delta^3 u_0\right)$$

$$u_0''' = \frac{1}{h^3}\Delta^3 u_0.$$

Si l'on peut négliger la troisième différence, on aura :

$$u_0' = \frac{1}{h}\left(\Delta u_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 u_0\right)$$

$$u_0'' = \frac{1}{h^2}\Delta^2 u_0.$$

. Exemple. On trouve dans le Nautical pour 1886 les ascensions droites de la Lune, pour Janvier 18 temps moyen de Greenwich.

	R de α	Diff. I	Diff. II	Diff. III
0^h	$6^h 10^m 31^s,83$	$+ 2^m 37^s,75$	$+ 0^s,16$	$- 0^s,03.$
1^h	6. 13. 9,58	2. 37,91	0,13	
2	6. 15. 47,49	2. 38,04		
3^h	6. 18. 25,53			

Prenons pour unité de temps 10^m et calculons les dérivées de R_α pour 0^h. $18^m 0^s$. On aura:

$$u_0' = \frac{1}{6}\left(2^m 37^s,75 - \frac{1}{2}\cdot 0^s,16 + \frac{1}{3}\times -0^s,03\right)$$

$$u_0'' = \frac{1}{36}\left(0^s,16 + 0^s,03\right).$$

$$u_0''' = -\frac{1}{216}\,0^s,03.$$

c'est-à-dire

$$u_0' = 26^s,277. \quad u_0'' = 0^s,0053 \quad u_0''' = -0^s,00014.$$

Autres formules d'interpolation.

Avant de traiter d'autres formules d'interpolation, nous allons d'abord expliquer la notation introduite par Encke.

Sur une feuille de papier réglé, écrivons dans une première colonne les valeurs de la variable pour lesquelles sont données les valeurs de la fonction considérée, en ayant soin de laisser une ligne blanche dans chaque intervalle de deux arguments consécutifs; mettons ensuite dans la 2e colonne les valeurs données de la fonction en regard des valeurs correspondantes de la variable. Inscrivons dans chaque intervalle vide des arguments l'argument qui tient le milieu des arguments qui le comprennent c'est-à-dire leur moyenne arithmétique, et écrivons en regard de cet argument et dans la 3e colonne les différences premières de la fonction. En général, écrivons les différences d'un ordre impair en regard de la 1re différence et les différences des ordres pairs en regard de la fonction elle-même. Enfin, représentons généralement une différence d'ordre m par la caractéristique δ^m

affectée de son accent et préfixée à l'argument en regard duquel se trouve cette différence.

Nous aurons ainsi un tableau comme le suivant:

Argument.	Fonctions.	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.	Diff. IV.	Diff. V
$a-3h$	$f(a-3h)$		$f'(a-3h)$		$f''(a-3h)$	
$a-\frac{5}{2}h$		$f(a-\frac{5}{2}h)$		$f'''(a-\frac{5}{2}h)$		$f^{IV}(a-\frac{5}{2}h)$
$a-2h$	$f(a-2h)$		$f''(a-2h)$		$f''(a-2h)$	
$a-\frac{3}{2}h$		$f(a-\frac{3}{2}h)$		$f'''(a-\frac{3}{2}h)$		$f^{IV}(a-\frac{3}{2}h)$
$a-h$	$f(a-h)$		$f''(a-h)$		$f''(a-h)$	
$a-\frac{1}{2}h$		$f(a-\frac{1}{2}h)$		$f'''(a-\frac{1}{2}h)$		$f^{IV}(a-\frac{1}{2}h)$
a	$f(a)$		$f''(a)$		$f''(a)$	
$a+\frac{1}{2}h$		$f(a+\frac{1}{2}h)$		$f'''(a+\frac{1}{2}h)$		$f^{IV}(a+\frac{1}{2}h)$
$a+h$	$f(a+h)$		$f''(a+h)$		$f''(a+h)$	
$a+\frac{3}{2}h$		$f(a+\frac{3}{2}h)$		$f'''(a+\frac{3}{2}h)$		$f^{IV}(a+\frac{3}{2}h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$		$f''(a+2h)$		$f''(a+2h)$	
$a+\frac{5}{2}h$		$f(a+\frac{5}{2}h)$		$f'''(a+\frac{5}{2}h)$		$f^{IV}(a+\frac{5}{2}h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$		$f''(a+3h)$		$f''(a+3h)$	

Remarquons que dans l'argument d'une différence d'ordre pair reste le coefficient de h est entier toutes que dans une différence d'ordre impair ce coefficient est une fraction $\frac{p}{2}$ ayant 2 pour dénominateur.

On a déjà la définition des différences.

$$(1)\qquad \Delta^{(m)}f(a+ph) = \Delta^{(m-1)}f(a+p+\tfrac{1}{2}h) - \Delta^{(m-1)}f(a+p-\tfrac{1}{2}h).$$

Si l'on y fait distinguer les cas où m est pair et où m est impair, on aura:

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta^{(2k)}f(a+ph) - \Delta^{(2k)}f(a+(p-1)h) = \Delta^{(2k+1)}f(a+\frac{2p-1}{2}h). \\ \Delta^{(2k+1)}f(a+\frac{2p+1}{2}h) - \Delta^{(2k)}f(a+\frac{2p-1}{2}h) = \Delta^{(2k+2)}f(a+ph). \end{cases}$$

On a aussi à considérer les moyennes arithmétiques de deux valeurs différences consécutives du même ordre. Nous les représenterons par la même caractéristique que celle des différences préfixée à la moyenne arithmétique des deux différences. On aura alors:

$$(3)\quad \begin{cases} \mu^{(2k)}f(a+ph) + \mu^{(2k)}f(a+(p-1)h) = 2\mu^{(2k)}f(a+\frac{2p-1}{2}h) \\ \mu^{(2k+1)}f(a+\frac{2p+1}{2}h) + \mu^{(2k+1)}f(a+\frac{2p-1}{2}h) = 2\mu^{(2k+1)}f(a+ph) \end{cases}$$

Remarquons que contrairement à ce qui arrive pour

les différences, les moyennes arithmétiques contiennent dans leur argument un nombre entier de h et une fraction de h suivant que l'indice de sa caractéristique est impair ou pair, ce qui évite toute ambiguité.

On a déjà appris (2) et (3):

$$2f^{(2k+1)}\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right) = 2f^{(2k+1)}(a+ph) + f^{(2k+2)}(a+ph)$$

ou bien

$$(4)\qquad f^{(2k+1)}\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right) = f^{(2k+1)}(a+ph) + \tfrac{1}{2}f^{(2k+2)}(a+ph)$$

On peut ainsi exprimer les différences d'ordre impair par des quantités f ne contenant dans leur argument que des multiples de h.

Revenons à présent la formule fondamentale de Newton à l'aide de notre nouvelle notation. Elle donne

$$\frac{x-x_0}{h} = n \quad \text{ou} \quad x = x_0 + nh.$$

nous aurons:

$$(5)\quad f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{1}f'(a+\tfrac{1}{2}h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f''(a+h) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}f'''(a+\tfrac{3}{2}h) + \cdots$$

Il s'agit de transformer cette équation.

On a d'abord:

$$f''(a+h) = f''(a) + f'''(a+\tfrac{1}{2}h)$$

$$f'''(a+\tfrac{3}{2}h) = f'''(a+\tfrac{1}{2}h) + f^{IV}(a+h)$$
$$= f'''(a+\tfrac{1}{2}h) + f''(a) + f'''(a+\tfrac{1}{2}h)$$

$$f^{IV}(a+2h) = f^{IV}(a+h) + f^{V}(a+\tfrac{3}{2}h)$$
$$= f''(a) + 2f'''(a+\tfrac{1}{2}h) + f^{IV}(a+h) = \cdots$$

$$f^{V}(a+\tfrac{5}{2}h) = f^{V}(a+\tfrac{3}{2}h) + f^{VI}(a+2h)$$
$$= f^{V}(a+\tfrac{1}{2}h) + f^{VI}(a+h) + f^{VI}(a+2h) = \cdots$$

. . . . . .

En substituant ces valeurs dans (5) les coefficients de $f(a)$, $f(a+\frac{1}{2}h)$ restent les mêmes; et le coefficient de $f''(a)$ sera: $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Pour le coefficient de $f'''(a+\frac{1}{2}h)$, on aura:

$$\frac{n(n-1)(n+2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{(n+1).n(n-1)}{1.2.3}.$$

Pour celui de $f^{IV}(a+h)$:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}.$$

Enfin le coefficient de $f^{V}(a+\frac{5}{2}h)$ sera:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + 2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}.$$

Par suite :

$$f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{1}f'(a+\tfrac{1}{2}h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f''(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f''(a+\tfrac{1}{2}h)$$

(6) $$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}f^{IV}(a) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}f^{V}(a+\tfrac{1}{2}h) + \cdots$$

C'est là une formule d'interpolation qui n'est bonne à employer que lorsque les différences qui se trouvent sur la ligne horizontale de $f(a)$ et sur la ligne suivante.

Si l'on remarque que l'on a :

$$f'(a+\tfrac{1}{2}h) = f'(a-\tfrac{1}{2}h) + f''(a)$$
$$f''(a+\tfrac{1}{2}h) = f''(a-\tfrac{1}{2}h) + f'''(a)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On pourra écrire :

$$f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{1}f'(a-\tfrac{1}{2}h) + \frac{n(n+1)}{1.2}f''(a) + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}f'''(a-\tfrac{1}{2}h)$$
$$+\frac{(n+1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}f^{IV}(a) + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4.5}f^{V}(a-\tfrac{1}{2}h) + \cdots$$

car on a :

$$\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n(n+1)}{1.2}.$$
$$\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}.$$

En changeant n en $-n$ dans la formule précédente on a :

$$f(a-nh) = f(a) - \frac{n}{1}f'(a-\tfrac{1}{2}h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f''(a) - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f'''(a-\tfrac{1}{2}h)$$

(7) $$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}f^{IV}(a) - \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}f^{V}(a-\tfrac{1}{2}h) + \cdots$$

formule analogue à la formule (6) et qui convient mieux si l'on veut interpoler pour une valeur de la variable comprise entre a et $a-\frac{1}{2}h$. par exemple

Si l'on peut négliger les différences 4ièmes et 5ièmes, on pourra écrire ces deux formules :

(6') $$f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{2}\left\{f'(a+\tfrac{1}{2}h) + \frac{n-1}{3}\left[f''(a) + \frac{n+1}{4}f'''(a+\tfrac{1}{2}h)\right]\right\}$$

(7') $$f(a-nh) = f(a) - \frac{n}{2}\left\{f'(a-\tfrac{1}{2}h) - \frac{n-1}{3}\left[f''(a) - \frac{n+1}{4}f'''(a+\tfrac{1}{2}h)\right]\right\}$$

Un des principaux avantages de ces formules consiste en celui-ci : On trouve une ligne horizontale au regard de la valeur nh de l'argument et on corrigeant successivement les différences des différents ordres, la ligne de la correction est toujours telle que la différence corrigée se rapproche de la valeur qui se trouve de l'autre côté de la ligne ; en sorte que l'on n'a pas à

se préoccuper du signe de chaque différence. En effet, on a pour exemple :

$$f''(a+\tfrac{1}{2}h) = f''(a+h) - f''(a)$$

Par conséquent si $f''(a)$ est $< f''(a+h)$ $\frac{n+1}{2} f''(a+\frac{1}{2}h)$ a un positif et par suite $f'(a) + \frac{n+1}{2} f''(a+\frac{1}{2}h)$ se rapprochera davantage de $f'(a+h)$ que ne le fait $f'(a)$. Il en est de même de $f(a)$ si $f'(a)$ est plus grand que $f'(a+h)$. Cela suppose, pourtant, pour être général, que l'on ait $n < 1$.

Pour de petites valeurs de n, on peut encore employer une autre formule. En effet, en faisant dans (4) successivement $p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ et, en ajoutant, on obtient :

$$f'(a+\tfrac{1}{2}h) = f'(a) + \tfrac{1}{2} f''(a)$$

$$f'''(a+\tfrac{1}{2}h) = f'''(a) + \tfrac{1}{2} f^{IV}(a) \text{ etc.}$$

En remplaçant cette valeur dans (6), il vient :

$$(8) \quad f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{2} f'(a) + \frac{n^2}{1.2} f''(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f'''(a) + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4} f^{IV}(a) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} f^{V}(a) + \cdots$$

ou bien :

$$(8') \quad f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{1} f'(a) + \frac{n^2}{1.2} f''(a) + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} f'''(a) + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4} f^{IV}(a) + \cdots$$

formule dont nous donnerons plus loin une application.

Dans le cas où l'on a $n = \frac{1}{2}$, il est indifférent d'employer la formule (5) ou la formule (7) c'est-à-dire la position de a ou de a+h. en partant de

La formule (6) devient alors :

$$f(a+\tfrac{1}{2}h) = f(a) + \tfrac{1}{2} f'(a+\tfrac{1}{2}h) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1.2} f''(a) + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1.2.3} f'''(a+\tfrac{1}{2}h) + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2.3.4} f^{IV}(a) + \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2.3.4.5} f^{V}(a+\tfrac{1}{2}h) + \cdots$$

De même en faisant dans (7), $n = \frac{1}{2}$ et en remplaçant a par a+h, il vient :

$$f(a+\tfrac{1}{2}h) = f(a+h) - \tfrac{1}{2} f'(a+\tfrac{1}{2}h) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1.2} f''(a+h) - \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1.2.3} f'''(a+\tfrac{1}{2}h) + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2.3.4} f^{IV}(a+h) - \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2.3.4.5} f^{V}(a+\tfrac{1}{2}h) + \cdots$$

En prenant la moyenne arithmétique de ces deux éq. il vient :

$$(9) \quad f(a+\tfrac{1}{2}h) = f(a+\tfrac{1}{2}h) - \tfrac{1}{8} f''(a+h) + \tfrac{3}{128} f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}h) - \tfrac{5}{1024} f^{VI}(a+\tfrac{1}{2}h) + \cdots$$

Exemple. — D'après le Nautical Almanac pour 1886, on a pour les longitudes héliocentriques de la Planète Mars, pour 0h Berlin moyen de Greenwich le tableau suivant :

Argument.	Longit. de ☉	Diff. I.	Diff. II	Diff. III.
Fév. 16	158° 0' 24",1			
		+ 2° 37' 20",9		
22	160. 37. 45,0		+ 10",0	
		+ 2. 37. 30,9		+ 4,1
28	163. 15. 16,9		+ 14,1	
		+ 2. 37. 45,0		+ 4,0.
Mars 6.	165. 53. 0,9		+ 18,1	
		+ 2. 38. 3,1		
12.	168. 31. 4,0.			

Cherchons la longit. héliocentrique de ☉ pour 1° Mars 2. 2° pour Mars ~~4~~, 3° pour Mars ~~5~~.

1° En appliquant la formule (6) on aura.

~~168° 31' 4,0 + 2/3 { 2° 37' 18",9 - 1/3 { 14",1 + 1/9~~

$168^\circ 15' 16'',9 + \frac{2}{3}\{2.37.45,0 - \frac{1}{3}[14'',1 + \frac{1}{9}.4,0]\}$.

ou bien

$182° 15' 16'',9 + \frac{2}{3}\{2.37.45,0 - \frac{1}{3}.15,9\}$

$168° 15' 15'',9 + \frac{2}{3}\{2.37.39,7\} = 168° 15' 15'',9 + 52',39'',2$

ou enfin

Longit. ☉ pour Mars 2 = ~~164° 7' 49",1~~ $164^\circ 7' 49'',1$

2° En appliquant la formule (7), on a:

$165° 53'. 0'',9 - \frac{2}{3}\{2.37.45,0 + \frac{1}{3}[18,1 - \frac{1}{9}.4,0]\}$

ou bien

$165° 53' 0'',9 - \frac{2}{3}\{2.37.45,0 + \frac{1}{3}15,3\} = 165° 53' 0'',9 - \frac{2}{3}\,2.37.57,4$

ou enfin

$165° 53' 0'',9 - 52'.36,8 = 165° 0' 24'',1$.

3° Enfin la formule (9) donne pour Mars 3:

$164° 34' 8'',4 - \frac{1}{8}.18,1 = 164° 34' 8'',4$

Comme application de la formule (8), cherchons la valeur de longitude ☉ pour mars 2. On aura:

$163° 15' 15'',9 + \frac{1}{6}\,2.37.37,5 + \frac{1}{2.36}\,14,1 - \frac{0,0135}{}\,4,0$.

ou bien:

$163° 15' 15'',9 + 26' 16'',25 + 0'',19 - 0'',05 = 163° 18' 41' 32'',3$.

Vérification par les différences. - Si une fonction présente une marche régulière, les différences d'un certain ordre

ne devrient généralement insensibles, par suite les diff. de l'ordre $n-1$ devraient être à peu près égales. Si ce fait ne se présente pas, il y a probablement erreur de calcul ou d'observation dans les valeurs tabulaires de la fonction.

Appelons $f(a)+\varepsilon$ la valeur erronée de $f(a)$, alors on aura pour les différences des tableaux :

$f(a-3h)$

$f(a-\frac{5}{2}h)$

$f(a-2h)$ $f''(a-2h)$

$f(a-\frac{3}{2}h)$ $f''(a-\frac{3}{2}h)+\varepsilon$

$f(a-h)$ $f'(a-h)+\varepsilon$ $f'''(a-h)-4\varepsilon$

$f(a-\frac{1}{2}h)+\varepsilon$ $f''(a-\frac{1}{2}h)-3\varepsilon$

$f(a)+\varepsilon$ $f'(a)-2\varepsilon$ $f'''(a)+6\varepsilon$

$f(a+\frac{1}{2}h)-\varepsilon$ $f''(a+\frac{1}{2}h)+3\varepsilon$

$f(a+h)$ $f'(a+h)+\varepsilon$ $f'''(a+h)-4\varepsilon$

$f(a+\frac{3}{2}h)$ $f''(a+\frac{3}{2}h)-\varepsilon$

$f(a+2h)$ $f''(a+2h)$

$f(a+\frac{5}{2}h)$

$f(a+3h)$

Le tableau montre qu'il doit y avoir la plus grande irrégularité sur la ligne horizontale où il y a erreur. Il permet au besoin de trouver l'erreur commise.

Pour employer ce moyen de vérification, cherchons les résultats de l'exemple précédent.

	Longit. δ^{m}		
Fev. 28.	$163°16'(\frac{5}{9})''9$	$+26.164$	
Hor. 1.	163.44.32.3	26.168	$+\ 0,4$
2.	164. 7. 4,8	26.173	$0,5$
3.	164. 34. 6,4	26.177	$0,4$
4	165. 0. 24,1.		

Les diff. 3èmes étant très-régulières, il y a lieu de supposer que les résultats du calcul sont exacts.

Calcul des dérivées. — Mettons la formule (8) sous la forme :

$$f(a+nh)=f(a)+\frac{n}{1}\left\{f'(a)-\frac{1}{6}f'''(a)+\frac{1}{30}f^{v}(a)-\frac{1}{140}f^{vii}(a)+\cdots\right\}$$
$$+\frac{n^2}{1.2}\left\{f''(a)-\frac{1}{12}f^{iv}(a)+\frac{1}{90}f^{vi}(a)-\cdots\right\}$$

$$+\frac{n^3}{1.2.3}\left\{f'''(a)-\frac{1}{4}f^{v}(a)+\frac{7}{120}f^{vii}(a)-\cdots\right\}$$
$$+\frac{n^4}{1.2.3.4}\left\{f^{iv}(a)-\frac{1}{8}f^{vi}(a)+\cdots\right\}$$
$$+\frac{n^5}{1.2.3.4.5}\left\{f^{v}(a)-\frac{1}{5}f^{viii}(a)+\cdots\right\}.$$

Or d'après le théorème de Taylor, on a:

~~$f(a+x+k)=f(a)+\frac{x+k}{1}f'(a)$~~ Notation de Cauchy

$$f(a+nk)=f(a)+\frac{nk}{1}D_1f(a)+\frac{n^2k^2}{1.2}D_1^2f(a)+\frac{n^3k^3}{1.2.3}D_1^3f(a)+\cdots$$

Donc en identifiant:

$$D_1f(a)=\frac{1}{k}\left\{f'(a)-\frac{1}{6}f'''(a)+\frac{1}{30}f^{v}(a)-\frac{1}{140}f^{vii}(a)+\cdots\right\}$$
$$D_1^2f(a)=\frac{1}{k^2}\left\{f''(a)-\frac{1}{12}f^{iv}(a)+\frac{1}{90}f^{vi}(a)-\cdots\right\}$$
(a) $$D_1^3f(a)=\frac{1}{k^3}\left\{f'''(a)-\frac{1}{4}f^{v}(a)+\frac{7}{120}f^{vii}(a)-\cdots\right\}$$
$$D_1^4f(a)=\frac{1}{k^4}\left\{f^{iv}(a)-\frac{1}{6}f^{vi}(a)+\cdots\right\}$$
$$D_1^5f(a)=\frac{1}{k^5}\left\{f^{v}-\frac{1}{3}f^{viii}(a)+\cdots\right\}$$
. . . . . .

Les valeurs des formules qui donnent les dérivées pour $x=a$, en fonction des différences d'ordre pair et des moyennes arithmétiques des différences d'ordre impair.

Pour avoir les dérivées pour une valeur quelconque $a+nk$ de la variable, il suffit de faire, dans nos formules, a égale $a+nk$, ce qui donne:

$$D_1f(a+nk)=\frac{1}{k}\left\{f'(a+\tfrac{1}{2}k)+\frac{1}{6}f'''(a+\tfrac{3}{2}k)+\frac{1}{30}f^{v}(a+\tfrac{5}{2}k)-\cdots\right\}$$
(a') $$D_1^2f(a+nk)=\frac{1}{k^2}\left\{f''(a+\tfrac{1}{2}k)-\frac{1}{12}f^{iv}(a+nk)+\cdots\right\}$$
. . . . . .

Il nous faut calculer les ∞ quantités $f'(a+nk)$, $f'''(a+nk)\cdots$ $f''(a+nk)$, $f^{iv}(a+nk)\cdots$. Pour les différences d'ordre pair, cela est facile, par exemple pour calculer $f''(a+\frac{1}{2}k)$, on ~~partira~~ de $f''(a)$, $f''(a+k)$ etc et de leurs différences qui ne sont autres que différences 2^e, 3^e de $f(x)$.

Quant aux moyennes arithmétiques, on a par exemple:

$$f'(a+nk)=\frac{f'(a+n\pm\frac{1}{2}k)+f'(a+n\pm\frac{1}{2}k)}{2}.$$

Or on a pour interpoler $f'(a+\cdots)$ en appliquant la formule (5):

$$f'(a-\tfrac{1}{2}k+nk)=f'(a-\tfrac{1}{2}k)+\frac{n}{1}f''(a)+\frac{n(n-1)}{1.2}f'''(a-\tfrac{1}{2}k)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f^{iv}(a)+\cdots$$
$$f'(a+\tfrac{1}{2}k+nk)=f'(a+\tfrac{1}{2}k)+\frac{n}{1}f''(a)+\frac{n(n+1)}{1.2}f'''(a+\tfrac{1}{2}k)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f^{iv}(a)+\cdots$$

Car on a:

$$f''(a+\cdot)=f''(a)+f'''(a+\tfrac{1}{2}k).$$

En ajoutant les formules précédentes et remarquant que

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n-1)}{1.2}f''(a-\tfrac{1}{2}h)+\frac{n(n+1)}{1.2}f''(a+\tfrac{1}{2}h)\right\}=\frac{n^2}{1.2}f''(a)+\frac{n}{4}f^{IV}(a)$$

et que

$$\frac{n}{4}f''(a)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f''(a)=\frac{2n^3+n}{12}f'''(a)$$

nous aurons:

$$(10)\quad f'(a+nh)=f'(a)+nf''(a)+\frac{n^2}{2}f'''(a)+\frac{2n^3+n}{12}f^{IV}(a)+\cdots$$

En mettant deux accents de plus, on aura de même

$$(11)\quad f'''(a+nh)=f'''(a)+nf^{IV}(a)+\cdots$$

formules qui permettent d'interpoler les moy. arithmétiques.

Dans le cas particulier où $n=\frac{1}{2}$, il est plus commode de se servir des différences d'ordre impair et des moyennes arithmétiques des différences d'ordre pair. On a par définition.

$$f(a+h)+f(a)=2f(a+\tfrac{1}{2}h)$$
$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\tfrac{1}{2}h).$$

D'où

$$f(a)=f(a+\tfrac{1}{2}h)-\tfrac{1}{2}f'(a+\tfrac{1}{2}h)$$

On aura de même:

$$f''(a)=f''(a+\tfrac{1}{2}h)-\tfrac{1}{2}f'''(a+\tfrac{1}{2}h)\quad \text{etc.}$$

En portant ces valeurs dans l'éq. (6), il vient: et en remarquant que:

$$-\frac{1}{2}+\frac{n}{1}=(n-\frac{1}{2})$$
$$-\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}=\frac{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}{1.2.3}\quad \text{etc.}$$

il vient:

$$f(a+nh)=f(a+\tfrac{1}{2}h)+(n-\tfrac{1}{2})f'(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{n(n-1)}{1.2}f''(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}{1.2.3}f'''(a+\tfrac{1}{2}h)$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}h)+\cdots$$

ou en remplaçant n par $n+\frac{1}{2}$

$$f(a+\tfrac{1}{2}h+nh)=f(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{n}{1}f'(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}{1.2}f''(a+\tfrac{1}{2}h)$$
$$+\frac{(n+\frac{1}{2})n(n-\frac{1}{2})}{1.2.3}f'''(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{(n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}{1.2.3.4}f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}h)+\cdots$$

En développant cette formule suivant les puissances de n et en identifiant avec la formule de Taylor:

$$f(a+\tfrac{1}{2}h+nh)=f(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{nh}{1}D_x f(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{n^2h^2}{1.2}D_x^2 f(a+\tfrac{1}{2}h)+\cdots$$

on aura:

$$(b)\quad \begin{aligned}
D_x f(a+\tfrac{1}{2}h)&=\frac{1}{h}\left\{f'(a+\tfrac{1}{2}h)-\frac{1}{24}f'''(a+\tfrac{1}{2}h)+\frac{3}{640}f^{V}(a+\tfrac{1}{2}h)-\cdots\right\}\\
D_x^2 f(a+\tfrac{1}{2}h)&=\frac{1}{h^2}\left\{f''(a+\tfrac{1}{2}h)-\frac{1}{24}f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}h)+\cdots\right\}\\
D_x^3 f(a+\tfrac{1}{2}h)&=\frac{1}{h^3}\left\{f'''(a+\tfrac{1}{2}h)-\frac{1}{8}f^{V}(a+\tfrac{1}{2}h)+\cdots\right\}\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Exemple.- Etant donné le tableau suivant qui se rapporte au temps moyen de Greenwich:

1886	Longitude de ☾	Diff. I	Diff. II	Diff. III
Jan. 26	209° 42' 1",4			
		+ 6° 34' 4",1		
26,5	216. 16. 5,5		8.323 - 5' 32",8	
			6. 28.323	+ 28",2
27,0	222. 44. 37,8		- 5' 4",6	
			6. 23. 27,7	+ 28",1
27,5	229. 8. 5,5		- 4. 36,5	
			6. 18. 51,2	
28,0	235. 26. 56,7.			

Trouver la variation horaire de la longitude de ☾ pour le 27,0 $27^h.3^h$ et 27.6^h.

1° On a d'après la 1re formule (a), pour la dérivée première de longit. ☾ pour 27,0:

$$\frac{1}{12}\{6°25'0,0 - \frac{1}{6}\times 28",15\} = \frac{1}{12}\,6°24'55,3 = 32'4",61.$$

2° On a d'après (a) pour la même grandeur en 27.3^h.

$$\frac{1}{12}\{f'(a+\tfrac{1}{4}h) - \tfrac{1}{6}f'''(a+\tfrac{1}{4}h)\}.$$

Mais d'après (6):

$$f'(a+\tfrac{1}{4}h) = 6°25'0,0 + \tfrac{7}{12}\times -5'4,6 + \tfrac{1}{32}\times 28",15 = 6°23.44,7$$

$$f'''(a+\tfrac{1}{4}h) = 28",1 + \tfrac{7}{24}\times -0,1. = 28",1$$

Donc, notre dérivée est:

$$\frac{1}{12}\{6°23.44",7 - \tfrac{1}{6}28",1\} = \frac{1}{12}\,6°23'40,0 = 31.58",33$$

3° Enfin la dérivée pour 27.6^h sera d'après (6):

$$\frac{1}{12}\{6°23'27,7 - \tfrac{1}{24}28",1\} = \frac{1}{12}\,6°23'26,5 = 31'57",21$$

VIII. Détermination des valeurs approchées des éléments du mouvement du Soleil.

Pour connaître parfaitement le mouvement elliptique de la Terre autour du Soleil, ce qui revient au même, le mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, il faut connaître :

1° Le point vernal ou l'équinoxe du printemps
2° L'obliquité de l'écliptique
3° La durée d'une révolution sidérale du Soleil
4° La longitude du périgée
5° L'excentricité de l'orbite solaire
6° La longueur de son demi-grand axe.

Les première et 2e quantité déterminent la position du plan de l'écliptique par rapport à celui de l'équateur ; la 4e quantité fixe la position de l'axe de l'orbite elliptique dans son plan et enfin les 5e et 6e la forme et la grandeur de cette ellipse.

Nous allons d'abord nous occuper à déterminer les 3 premières quantités.

I. Détermination du plan de l'écliptique et de la durée de l'année. — Prenons une étoile fixe quelconque dont l'ascension droite soit égale à α_0. On peut déterminer, à une époque quelconque, à l'aide d'un cercle méridien complet, la différence $\alpha - \alpha_0$ des ascensions droites du Soleil et de l'étoile considérée, ainsi que la déclinaison δ du Soleil. Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que l'on ait fait une pareille détermination chaque jour et que l'on ait dressé un registre contenant les résultats de toutes les observations.

Soient γ l'obliquité de l'écliptique et soient α, δ ; α', δ' les coordonnées du Soleil à deux époques données. D'après l'éq. (5) du Chap. III, qu'il est facile de retrouver, on a :

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\gamma \sin\alpha \qquad \operatorname{tg}\delta' = \operatorname{tg}\gamma \sin\alpha'.$$

ou bien :

$$\operatorname{tg}\beta' \sin(\alpha - \alpha_1 + \alpha_0) = \operatorname{tg}\beta.$$
$$\operatorname{tg}\beta' \cos(\alpha' - \alpha_1 + \alpha_0) = \operatorname{tg}\beta'$$

ou encore :

$$\operatorname{tg}\beta' \sin\alpha_0 \cos(\alpha - \alpha_1) + \operatorname{tg}\beta' \cos\alpha_0 \sin(\alpha - \alpha_1) = \operatorname{tg}\beta \qquad -\cos(\alpha - \alpha_1),\ \sin(\alpha - \alpha_1)$$
$$\operatorname{tg}\beta' \sin\alpha_0 \cos(\alpha' - \alpha_1) + \operatorname{tg}\beta' \cos\alpha_0 \sin(\alpha' - \alpha_1) = \operatorname{tg}\beta' \qquad \cos(\alpha' - \alpha_1),\ -\sin(\alpha' - \alpha_1)$$

En résolvant par rapport à $\operatorname{tg}\beta' \sin\alpha_0$ et $\operatorname{tg}\beta' \cos\alpha_0$, il vient :

$$\operatorname{tg}\beta' \sin\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta' \sin(\alpha' - \alpha_1) - \operatorname{tg}\beta' \cos(\alpha - \alpha_1)}{\sin[(\alpha' - \alpha_1) - (\alpha - \alpha_1)]}$$

$$\operatorname{tg}\beta' \cos\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta' \cos(\alpha' - \alpha_1) - \operatorname{tg}\beta' \cos(\alpha' - \alpha_1)}{\sin[(\alpha' - \alpha_1) - (\alpha - \alpha_1)]}.$$

Tout est connu dans les second membres, et l'on connaîtra $\operatorname{tg}\beta'$ et α_0. — Ces quantités seront d'autant mieux déterminées que $\alpha' - \alpha_1 - (\alpha - \alpha_1)$ ou $\alpha' - \alpha$ sera plus près d'être égale à 90°. On associera donc par exemple deux observations faites l'une près de l'équinoxe du printemps et l'autre près du solstice d'été.

Ayant déterminé α_1, toutes les ascensions droites sont connues, et en cherchant par interpolation l'époque où l'on a $\alpha = 0$ ou $\alpha - \alpha_1 = -\alpha_1$, on aura l'époque du passage du Soleil par l'équinoxe du printemps.

Les retours successifs du Soleil à l'équinoxe du printemps donneront aisément la durée de l'année tropique. En y appliquant une correction due à la précession et que nous indiquerons plus tard, on aura la durée de l'année sidérale ou c'est-à-dire de la révolution sidérale de la Terre autour du Soleil.

Remarquons que, une fois les ascensions droites et les connues, on peut passer aux coordonnées écliptiques du Soleil, par le procédé que nous avons vu au Chap. II. Nous supposons dans ce qui suit que l'on ait construit un tableau donnant les longitudes géocentriques du Soleil.

II. — Détermination de l'excentricité et du périgée au moyen des observations du diamètre apparent du Soleil. — Avec un instrument que l'on appelle

héliomètre, on peut déterminer avec beaucoup de précision le demi-diamètre apparent du Soleil et suivre pas à pas la variation de ce diamètre. Soient r, r' les distances du Soleil à la Terre à deux époques données et R, R' les valeurs de son demi-diamètre apparent aux mêmes époques. On a sensiblement:

$$Rr = R'r' \quad \text{ou} \quad \frac{r'}{r} = \frac{R}{R'}.$$

Supposons que R et R' soient le maximum et le minimum du demi-diamètre solaire; alors r et r' seront le minimum et le maximum de son rayon vecteur. C'est à dire que, en appelant a, e le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite terrestre, on aura:

$$r = a(1-e) \qquad r' = a(1+e) \quad \text{d'où} \quad \frac{r'}{r} = \frac{1+e}{1-e}$$

Par suite:

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{R}{R'} \quad \text{ou} \quad e = \frac{R-R'}{R+R'}.$$

Cette équation détermine l'excentricité e.

Quant à la longitude du périgée ϖ, on pourrait penser qu'on puisse la déterminer en cherchant la longitude du Soleil à l'époque où son diamètre apparent est maximum, mais comme au voisinage de son maximum, R varie très peu, ce procédé n'est susceptible d'aucune précision. On préfère alors de déterminer l'époque où le diamètre est égal à sa valeur moyenne arithmétique entre les valeurs extrêmes. On aura alors: $r = a$ et l'équation générale de l'ellipse:

$$a = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(l-\varpi)}$$

donne:

$$1 + e\cos(l-\varpi) = 1 - e^2.$$

ou bien:

$$\cos(l-\varpi) = -e$$

connaissant e et déterminant l par interpolation, on connaîtra ϖ au moyen de cette dernière équation.

III.– Autre méthode de détermination de e et ϖ. – Par le procédé que nous avons expliqué dans le chapitre précédent déterminons pour chaque valeur de l les valeurs correspondantes de r

quantité. Soient t_0 l'époque où cette dérivée est maxima et minima indifféremment déjà d'une façon approchée les passages du Soleil au périgée et à l'apogée. Pour les déterminer avec précision, appelons Π la durée de l'année tropicale et soient l et l' les longitudes du Soleil à deux époques distantes l'une de l'autre d'une quantité égale à $\frac{1}{2}\Pi$. Si dans l'intervalle de ces deux époques, le Soleil a passé par le périgée, la différence $l'-l$ sera évidemment plus grande que 180° et si dans cet intervalle le Soleil a passé par l'apogée, $l'-l$ sera $<180°$. Si l est égal à ϖ et $l' = 180°+\varpi$, alors et alors seulement $l'-l$ sera égale à 180°. Pour avoir ϖ, il suffit donc de chercher dans notre tableau deux longitudes différant entre elles de 180° et qui correspondent à deux époques distantes de $\frac{1}{2}\Pi$.

Pour cela, prenons pour origine des temps une époque arbitraire t_0 aussi près du périgée que possible. La longitude à l'époque t après ~~du périgée~~ de l'origine du temps pourra être mise sous la forme

$$l = l_0 + at + bt^2$$

où l_0, a, b étant trois quantités que nous savons calculer. De même la longitude à l'époque t' après t de l'époque $\frac{1}{2}\Pi$ pourra être représentée par l'éq.

$$l' = l_0 + a'(t'-\tfrac{1}{2}\Pi) + b'(t'-\tfrac{1}{2}\Pi)^2.$$

En faisant la différence et remplaçant

$$l'-l = 180° \qquad t'-t = \tfrac{1}{2}\Pi \quad \text{ou} \quad t'-\tfrac{1}{2}\Pi = t.$$

nous aurons:

$$180° = l_0'-l_0-(a-a')t+(b'-b)t^2$$

d'où

$$t = \frac{l_0'-l_0-180°}{a-a'} + \frac{b'-b}{a-a'}t^2$$

équation qui détermine l'époque t du passage du Soleil au périgée. On aura ensuite la longitude du périgée par interpolation.

Soient maintenant A et A' les dérivées de l au périgée et à l'apogée. D'après l'équation:

$$\Delta^2 \frac{dl}{dt} = C$$

on aura :

$$a^2(1-e)^2 A = a^2(1+e)^2 . A'$$

d'où

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}} \quad \text{ou} \quad e = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A'}}{\sqrt{A} + \sqrt{A'}}$$

équation qui détermine e avec précision.

Remarque II.- Ayant déterminé e et ϖ, l'éq.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(l-\varpi)}$$

déterminera pour chaque valeur de l le rapport $\frac{r}{a}$ du rayon vecteur à sa valeur moyenne. En le comparant à la valeur observée du diamètre apparent, on pourra vérifier l'ellipticité de l'orbite de la Terre.

Quant à la détermination de la valeur de a, elle dépend de la détermination de la parallaxe horizontale du Soleil, question que nous traiterons plus tard.

Nous avons fait jusqu'ici abstraction de la petite parallaxe de hauteur du Soleil. On devra donc retoucher tous les calculs que nous avons faits quand nous avons déterminé la parallaxe solaire.

IX. Etude du mouvement de la Lune.

I. Lois du mouvement elliptique de la Lune. - Si l'on s'en tient à une première approximation, assez grossière il est vrai, les lois du mouvement du centre de la Lune autour de celui de la Terre sont les mêmes que celles du mouvement héliocentrique du centre de la Terre, c'à d que.

1° Le centre de la Lune décrit autour de celui de la Terre une courbe plane de manière que son rayon vecteur mené du centre de la Terre décrit des aires égales dans des temps égaux.

2° L'orbite du centre de la Lune est une ellipse dont un des foyers coïncide avec le centre de la Terre.

Pour déterminer ce mouvement de la Lune, il faut connaître, outre sa position à l'origine des temps,

1° La longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire, c'à d la longitude du point par où passe la Lune quand elle va de l'hémisphère austral à l'hémisphère boréal, ces deux hémisphères étant celles déterminées par l'écliptique.

2° L'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de l'écliptique

3° La durée d'une révolution sidérale de la Lune autour de la Terre.

4° La position dans la ligne des absides c'à d l'axe majeur de l'ellipse orbite, cette position étant déterminée par ce qu'on appelle longitude du périhélie, c'à d. la somme des arcs compris entre le point vernal et le nœud ascendant et l'arc entre ce nœud ascendant et la perpétuité du périhélie.

5° La longitude de l'excentricité de l'orbite

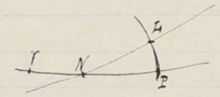
6° Enfin le demi-grand axe de cette ellipse.

Ces quantités connues une fois déterminées nous feraient connaître à chaque instant la position de la Lune si les lois précédentes étaient parfaitement exactes.

II. Détermination des éléments du mouvement de la Lune. – Pour déterminer d'abord la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, on pourra employer un procédé analogue à celui qui nous a fait connaître la position de l'équinoxe du printemps et l'obliquité de l'écliptique. Mais pour la longitude du nœud, il vaut mieux employer la méthode suivante :

Supposons qu'on ait observé l'ascension droite et la déclinaison de la Lune pendant plusieurs révolutions de cet astre et que l'on en ait déduit par le calcul les longitudes et les latitudes des correspondantes. Cherchons par exemple interpolation entre l'époque où la latitude de la Lune, d'australe qu'elle était devient boréale. A cette époque, la Lune a passé par son nœud ascendant, et par conséquent, en cherchant par interpolation directe la longitude à cette époque, on aura la longitude du nœud ascendant.

Une fois cette quantité connue, il est facile de déterminer l'inclinaison de l'orbite lunaire. En effet soient ΥP l'écliptique et ΥN le nœud déterminé par le plan de l'orbite. Enfin soit L la perspective de la Lune en une époque quelconque et P le pied de son cercle de latitude. En appelant l, λ la longit & la latitude de la L à l'époque considérée, et N la longitude du nœud ascendant $= \Upsilon N$ et φ l'inclinaison PNL du plan de l'orbite ; θ on aura dans le triangle rectangle NLP.



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin(l-N)}.$$

Ainsi, ayant connu l, λ et N, cette équation nous donnera φ. – On trouvera ainsi que φ est très-petit et égal à peu près à $5°.9'$.

En représentant par v la somme des arcs $\Upsilon N + NL$ on ce qu'on appelle la longitude de la Lune dans son orbite

nous avons dans le triangle précédent côté $N\Pi = \nu - N$; et l'on aura:

$$tg(\nu - N) = \frac{tg(\ell - N)}{\cos i}$$

Connaissant i, ε et N, cette équation nous permettra de calculer pour chaque valeur de ℓ la valeur correspondante de ν.

Ayant construit un tableau contenant une série de valeurs de ν et connaissant d'un côté la durée d'une révolution sidérale de la Lune, durée qu'il est facile de déterminer, on pourra déterminer l'excentricité e de l'orbite lunaire et la longitude du périhélie, projetée par un procédé tout à fait analogue à celui que nous avons employé dans l'étude du Soleil. *.

Il ne nous restera plus qu'à déterminer la longueur du demi-grand axe de l'ellipse orbite, question que nous traiterons tout à l'heure.

III. *Mouvement de la ligne des nœuds et de la ligne des apsides.* — Le mouvement de la Lune s'écarte considérablement des deux lois que nous avons énoncées au paragraphe I. Le plus remarquable d'entre eux consiste dans les deux faits suivants:

1° La ligne des nœuds c'à.d. la droite qui d'intersection du plan de l'orbite avec celui de l'écliptique a un mouvement rétrograde non uniforme et décrit un angle égal à 360° en environ 18 ans et 2 tiers; la droite qui joint les nœuds ascendant et descendant se déplace sur l'écliptique dans le sens rétrograde d'un angle égal à peu à 19° 20' 30" par an en moyenne.

2° La ligne des apsides a un mouvement direct et fait un tour complet du ciel en un peu moins de 9 ans, de sorte que le périgée se déplace dans le sens direct d'un angle égal à peu près à 6' 41" par jour en moyenne.

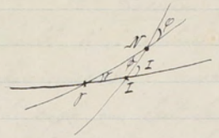
Pour se représenter l'ensemble de ces deux faits, il suffit de se figurer que le centre de la Lune se meut sur une ellipse mobile dans son plan, dans le sens direct autour de son foyer

* On trouve pour l'excentricité de l'orbite lunaire une valeur à peu près égale à 0,057, valeur beaucoup plus considérable que celle de l'excentricité de l'orbite solaire.

coïncide le plan se déplace de façon que son axe décrive autour de l'axe de l'écliptique une surface conique dans le sens rétrograde.

L'excentricité de l'orbite lunaire ainsi que l'inclinaison de son plan ne restent pas non plus constantes ; mais leur variation ne sont pas aussi considérable que celle des longitudes du nœud et du périgée.

II. – Angle du plan de l'orbite lunaire avec celui de l'équateur. – Sa variation. – Soient VN l'écliptique IV le plan de l'orbite de la lune et VI de l'équateur. Appelons I l'angle que fait IV avec le plan de l'équateur On a dans le triangle VNI.



$$-\cos I = -\cos\gamma\cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi\cos N.$$

en en remplaçant $\cos N$ par $1-2\sin^2\frac{1}{2}N$.

$$\cos I = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi + 2\sin\gamma\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}N.$$

ou encore :

$$\cos I = \cos(\gamma+\varphi) + 2\sin\gamma\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}N.$$

On voit que I est variable avec la longitude N du nœud ascendant. Cet angle est maximum quand on a $N=0$, ce qui donne $I=\gamma+\varphi$; il est minim. quand on a $N=180°$, ce qui donne $I=\gamma-\varphi$.

Comme la déclinaison de la lune est comprise entre $-I$ et $+I$, on voit que sa plus grande valeur absolue est $\gamma+\varphi$ et sa plus petite valeur absolue est $\gamma-\varphi$. Comme φ peut s'élever jusqu'à 5°17′ par son changement indépendant de celui de N, la déclinaison de la ☾ peut atteindre la valeur 23°27′ + 5°17′ = 28°44′.

A Tokio (lat = 35°41′) la solstitiale est égale à 2 droit moins la hauteur méridienne de la lune variera entre 25°33′ et 83°1′.

V. Grandes inégalités périodiques du mouvement de la lune. – A cause de l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique et de l'ellipticité

de la courbe orbite, la longitude de la lune n'est point égale à une quantité variant proportionnellement au temps, mais bien à une pareille quantité augmentée d'une série de quantités périodiques c'a d qui reproduisent les mêmes valeurs au bout de certains intervalles déterminés de temps. Mais outre ces termes périodiques dont la théorie du mouvement elliptique rend parfaitement compte, il en existe d'autres que l'on appelle inégalités séculaires et dont les principaux sont les suivants.

1° Correction qui est proportionnelle au sinus du double de la distance angulaire de la lune et du soleil diminuée de l'anomalie moyenne de la lune, c'est-à-dire l'angle que fait le rayon vecteur de la lune avec celui du périgée. De sorte que si l'on appelle D la distance angulaire de la lune et du soleil et $\mathfrak{L}$ l'anomalie moyenne de la lune, l'correction à une forme telle que

$$a \sin (2D - \mathfrak{L}).$$

Cette inégalité s'élève dans son maximum en valeur absolue à 1°25′,5 environ c'a d qu'on a a = 1°20′,5.

2° Variation qui est proportionnelle au sinus du double de la distance angulaire de la lune et du soleil, inégalité ayant pour expression

$$b \sin 2D.$$

On trouve par marche de la variation b = 36′ environ.

3° Equation annuelle proportionnelle au sinus de l'anomalie moyenne $\mathfrak{S}$ du soleil c'a d de la forme

$$c \sin \mathfrak{S}$$

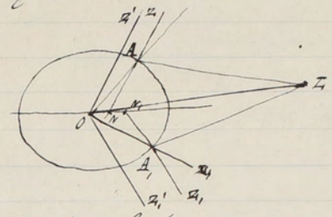
et ayant maximum c = 11′ environ.

On voit que toutes ces inégalités ont des rapports évidents avec le mouvement du soleil; et l'on conçoit aisément que leur cause intime ne pourra se découvrir qu'alors qu'on se rendra compte de la cause générale du mouvement des corps du système solaire.

La latitude de la lune est aussi affectée d'inégalités analogues à celles de sa longitude, mais beaucoup

moins considérables : nous n'en parlerons que dans la mécanique céleste.

VI. Détermination de la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune. — Soient A, A_1, deux points de la surface terrestre l'un situé dans l'hémisphère boréal et l'autre dans l'hémisphère austral, et situés l'un et l'autre sur un même méridien terrestre. Supposons que de ces deux points on ait observé les deux distances zénithales ZAZ_1, Z_1A_1Z au moment du passage de la Lune au méridien, passage qui a lieu au même instant physique pour les deux lieux, de sorte que la Lune soit au Nord du lieu A dans le lieu A_1. Si nous appelons Z et Z_1 les valeurs absolues des distances zénithales de la Lune en A et en A' et Z', Z_1' les distances apparentes; φ, φ_1 les valeurs absolues des latitudes géographiques de A et de A', et φ', φ_1' les latitudes réduites, et que nous menions par le centre de la Terre les parall. OZ', OZ_1' aux verticales des lieux A, A_1, on voit que l'on aura



$$Z + Z_1 = \varphi + \varphi_1$$

Mais si nous posons :

$$Z' - Z = \rho \qquad Z_1' - Z_1 = \rho_1$$

cette équation devient :

$$Z' - \rho + Z_1' - \rho_1 = \varphi + \varphi_1$$

ou bien

$$\rho + \rho_1 = Z' + Z_1' - (\varphi + \varphi_1)$$

Maintenant, d'après notre théorie des parallaxes nous avons :

$$\sin\rho = \text{Parall.}\ \rho\ \sin\Pi\ \sin\left[Z' - (\varphi - \varphi')\right]$$

$$\sin\rho_1 = \rho_1\ \sin\Pi\ \sin\left[Z_1' - (\varphi_1 - \varphi_1')\right]$$

Π étant la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune et ρ, ρ_1 les rayons OA, OA_1 rapportés au rayon

équatorial de la Terre. Donc si nous posons:

$$g = \Sigma' + \Sigma_1' - (\varphi + \varphi_1)$$

Nous aurons:

$$\frac{\rho \sin[\Sigma' - (\varphi+\varphi')]}{\sin \rho} = \frac{R \sin[\Sigma_1' - (\varphi_1 - \varphi')]}{\sin(\varphi - \rho)}$$

D'où

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{\rho \sin g \sin[\Sigma' - (\varphi - \varphi')]}{R \sin[\Sigma_1' - (\varphi_1 - \varphi')] + \rho \cos g \sin[\Sigma' - (\varphi + \varphi')]}$$

ou

$$\operatorname{tg}\rho_1 = \frac{\rho \sin g \sin[\Sigma_1' - (\varphi_1 - \varphi')]}{\rho \sin[\Sigma' - (\varphi + \varphi')] + R \cos g \sin(\Sigma_1' - (\varphi_1 - \varphi')]}$$

Ayant ρ ou ρ_1, on aura ϖ par l'une des deux équations précédentes qu'on mettra sous la forme:

$$\sin \varpi = \frac{\sin \rho}{\rho \sin[\Sigma' - (\varphi + \varphi')]} \qquad \sin \varpi = \frac{\sin \rho_1}{R \sin[\Sigma_1' - (\varphi_1 + \varphi')]}$$

Cette méthode a été employée en 1751, 1752 et 1753 par Lacaille et Lalande, le premier observant au cap de Bonne-Espérance et le second à Berlin. Ces deux lieux ne sont pas situés ~~tout à fait~~ exactement sur le même méridien; mais au moyen du mouvement de la Lune en déclinaison, qu'on avait déterminé préalablement avec une précision suffisante, il était facile de réduire les résultats d'observations à ce qu'ils auraient été si les deux lieux étaient sur le méridien.

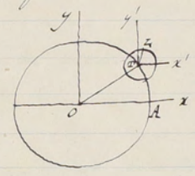
A l'aide d'un procédé analogue, Henderson a trouvé, en ~~en~~ adoptant la valeur 299,1528 pour l'aplatissement de la Terre, la valeur 57'1",80 pour la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune quand elle est à sa distance moyenne de la Terre.

VIII. - Mouvement héliocentrique de la Lune. - Le centre de la Lune se meut autour de celui de la Terre en décrivant une courbe à peu près circulaire tandis que celui-ci se meut autour du centre du Soleil sur une orbite à peu près circulaire et dont le plan est peu incliné sur le plan de l'orbite lunaire. On est porté dès-lors à conclure tout de suite que

la Lune décrit autour du Soleil une courbe dirigée



telle que la figure représente; mais nous allons démontrer que l'orbite héliocentrique de la Lune ne présente aucun point d'inflexion et qu'elle tourne constamment sa concavité vers le Soleil. — Supposons, pour plus de simplicité que le mouvement héliocentrique de la Terre et le mouvement géocentrique de la Lune sont tous les deux circulaires & uniformes et que les plans des deux cercles se confondent, hypothèses qui ne sont pas trop éloignées de la réalité. — Soit OA l'orbite terrestre et A la position de la Terre quand la Lune est à une des oppositions; a, a' les rayons OA, TA de l'orbite terrestre et de l'orbite de la Lune autour de la T; n & n' les moyens mouvements de ces deux astres autour de leurs centres respectifs de mouvement. En prenant deux axes rectangulaires Ox (dans la direction OA) & Oy et menant Tx', Ty' parallèles à Ox, Oy, T étant la position de la T à l'époque t comptée à partir de l'opposition de la T. On voit que l'on aura pour les coord. x,y de la Lune T par rapport à Ox & Oy:



$$x = a\cos nt + a'\cos n't$$
$$y = a\sin nt + a'\sin n't.$$

Si le lieu des points x,y a un point d'inflexion, ce point devra satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = 0.$$

Or on a:

$$dx = -(an\sin nt + a'n'\sin n't)\,dt$$
$$dy = (an\cos nt + a'n'\cos n't)\,dt$$
$$d^2x = -(an^2\cos nt + a'n'^2\cos n't)\,dt^2$$
$$d^2y = -(an^2\sin nt + a'n'^2\sin n't)\,dt^2.$$

On devra donc avoir:

$(an^2\cos nt + a'n'^2\cos n't)(an^2\sin nt + a'n'^2\sin n't) + (an\sin nt + a'n'\sin n't)(an^2\cos nt + a'n'^2\cos n't)$
$= 0$

c'est-à-dire

$$a^2n^3 + a'^2n'^3 + aa'nn'^2\cos(n-n')t + aa'n'n^2\cos(n'-n)t = 0.$$

ou

$$\cos(n'-n)t = -\frac{a^2n^3 + a'^2n'^3}{aa'nn'(n+n')}.$$

Pour que t donné par cette éq. soit réel, il faut que le second membre soit < 1, c'est-à-dire que

$$a^2n^3 + a'^2n'^3 < aa'nn'(n+n').$$

Posons:

$$\frac{a}{a'} = A \qquad \frac{n'}{n} = B.$$

la condition devient:

$$A^2 + B^3 < AB(1+B)$$

ou enfin

$$(B-A)(A-B^2) > 0.$$

Or pour la Lune, on a à peu près

$$\frac{a}{a'} = A = 400 \qquad \frac{n'}{n} = B = 13.$$

donc $B - A < 0$ et $A - B^2 > 0$, par conséquent l'inégalité précédente est impossible, et par suite il n'y a pas de point d'inflexion.

Comme au voisinage de l'opposition de la $\mathcal{C}$, la courbe que nous considérons porte toujours sa concavité vers le Soleil, comme cela est facile à démontrer, il en est constamment de même, puisqu'il n'y a pas d'inflexion.

X. Etude du mouvement de translation des Planètes.

I. Lois de Kepler. – Le mouvement des planètes autour du Soleil suit à peu près les trois lois de Kepler :

1re Le centre de chaque planète décrit autour du centre du Soleil une courbe plane de manière que le rayon vecteur qui va du centre du Soleil à celui de la planète décrive des aires égales en des intervalles de temps égaux.

2e L'orbite de chaque planète est une ellipse dont un des foyers se trouve au centre du Soleil.

3e Le rapport du carré d'une révolution d'une planète autour du Soleil, au cube du grand axe de son orbite elliptique est un nombre constant pour toutes les planètes.

Nous donnerons bientôt un moyen de vérifier ces trois lois dont la découverte a coûté à Kepler de longues années de travaux assidus. Pour le moment, nous allons donner le moyen de calculer la position d'une planète à une époque donnée quelconque à l'aide des éléments de cette planète supposés connus.

Les éléments d'une planète sont

1e La longitude Ω du nœud ascendant de son orbite Θ,

2e L'inclinaison du plan de l'orbite sur celui de l'écliptique, φ.

3e La longitude du périhélie ϖ que nous définirons tout à l'heure.

4e L'excentricité de l'ellipse orbite e

5e Son demi-grand axe a

6e La longitude de la planète à une époque donnée prise pour origine des temps ou longitude de l'époque ε que nous définirons tout à l'heure

Les deux premiers de ces 6 quantités déterminent

la position du plan de l'orbite dans l'espace, les 2 suivantes fixent la position de l'orbite dans son plan ainsi que la forme et la grandeur de cette ellipse. La dernière quantité détermine la position de la planète à l'origine des temps en sa position initiale et la troisième loi de Kepler fournissant le moyen mouvement de la planète on aura tout ce qu'il faut pour déterminer le mouvement elliptique de la planète considérée.

Appelons en effet T la durée d'une révolution de la planète autour du Soleil; alors son moyen mouvement n sera égal à $\frac{2\pi}{T}$; c'est.

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad \text{ou} \quad n = \frac{2\pi}{T}$$

et d'après la 3e loi de Kepler la quantité

$$\frac{a^3}{T^2} \quad \text{ou} \quad n^2 a^3$$

sera une quantité dont la valeur est la même pour toutes les planètes; en appelant donc n' et a' le moyen mouvement du Soleil et le demi-grand axe de l'orbite terrestre on aura:

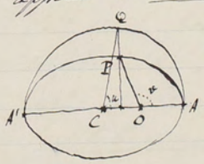
$$(1) \qquad n^2 a^3 = n'^2 a'^3$$

d'où

$$n^2 = n'^2 : \left(\frac{a}{a'}\right)^3.$$

Si donc on connaît la valeur de a rapporté à a' comme unité de longueur, on connaîtra n.

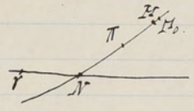
II. Position de la planète dans son orbite. - On appelle l'anomalie vraie d'une planète à un instant donné l'angle que forme son rayon vecteur tiré du centre du Soleil avec le rayon vecteur qui va à l'aphélie de l'orbite la planète, c'est à dire à son périhélie, cet angle étant compté positivement dans le sens du mouvement. Nous représenterons l'anomalie vraie par v.



Décrivons le cercle AEA' ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse et menons par la position actuelle P de la planète une perpendiculaire PE à

AA', droite qui rencontre en Q la circonférence qui se trouve du même côté que P du diamètre AA'. L'angle que fait la droite CQ qui va du centre de l'ellipse au point Q fait avec CA, et compté positivement dans le sens du mouvement de la planète s'appelle l'anomalie excentrique de la planète; nous la désignerons par u.

Maintenant soit γN l'écliptique sur une sphère ayant son centre au centre du Soleil. NΠ le grand cercle déterminé par le plan de l'orbite, Σ la perspective du point P et Π celle du point A. On appelle longitude de la planète dans son orbite la somme des arcs γN et NΠ, γ étant le point vernal et N le nœud ascendant de l'orbite. Nous représenterons cette longitude par Σ.



On appelle longitude du périhélie la somme des arcs γN et NΠ. Nous la représenterons par ϖ.

D'après ces définitions, il est clair qu'on aura

(2) $\quad v = \Sigma - \varpi.$

Concevons maintenant un astre fictif qui partant du point Π en même temps que la planète se mouvait dans le même sens de façon que son rayon vecteur décrive des angles égaux en des temps égaux et qui revienderait en Π en même temps que la planète considérée. Soit Σ₀ la position de cet astre fictif à l'époque considérée. L'anomalie vraie et la longitude de ce point Σ₀ s'appelle l'anomalie moyenne et la longitude moyenne de la planète au moment considéré. Nous représenterons ces deux quantités par ζ et Σ₀.

Nous aurons alors:

(3). $\quad \zeta = \Sigma_0 - \varpi$

La longitude moyenne ε à l'origine des temps est ce qu'on appelle longitude de l'époque.

On aura évidemment

(4) $\quad L_0 = \varepsilon + nt$

et par suite

(5) $\quad \zeta = nt + \varepsilon - \varpi$

Tout ce que nous avons dit dans le chapitre II relativement aux anomalies du Soleil, sera ici applicable et nous aurons les formules suivantes :

(6) $\quad u - e\sin u = \zeta$

(7) $\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{v}{2} = \sqrt{1+e}\,\sin\frac{u}{2} \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{1-e}\,\cos\frac{u}{2} \end{cases}$

r étant la longueur du rayon vecteur héliocentrique

(8) $\quad r = a(1 - e\cos u)$

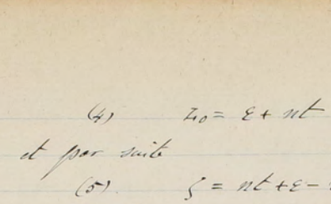
(9) $\quad \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$

(10) $\quad \begin{cases} \frac{r}{a}\tan v = \sqrt{1-e^2}\sin u \\ \frac{r}{a}\cos v = \cos u - e \end{cases}$

Si nous nous proposons, étant donné t, de calculer l'anomalie vraie v et le rayon vecteur r, toute la difficulté se réduira à résoudre l'arg log. transcendante (6). Discutons cette équation.

Pour cela prenons deux axes rectangulaires Ou et Oz. et construisons la courbe ayant pour équation

$$z = u - e\sin u.$$



On a

$$\frac{dz}{du} = 1 - e\cos u$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = e\sin u.$$

et l'on a le tableau suivant des valeurs particulières :

u	z	$\frac{dz}{du}$	$\frac{d^2z}{du^2}$.
0	0	$1-e$	$+0$
~~$\frac{1}{2}$~~ π	π	$1+e$	0
2π	2π	$1-e$	0.

La courbe a donc la forme indiquée par la figure et notre équation (6) n'a qu'une seule racine.

Comme e est généralement très-petit, une première valeur de u est ζ et l'on aura ensuite

différentes

Il y a un critérium qui peut décider que la valeur de δu est suffisante. En effet, on a l'éq. complète.

$$0 = u_0 - \frac{e}{\sin 1''} \sin u_0 - \zeta + (1 - e\cos u_0)\delta u + \tfrac{1}{2} e \sin u_0 (\delta u^2 \sin 1'')$$

D'où

$$\delta u = -\frac{u_0 - \frac{e}{\sin 1''}\sin u_0 - \zeta}{1 - e\cos u_0} - R$$

$$R = \tfrac{1}{2} e \frac{\sin u_0}{1 - e\cos u_0} (\delta u^2 \sin 1'')$$

Le maximum de R est

$$R = \tfrac{1}{2} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} (\delta u^2 \sin 1'').$$

avec pour 1ère approximation

$$u = \zeta + e \sin \zeta.$$

ou en exprimant tout en secondes:

$$u = \zeta + \frac{e}{\sin 1''} \sin \zeta.$$

Ensuite si l'on pose:

$$f(u) = u - e \sin u - \zeta.$$

on aura:

$$f'(u) = 1 - e \cos u$$

Donc en négligeant le carré de δu

$$f(u_0 + \delta u) = u_0 - e \sin u_0 - \zeta + (1 - e\cos u_0)\delta u$$

Donc en exprimant tout en secondes, on aura pour calculer une 1ère valeur approchée de la correction δu, en développant l'équation

$$0 = u_0 - \frac{e}{\sin 1''} \sin u_0 - \zeta + (1 - e\cos u_0)\delta u.$$

on tire

$$\delta u = -\frac{u_0 - \frac{e}{\sin 1''}\sin u_0 - \zeta}{1 - e\cos u_0} \quad *$$

Si cette correction n'est pas suffisamment exacte on recommencera le calcul avec la valeur corrigée de u et ainsi de suite.

III. Développement du rayon vecteur et de l'anomalie vraie. — La série de Lagrange appliquée à une fonction $\varphi(u)$ donne:

$$F(u) = F(\zeta) + \frac{e}{1}\sin\zeta F'(\zeta) + \frac{e^2}{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}\left(\sin^2\zeta F'(\zeta)\right) + \cdots + \frac{e^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left[\sin^n\zeta F'(\zeta)\right]$$

et comme on a:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e\cos u + e^2\cos^2 u.$$

ce que Σ^e entre dans l'expression de $\frac{dF}{d\zeta}$

il nous faut calculer les développements de $\cos u$ et $\cos^2 u$.

Nous avons en faisant $F(u) = \cos u$, $\cos^2 u$:

$$\cos u = \cos\zeta - \frac{e}{1}\sin^2\zeta - \frac{e}{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}\sin^3\zeta - \cdots - \frac{e^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\sin^n\zeta\cos\zeta - \cdots$$

$$\cos^2 u = \cos^2\zeta - \frac{e}{1}\sin^2\zeta\cos\zeta - \frac{e}{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}\left(\sin^3\zeta\cos\zeta\right) - \cdots - \frac{e^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\sin^{n+1}\zeta\cos\zeta\right) - \cdots$$

et comme on a

$$\cos^2\zeta = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\zeta \qquad \sin^2\zeta\cos\zeta = \tfrac{1}{2}\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\cos^2\zeta\cos\zeta = \tfrac{1}{2}\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\cos 2\zeta$$

$$= \tfrac{1}{2}\cos\zeta - \tfrac{1}{4}\cos\zeta - \tfrac{1}{4}\cos 3\zeta = \tfrac{1}{4}\cos\zeta - \tfrac{1}{4}\cos 3\zeta.$$

la dernière formule prendra l'écrire:

$$\cos^2 u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\zeta - \frac{e}{1}\left(\tfrac{1}{4}\cos\zeta - \tfrac{1}{4}\cos 3\zeta\right) - \frac{e}{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}\left(\sin^3\zeta\cos\zeta\right) - \cdots - \frac{e^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\sin^{n+1}\zeta\cos\zeta\right) - \cdots$$

Cette formule permet de trouver tout de suite le développement du rayon vecteur en fonction de ℓ, car on a

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u$$

et il nous suffit de développer $\cos u$. Or si on a

$$F(\alpha) = \cos u \qquad F(\zeta) = \cos\zeta \qquad F'(\zeta) = -\sin\zeta.$$

Donc :

$$\cos u = \cos\zeta - \frac{e}{1}\sin^2\zeta - \frac{e^2}{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}\sin^2\zeta - \frac{e^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2}{d\zeta^2}\sin^2\zeta - \cdots - \frac{e^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}}\sin^{n+1}\zeta - \cdots$$

Il nous faut calculer $\frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}}\sin^{n+1}\zeta$. En appelant e la base des logarithmes néperiens, on a

$$2i\sin\zeta = e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}$$

d'où

$$(a)\qquad 2^{n+1}i^{n+1}\sin^{n+1}\zeta = e^{(n+1)\zeta i} - \frac{n+1}{1}e^{(n-1)\zeta i} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}e^{(n-3)\zeta i} - \cdots + (-1)^{n+1}e^{-(n+1)\zeta i}$$

En différentiant $n+1$ fois, il vient :

$$2^{n+1}i^{n+1}\frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}}\sin^{n+1}\zeta = i^{n+1}\left\{(n+1)^{n+1}e^{(n+1)\zeta i} - \frac{n+1}{1}(n-1)^{n+1}e^{(n-1)\zeta i} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}(n-3)^{n+1}e^{(n-3)\zeta i} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)\zeta i}\right\}.$$

ou en remarquant que

$$i^{n+1}\cdot i^{n+1} = i^{2n} = 1 \qquad (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = (-1)^{2n} = +1.$$

et remplaçant les exponentielles par des cosinus :

$$(b)\qquad -2^n\frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}}\sin^{n+1}\zeta = (n+1)^{n+1}\cos(n+1)\zeta - \frac{n+1}{1}(n-1)^{n+1}\cos(n-1)\zeta + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}(n-3)^{n+1}\cos(n-3)\zeta - \cdots$$

Si n est pair, il n'y a pas le terme indépendant de ζ dans (b), par suite pas de terme ne contenant pas $\cos\zeta$. Si n est impair, il y a au milieu de (a) un terme ne contenant pas ζ, ce terme disparaît dans la $(n+1)^{\text{ème}}$ différentiation donc dans (b) pas le terme constant non plus.

En substituant, on aura :

$$\cos u = \cos\zeta - \frac{e}{1}\left(\sin\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\cos 2\zeta\right) + \sum_{4}^{\infty}\frac{e^n}{2\cdot 3\cdots n}\left\{(n+1)^{n-1}\cos(n+1)\zeta - \cdots\right\}$$

ou

$$= -\frac{e}{2} + \cos\zeta + \sum_{2}^{\infty}\frac{e^n}{2\cdot 3\cdots n}\left\{(n+1)^{n-1}\cos(n+1)\zeta - \frac{n+1}{1}(n-1)^{n-1}\cos(n-1)\zeta + \cdots\right\}.$$

Par suite :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + \cdots - e\cos\zeta + \sum_{2}^{\infty}\frac{e^{n+1}}{2\cdot 3\cdots n}\left\{(n+1)^{n-1}\cos(n+1)\zeta - \frac{n+1}{1}(n-1)^{n-1}\cos(n-1)\zeta + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}(n-3)^{n-1}\cos(n-3)\zeta - \cdots\right\}$$

En effectuant jusqu'aux termes du $5^{\text{ième}}$ ordre en e, on trouve :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e\cos\zeta - \frac{e^2}{2}\cos 2\zeta - \frac{e^3}{8}\left[3\cos 3\zeta - 3\cos\zeta\right] - \frac{e^4}{48}\left(16\cos 4\zeta - \tfrac{16}{3}\cos 2\zeta\right)$$
$$- \frac{e^5}{384}\left(125\cos 5\zeta - 135\cos 3\zeta + 10\cos\zeta\right) - \cdots$$

ou en ordonnant par rapport aux cosinus : $\frac{125}{128}e^5$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \left(e - \tfrac{3}{8}e^3 + \tfrac{5}{192}e^5 \cdots\right)\cos\zeta - \left(\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{3}e^4 + \cdots\right)\cos 2\zeta - \left(\tfrac{3}{8}e^3 - \cdots\right)\cos 3\zeta - \left(\tfrac{1}{4}e^4 - \cdots\right)\cos 4\zeta$$
$$- \left(\tfrac{125}{384}e^5 - \cdots\right)\cos 5\zeta - \cdots$$

Cherchons maintenant le développement de v. Pour cela formons l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

En posant

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} - 1}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} + 1}$$

nous aurons d'après une formule connue :

$$\frac{v}{2} = \frac{u}{2} + \frac{1}{1\cdot 2}\lambda\sin u + \frac{1}{2\cdot 3}\lambda^2\sin 2u + \frac{\lambda^3}{3\cdot 4}\sin 3u + \cdots$$

c'est-à-dire

$$v = u + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m}\sin mu. \qquad (1)$$

Il nous faut donc développer u, suivant les λ^m.

On a d'abord

$$u = \zeta + \frac{\varepsilon}{1}\sin\zeta + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}\sin^2\zeta + \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2}{d\zeta^2}\sin^3\zeta + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\sin^n\zeta + \cdots \qquad (a)$$

or en remplaçant dans l'éq. (a) $n+1$ par n, on a :

$$2^n\sin^n\zeta = e^{n\zeta i} - \frac{n}{1}e^{(n-2)\zeta i} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{(n-4)\zeta i} - \cdots + (-1)^n e^{-n\zeta i} \qquad (c)$$

J'ai eu soin d'ordonner différemment $n-1$ fois

$$2^n\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\sin^n\zeta = i^{n-1}\left\{n^{n-1}e^{n\zeta i} - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1}e^{(n-2)\zeta i} + \cdots + (-1)^n 0^{n-1}e^{-n\zeta i}\right\}$$

Réunissons en bien

$$2^{n-1}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\sin^n\zeta = n^{n-1}\sin n\zeta - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1}\sin(n-2)\zeta + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-1}\sin(n-4)\zeta - \cdots$$

sera et il faut remarquer qu'il n'y a pas de terme constant

On aura donc :

$$u = \zeta + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{2\cdot 4\cdots 2n}\left\{n^{n-1}\sin n\zeta - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1}\sin(n-2)\zeta + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-1}\sin(n-4)\zeta - \cdots\right\}. \qquad (2)$$

Nous avons exécuté, en posant

$$F(u) = \frac{1}{2\pi}\sin mu \qquad F'(\zeta) = \cos m\zeta$$

$$\frac{\sin mu}{m} = \frac{\sin m\zeta}{m} + \frac{\varepsilon}{1}\sin\zeta\cos m\zeta + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}(\sin^2\zeta\cos m\zeta) + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left[\sin^n\zeta\cos m\zeta\right] + \cdots$$

Multiplions l'éq. (c) par celle-ci

$$2\cos m\zeta = e^{m\zeta i} + e^{-m\zeta i}.$$

nous aurons :

$$e^{(m+n)\zeta i} - \frac{n}{1}e^{(m+n-2)\zeta i} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{(m+n-4)\zeta i} - \cdots + (-1)^n e^{(m-n)\zeta i}$$

$$2^{n+1}i^n\sin^n\zeta\cos m\zeta = + e^{(m-n)\zeta i} - \frac{n}{1}e^{-(m-n+2)\zeta i} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{-(m-n+4)\zeta i} - \cdots + (-1)^n e^{-(m+n)\zeta i}.$$

J'ai eu à différentier $m-1$ fois :

$$2^n i^n\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}(\sin^n\zeta\cos m\zeta) = (m+n)^{n-1}e^{(m+n)\zeta i} - \frac{n}{1}(m+n-2)^{n-1}e^{(m+n-2)\zeta i} + \cdots + (-1)^n(m-n)^{n-1}e^{(m-n)\zeta i}$$
$$+ (-1)^{n+1}e^{-(m-n)\zeta i} - \frac{n}{1}(-1)^{n-1}(m-n+2)^{n-1}e^{-(m-n+2)\zeta i} + \cdots \mp (m+n)^{n-1}e^{-(m+n)\zeta i}.$$

ou bien

$$2^n\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}(\sin^n\zeta\cos m\zeta) = (m+n)^{n-1}\sin(m+n)\zeta - \frac{n}{1}(m+n-2)^{n-1}\sin(m+n-2)\zeta + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(m+n-4)^{n-1}\sin(m+n-4)\zeta - \cdots + (-1)^n(m-n)^{n-1}\sin(m-n)\zeta.$$

On aura donc :

(3). $\frac{1}{m}\sin m\alpha = \frac{1}{m}\sin\alpha\cos^m\alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\varepsilon^m}{1\cdot 2\cdots 2n}\Big\{(m+n)^{n-1}\sin(m+n)\alpha - \frac{n}{1}(m+n-2)^{n-1}\sin(m+n-2)\alpha$
$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(m+n-4)^{n-1}\sin(m+n-4)\alpha] - \cdots + (-1)^n(m-n)^{n-1}\sin(m-n)\alpha\Big]\Big\}$.

Procédons maintenant au développement de λ^m. On a:

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{(1+\varepsilon)-(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)+2\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Posons:

$$\varepsilon = 1+\sqrt{1-\varepsilon^2} \quad \text{alors :} \quad \lambda^m = \frac{\varepsilon^m}{\varepsilon^m}.$$

il nous suffit donc de développer $\frac{1}{\varepsilon^m}$ c'est à dire ε^{-m}. Or on a:

$$(\varepsilon-1)^2 = 1-\varepsilon^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$$

c'est à dire.

$$\varepsilon = 2 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}.$$

Si l'on considère l'éq.

$$\varepsilon = x - \varepsilon^2\varepsilon^{-1}$$

on pourra développer ε^{-m} en fonction de ε par la formule de Lagrange et en y faisant ensuite $x=2$, nous aurons le développement que nous cherchons. On a ici

$$f(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \quad f(x) = x^{-1} \quad F(\varepsilon) = \varepsilon^{-m} \quad F(x) = -mx^{-(m+1)}.$$

On aura donc:

$$\varepsilon^{-m} = x^{-m} + \frac{\varepsilon^2}{1}mx^{-(m+2)} - \frac{\varepsilon^4}{1\cdot 2}\frac{d}{dx}mx^{-(m+3)} + \cdots + (-1)^n\frac{\varepsilon^{2n}}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(mx^{-(m+n+1)}\right) + \cdots$$

Or on a:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(mx^{-(m+n+1)}\right) = m(-1)^{n-1}(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)\cdots x^{-(m+2n)}$$

Donc on aura:

$$\frac{1}{\varepsilon^m} = \frac{1}{2^m} + \frac{m\varepsilon^2}{1\cdot 2^{m+2}} + m\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(m+n+1)(m+n+2)\cdots(m+2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\frac{\varepsilon^{2n}}{2^{m+2n}}$$

et par suite:

$$(4)\qquad \lambda^m = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^m + m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m+2} + m\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(m+n+1)(m+n+2)\cdots(m+2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m+2n}.$$

Les formules (1), (2), (3), (4) fournissent tout ce qu'il faut pour développer ν jusqu'aux termes d'un ordre quelconque.

Proposons-nous par exemple de calculer le développement de ν jusqu'au 5ième ordre. Il faut d'abord calculer u jusqu'au 5ième ordre; ensuite comme λ^m est du même ordre, il suffit de calculer $\sin 4\nu$ jusqu'au 0 ordre $\sin 3\nu$ jusqu'au 1er ordre, $\sin 2\nu$ jusqu'au 2e ordre et ainsi de suite $\sin\nu$ jusqu'au 4e ordre. — On a d'abord:

$$u = \zeta + \frac{\varepsilon}{2}\sin\zeta + \frac{\varepsilon^2}{8}\sin 2\zeta + \frac{\varepsilon^3}{24}(6\sin 3\zeta - 3\sin\zeta) + \frac{\varepsilon^4}{192}(64\sin 4\zeta - 32\sin 2\zeta)$$
$$+ \frac{\varepsilon^5}{1920}(3525\sin 5\zeta - 405\sin 3\zeta + 10\sin\zeta) + \cdots$$

c'à d.

$$u = \zeta + (e - \tfrac{1}{8}e^3 + \tfrac{1}{192}e^5 - \dots)\sin\zeta + (\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{6}e^4 + \dots)\sin 2\zeta + (\tfrac{3}{8}e^3 - \tfrac{27}{128}e^5 + \dots)\sin 3\zeta$$
$$+ (\tfrac{1}{3}e^4 - \dots)\sin 4\zeta + (\tfrac{125}{384}e^5 - \dots)\sin 5\zeta + \dots$$

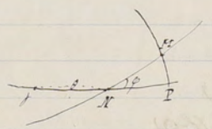
En y ajoutant les termes provenant de la 2e partie, dont le calcul est un peu long quoiqu'il ne présente aucune difficulté, on trouvera

$$v = \zeta + (2e - \tfrac{1}{4}e^3 + \tfrac{5}{96}e^5 - \dots)\sin\zeta + (\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{24}e^4 + \tfrac{17}{192}\dots)\sin 2\zeta$$
$$+ (\tfrac{13}{12}e^3 - \tfrac{43}{64}e^5)\sin 3\zeta + (\tfrac{103}{96}e^4 - \dots)\sin 4\zeta + (\tfrac{1097}{960}e^5 - \dots)\sin 5\zeta + \dots$$

L'ensemble des termes qui suivent le premier c'à d la différence $v - \zeta$ entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne s'appelle l'<u>équation du centre</u> de la planète.

Une fois que l'on connaît v, on aura en y ajoutant la longitude du périhélie ϖ, la longitude π de la planète dans son orbite. Nous allons en déduire sa longitude proprement dite λ et sa latitude.

IV. Coordonnées écliptiques héliocentriques. — Reprenons la figure du paragraphe I, et soit P le point où le pied de l'arc NP perpendiculaire à l'écliptique dans une sphère ayant son centre au centre du Soleil. Soient $\Upsilon\Omega = \ell$ $\Upsilon P = l$ la longitude et la latitude de la planète. Dans le triangle $\Upsilon\Omega P$, on a :



$$(1) \qquad \operatorname{tg}(\ell - \theta) = \operatorname{tg}(\pi - \theta)\cos\varphi$$
$$(2) \qquad \sin l = \sin(\pi - \theta)\sin\varphi$$

et comme $\ell - \theta$ et $\pi - \theta$ sont en même temps plus grands ou plus petits que 180°, la 1re formule donnera ℓ et la seconde l.

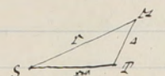
La quantité $\pi - \theta$ est souvent appelée l'<u>argument de la latitude</u>

Comme l'inclinaison φ est généralement très-petite, $\cos\varphi$ est très-voisin de 1. On aura donc en développant

$$\ell = \pi - \operatorname{tg}^2\tfrac{\varphi}{2}\sin 2(\pi - \theta) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^4\tfrac{\varphi}{2}\sin 4(\pi - \theta) - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^6\tfrac{\varphi}{2}\sin 6(\pi - \theta) + \dots$$

La quantité $\ell - \pi$ qu'il faut ajouter à π pour obtenir ℓ s'appelle la <u>réduction à l'écliptique</u>.

V. Coordonnées géocentriques. — Ayant ainsi les coord. héliocentriques de la planète, nous allons calculer ses coordonnées géocentriques c'à.d celles qu'on observerait si l'on était au centre de la Terre. Soient S, T, Z les positions du Soleil, de la Terre et de la planète à une époque quelconque.



Par S et par T menons deux systèmes d'axes rectang. parallèles entre eux, l'axe des x étant dirigé vers le point vernal, celui des y au point de longitude $90°$ et celui des z vers le pôle boréal de l'écliptique. Soient l', λ' les coord. géoc. cherchées, ρ, Δ la distance TZ, ρ le rayon vecteur de la Terre et $\odot$ sa longitude. Nous aurons

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta\cos\lambda'\cos l' = r\cos\lambda\cos l - \rho\cos\odot & -x & \cos l & -z & \cos\beta \\ \Delta\cos\lambda'\sin l' = r\cos\lambda\sin l - \rho\sin\odot & \cos x & & \cos z & \\ \Delta\sin\lambda' = r\sin\lambda & & & & \end{cases}$$

Les deux premières formules peuvent être mises sous les deux formes suivantes souvent utiles:

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta\cos\lambda'\sin(l-\odot) = \rho\sin(\odot-\beta) \\ \Delta\cos\lambda'\cos(l-\odot) = r\cos\lambda - \rho\cos(l-\beta) \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta\cos\lambda'\sin(l'-\beta) = r\cos\lambda\sin(l-\beta) \\ \Delta\cos\lambda'\cos(l'-\beta) = r\cos\lambda\cos(l-\beta) - \rho \end{cases}$$

Si nous appelons $\odot$ la longit. du Soleil, nous aurons évidemment $\beta = \odot \pm 180°$ et les éq. (3) peuvent s'écrire.

$$(3')\quad \begin{cases} \Delta\cos\lambda'\sin(l'-\odot) = r\cos\lambda\sin(l-\odot) \\ \Delta\cos\lambda'\cos(l'-\odot) = \rho + r\cos\lambda\cos(l-\odot) \end{cases}$$

Ce sont là des formules qui donnent l'élongation de la Planète du Soleil c'à.d la distance angulaire de ces deux astres.

Ayant calculé ainsi les coord. écliptiques géocentriques de la planète, on passera de là à ses coordonnées équatoriales par le procédé ordinaire.

VI. Détermination approchée de la longitude du nœud. — Nous allons maintenant expliquer comment on peut déterminer en premier système de valeurs approchées

$$\begin{cases} \Delta\cos\lambda'\sin(l-\odot) = r\cos\lambda\sin(l-\odot) \\ \Delta\cos\lambda'\cos(l-\odot) = \rho\cos\Lambda + r\cos\lambda\cos(l-\odot) \\ \Delta\sin\lambda' = r\sin\lambda + \rho\sin\Lambda \end{cases}$$

$\Delta\cos\lambda' = \Delta_1 \quad r\cos\lambda = \Sigma_1 \quad \rho\cos\Lambda = \rho_1$

$$\begin{cases} \Delta_1\sin(l'-\odot) = \Sigma_1\sin(l-\odot) \\ \Delta_1\cos(l'-\odot) = \rho_1 + \Sigma_1\cos(l-\odot) \end{cases}$$

$$\Delta_1\zeta\lambda' = \Sigma_1\zeta\lambda + \rho_1\zeta\Lambda$$

$$\Delta_1\zeta\lambda'_0 = \Sigma_1\zeta\lambda$$

$$d\lambda' = \left(\frac{\rho}{\Delta}\cos^2\lambda'\right)\varkappa^{(0)}\Lambda$$

$$\lambda = \lambda'_0 + \Lambda\frac{\rho}{\Delta_1}\cos\lambda'$$

des éléments d'une planète. Nous commencerons par la longitude du nœud ascendant.

Supposons qu'on ait enregistré des observations faites des ascensions droites et des déclinaisons de la planète et que l'on en ait déduit un tableau des longitudes et latitudes géocentriques. Cherchons dans ce tableau une époque où la latitude s'annule et passe du négatif au positif. Alors d'après l'éq. $\Delta\sin\lambda = \cos\lambda$, la latitude héliocentrique est nulle et la planète se trouve à son nœud ascendant; soit $\odot$ sa longitude géocentrique à cette époque, et $\mathfrak{T}$ la longitude de la Terre.

La première des éq. (2) du paragraphe précédent donnera:

$$\Delta\cos(\odot - \mathfrak{T}) = \rho \Sigma \sin(\Omega - \mathfrak{T})$$

et la 1ère des éq. (2)

$$\Delta\sin(\odot - \Omega) = \rho\cos(\Omega - \mathfrak{T}).$$

On en tire:

$$\frac{\cos(\odot - \Omega)}{\sin(\odot - \mathfrak{T})} = \frac{\rho}{\Sigma}.$$

Cherchons à maintenant l'époque prochaine du passage de la planète par son nœud ascendant, en accentuant les lettres qui se rapportent à cette seconde époque. Nous aurons:

$$\frac{\cos(\odot' - \Omega)}{\sin(\odot' - \mathfrak{T}')} = \frac{\rho'}{\Sigma'}.$$

On aura donc,

$$\frac{\sin(\odot' - \Omega)}{\sin(\odot - \Omega)} = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\sin(\odot' - \mathfrak{T}')}{\sin(\odot - \mathfrak{T})}.$$

Tout est connu excepté Ω. On aura donc Ω par cette équation. Pour résoudre commodément cette équation appelons λ le second membre qui est connu c'est à dire

$$\lambda = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\sin(\odot' - \mathfrak{T}')}{\sin(\odot - \mathfrak{T})}$$

On aura

$$\frac{\sin(\odot' - \Omega) - \sin(\odot - \Omega)}{\sin(\odot' + \Omega) + \sin(\odot - \Omega)} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

ou

$$\frac{\cos\left(\frac{\odot + \odot'}{2} - \Omega\right)\sin\left(\frac{\odot' - \odot}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\odot' + \odot}{2} - \Omega\right)\sin\left(\frac{\odot' - \odot}{2}\right)}$$

$$\frac{\sin(\lambda+\theta)+\sin(\lambda'-\theta)}{\sin(\lambda+\theta)-\sin(\lambda'-\theta)} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}.$$

ou

$$\frac{\sin\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\lambda-\lambda'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}-\theta\right)\sin\left(\frac{\lambda-\lambda'}{2}\right)} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

c'à d.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}-\theta\right) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\operatorname{tg}\frac{\lambda-\lambda'}{2}.$$

formule qui donnera θ.

VII.- Détermination de l'inclinaison de l'orbite.- Maintenant que nous connaissons la quantité θ, donnée dans la table du Soleil l'époque où la longitude de la Terre est égale à θ. La Terre se trouve alors sur la ligne des nœuds; soit λ' la latitude géocentrique de la planète à cette époque. La dernière formule (1) et la 1ère formule (3) donnent.

$$\Delta \sin\lambda' = r \sin\lambda$$

$$\Delta \cos\lambda \sin(\lambda-\theta) = r \cos\lambda \sin(\lambda-\theta)$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tg}\lambda'}{\sin(\lambda-\theta)} = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin(\lambda-\theta)}$$

Mais dans le triangle $\gamma N 2$, on a:

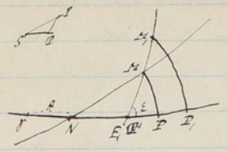
$$\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin(\lambda-\theta)} = \operatorname{tg}\varphi$$

on aura donc:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\lambda'}{\sin(\lambda-\theta)}.$$

Remarque.- Une fois qu'on a déterminé r et φ les autres éléments se détermineront, comme nous allons le voir avec une grande facilité. Mais par la méthode précédente, il faut attendre certaines époques particulièrement favorables à notre détermination. Gauss a donné le premier une méthode qui permet de déduire tous les éléments à l'aide de trois observations complètes faites dans à des époques quelconques. Nous en parlerons dans la 4e année.

VIII.- Détermination de l'argument de la latitude et du rayon vecteur héliocentrique par l'observation. - Soit r le rayon héliocentrique de la planète à une époque quelconque c'à d la perspective de la planète pour un observateur placé au centre du Soleil.



et soit ΣE le lieu héliocentrique de la Terre à la même époque. Menons par le centre du soleil une parallèle à la droite qui va du centre de la Terre à la planète. Cette droite percera la sphère céleste en un point Σ_1 qui sera évidemment situé sur le grand arc $E\Sigma$. Menons par Σ_1 un arc de grand arc $\Sigma_1 D$ perpendiculaire à l'écliptique. On aura évidemment $\Sigma_1 D_1 = \lambda' - \lambda = l'$.

Dans le triangle $\Sigma_1 D E$ nommons ε l'angle $\Sigma_1 E D$, nous aurons

$$tg\,\varepsilon = \frac{tg\,l'}{\sin(\delta - \beta)}$$

$$\cos \Sigma_1 E = \cos N \cos(\delta - \beta)$$

équations qui permettent de calculer ε & $\Sigma_1 E$.

Ensuite dans le triangle $\Sigma N E$, on a.

$$\Sigma N E = \varphi \qquad \Sigma E N = 180° - \varepsilon \qquad NE = \delta - \delta.$$

et en appliquant les analogies de Neper, on aura.

$$tg\,\frac{\Sigma N + \Sigma E}{2} = tg\,\frac{\delta - \delta}{2}\,\frac{\sin\frac{\varepsilon + \varphi}{2}}{\sin\frac{\varepsilon - \varphi}{2}}$$

$$tg\,\frac{\Sigma N - \Sigma E}{2} = tg\,\frac{\delta - \delta}{2}\,\frac{\cos\frac{\varepsilon + \varphi}{2}}{\sin\frac{\varepsilon - \varphi}{2}}$$

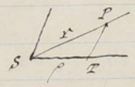
formules qui permettent de calculer ΣN & ΣE.

On a évidemment

arc de la latitude $= L - \delta = \Sigma N$.

Ensuite on voit aisément

$$P\Sigma S = 180° - \Sigma_1 E \qquad S\Sigma P = \Sigma_1 E - \Sigma E$$



$$PSI = \Sigma E \qquad SPI = \Sigma_1 E - \Sigma E$$

et comme on a

$$\frac{r}{\sin P\Sigma S} = \frac{\rho}{\sin SPI}$$

on aura

$$r = \frac{\rho \sin \Sigma_1 E}{\sin(\Sigma_1 E - \Sigma E)}$$

Tout est connu dans le second membre et l'on aura r en fonction de ρ.

On pourra ainsi calculer pour une époque quelconque $z - \delta$ & L et par suite r et ΣE.

IX. Détermination de la longitude du périhélie de l'excentricité et du demi-grand axe de l'orbite. Choisissons trois époques convenablement distantes et soient t, t_1; t', t_1'; t'', t_1'' les rayons vecteurs et les longitudes héliocentriques dans l'orbite de la planète à ces trois époques. En posant

$$p = a(1-e^2)$$

nous aurons d'après l'équation de l'ellipse:

$$e\cos(z_1 - \varpi) = \frac{p}{r} - 1$$
$$e\cos(z_1' - \varpi) = \frac{p}{r'} - 1$$
$$e\cos(z_1'' - \varpi) = \frac{p}{r''} - 1.$$

trois équations du 1er degré en p, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$ et qui permettent de calculer ces quantités p par suite e, ϖ & a. Pour les résoudre multiplions-les par des coefficients indéterminés $\lambda, \lambda' \lambda''$ et ajoutons-les en nous imposant les conditions:

$$\lambda\cos z_1 + \lambda'\cos z_1' + \lambda''\cos z_1'' = 0$$
$$\lambda\sin z_1 + \lambda'\sin z_1' + \lambda''\sin z_1'' = 0$$

Nous aurons:

$$p\left(\frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda'}{r'} + \frac{\lambda''}{r''}\right) = \lambda + \lambda' + \lambda''.$$

Les éq. en λ peuvent s'écrire:

$$\frac{\lambda}{\sin(z_1'-z_1'')} = \frac{\lambda'}{\sin(z_1''-z_1)} = \frac{\lambda''}{\sin(z_1-z_1')}$$

on aura donc

$$p = \frac{rr'r''\{\sin(z_1''-z_1') - \sin(z_1''-z_1) + \sin(z_1'-z_1)\}}{r'r''\sin(z_1''-z_1') - rr''\sin(z_1''-z_1) + rr'\sin(z_1'-z_1)}.$$

Pour le numérateur on a

$$\sin(z_1''-z_1') - \sin(z_1''-z_1) = -2\sin\frac{z_1'-z_1}{2}\cos\left(z_1''-\frac{z_1'+z_1}{2}\right)$$
$$\sin z_1'-z_1 = 2\sin\frac{z_1'-z_1}{2}\cos\frac{z_1'-z_1}{2}.$$

Donc:

$$\sin(z_1''-z_1') - \sin(z_1''-z_1) + \sin(z_1'-z_1) = 2\sin\frac{z_1'-z_1}{2}\left(\sin\frac{z_1''-z_1'}{2} + \sin\frac{z_1''-z_1}{2}\right).$$

Quant au dénominateur, on peut lui donner une interprétation géométrique. En effet les doubles des triangles SPP'', SPP', $SP'P'$ sont respectivement égaux à $rr''\sin(z_1''-z_1')$ $rr''\sin(z_1''-z_1)$ $rr'\sin(z_1'-z_1)$. Donc en appelant A, A', A'' les doubles des triangles



$$p = \frac{4rr'r''\sin\frac{z''-z'}{2}\sin\frac{z''-z}{2}\sin\frac{z'-z}{2}}{A - A' + A''}$$

On voit que le dénominateur de p ne devient jamais nul ; mais qu'il y a avantage à choisir les époques de façon que l'aire $\Delta'\Delta''$ soit aussi grande que possible.

Une fois p calculé on déterminera e et ϖ par deux des éq. précédentes ; par exemple celles-ci :

$$e\cos(z-\varpi) = \frac{r}{p} - 1$$

$$e\cos(z'-\varpi) = \frac{r'}{p''} - 1.$$

Pour résoudre commodément ce système, introduisons comme Gauss le fait habituellement, un angle auxiliaire N et écrivons les éq. précédentes :

$$e\cos(z-N+N-\varpi) = \frac{r}{p} - 1$$

$$e\cos(z'-N+N-\varpi) = \frac{r'}{p''} - 1.$$

ou en développant :

$$e\cos(z-N)\cos(N-\varpi) - e\sin(z-N)\sin(N-\varpi) = \frac{r}{p} - 1 \qquad \sin(z'-N) \quad \sin(z-N)$$

$$e\cos(z'-N)\cos(N-\varpi) - e\sin(z'-N)\sin(N-\varpi) = \frac{r'}{p''} - 1 \quad -\cos(z-N) \quad -\sin(z-N)$$

D'où

$$e\sin(z'-z)\sin(N-\varpi) = \left(\frac{r}{p} - 1\right)\cos(z'-N) - \left(\frac{r'}{p''} - 1\right)\cos(z-N)$$

$$e\sin(z'-z)\cos(N-\varpi) = \left(\frac{r}{p} - 1\right)\sin(z'-N) - \left(\frac{r'}{p''} - 1\right)\sin(z-N).$$

Déterminons à présent N par la condition :

$$z'-N+z-N = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{z+z'}{2}$$

D'où $\qquad z'-N = \frac{z'-z}{2}.$

Nous aurons alors :

$$e\sin(N-\varpi) = \frac{\frac{r}{p} - 1 - \left(\frac{r'}{p''} - 1\right)}{2\sin\frac{z'-z}{2}}$$

$$e\cos(N-\varpi) = \frac{\frac{r}{p} - 1 + \frac{r'}{p''} - 1}{2\cos\frac{z'-z}{2}}.$$

ou bien

$$2\,\frac{2rr'}{p}\,e\sin\left(\frac{z'+z}{2} - \varpi\right) = \frac{r-r'}{\cos\frac{z'-z}{2}}$$

$$\frac{2rr'}{p}\,e\cos\left(\frac{z'+z}{2} - \varpi\right) = \frac{r+r' - \frac{2rr'}{p}}{\cos\frac{z'-z}{2}}.$$

On aura ainsi e et ϖ. Enfin a se calculera par

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{ou} \quad a = \frac{p}{1-e^2}.$$

Une fois qu'on a calculé ϖ, on connaîtra l'époque du passage de la planète au périhélie et comme alors sa longitude vraie est égale à sa longitude

moyenne, on connaîtra ce que l'on appelle la longitude de l'époque. En faisant une seconde détermination analogue, on connaîtra la durée d'une révolution indépendamment de a et l'on pourra vérifier la 3ème loi de Kepler.

Remarque générale. – La détermination que nous avons faite suffit pour les premiers besoins de l'astronomie et elle permet aussi de vérifier les lois du mouvement elliptique. Pour corriger ces premières valeurs approchées de façon à se conformer le mieux possible à l'Observation, on se base sur la considération de ce qu'on appelle équations de conditions; nous traiterons cette question dans la 3e année.

X. Eléments des principales planètes d'après l'annuaire du Bureau des Longitudes pour 1885.

	Moy. mouv. diurnes.	Durée des rév. sidérales	Distances moy. au Soleil	Excentricités.
Mercure	14732", 4194	87j, 969258	0, 3870987	0, 2056048
Vénus	5767, 6698	224, 700787	0, 7233322	0, 0068433
La Terre	3548, 1927	1a	0, 006374	1, 000 0000	0, 0167701
Mars	1886, 5184	1.	321, 729646	1, 5236913	0, 0932611
Jupiter	299, 1284	11.	314, 838171.	5, 202800	0, 0482579
Saturne	120, 4547	29.	166, 986360	9, 538861	0, 0560713
Uranus	42, 2310	84.	7, 39036	19, 1829	0, 0463402
Neptune	21. 5350	164.	280, 11316	30, 05508	0, 0089646.

	Longit. du périh.	Longit. moy. 1er Janv. 1850	Longit. du nœud ascendant	Inclinaisons.
Mercure	75° 7' 14"	337° 15' 20"	46° 33' 9"	7° 0' 8"
Vénus	129. 27. 15.	245. 33. 15.	75. 19. 52.	3. 23. 35.
La Terre	100. 21. 22.	100. 46. 44.	0. 0. 0.	0. 0. 0.
Mars	333. 17. 54.	83. 40. 31.	48. 23. 53.	1. 51. 2.
Jupiter	11. 54. 58.	160. 1. 10.	98. 56. 17.	1. 18. 41.
Saturne	90. 6. 38.	14. 52. 28.	112. 20. 53.	2. 29. 40.
Uranus.	170. 50. 7.	29. 17. 51.	73. 13. 57.	0. 46. 20.
Neptune	45. 59. 43.	334. 33. 29.	130. 6. 25.	1. 47. 2.

Remarque. – Les durées des révolutions sidérales sont comptées en

en années juliennes de 365,25 et en jours solaires moyens.

2° Les valeurs de tous ces éléments se rapportent à 1850, 1er Janv. midi moy. de Paris.

3° Les longitudes sont comptées à partir de ce qu'on appelle équinoxe moyen à cette époque & dont nous parlerons dans le chapitre suivant.

4° La longitude de cette époque est la longitude moyenne à l'époque mentionnée plus haut.

5° On voit par l'inspection des deux tableaux précédents que l'excentricité et l'inclinaisons des principales planètes sont très peu considérables; la plus grande excentricité est celle de ♀ = 0,2056 & la plus grande inclinaison est celle de la même planète 7°. Si l'on excepte cette planète, l'excentricité la plus grande est de ♂ 0,093 & la plus grande inclinaison est de ♀ 3°.

Il n'en est plus ainsi des planètes télescopiques. D'après l'Annuaire pour 1855, l'excentricité d'Astrée d'Hébé (13e) est de 0,379926 et l'inclinaison de Pallas est de 34°43'55". Les autres sont toutes plus petites que celles-là.

XI. Mouvement géocentrique des planètes. — Pour un observateur placé au centre de la Terre, la longitude l de chaque planète ne va pas augmentant constamment. Tantôt on a $\frac{dl}{dt} > 0$ et alors on dit que le mouvement de la planète est direct; tantôt on a $\frac{dl}{dt} < 0$ et alors on dit que son mouvement est rétrograde. Entre ces deux périodes, il y a une époque où l'on a $\frac{dl}{dt} = 0$ et alors on dit que la planète est stationnaire.

Pour nous rendre compte de toutes ces particularités, cherchons les équations qui donnent le lieu géocentrique de la planète en négligeant les puissances de φ & ι à partir de la 2e. On a alors:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos s)$$

$$v = s + 2\varepsilon \sin s$$

$$l = \Omega = \text{Cte} + nt + 2\varepsilon \sin s$$

$$\lambda = \varphi \sin(\varpi - \theta) = \varphi \sin(nt+\varepsilon-\theta)$$

Soit la dernière des éq. (1) du paragraphe V devenant

$$\Delta\lambda' = r\lambda$$

les deux premières des mêmes équations deviendront:

$$\Delta \cos b' = r\cos b - \rho\cos\beta$$
$$\Delta \sin b' = r\sin b - \rho\sin\beta$$

Or on a en développant

$$\cos b = \cos(nt+\varepsilon+2\zeta\sin 1'') = \cos(nt+\varepsilon) - 2\zeta\sin 1'' \sin(nt+\varepsilon)$$
$$\sin b = \sin(nt+\varepsilon+2\zeta\sin 1'') = \sin(nt+\varepsilon) + 2\zeta\sin 1'' \cos(nt+\varepsilon)$$

en les multipliant par $r = a(1-e\cos\zeta)$ et en s'arrêtant au 1er ordre on aura:

$$r\cos b' = a\cos(nt+\varepsilon) - 2\zeta'' \sin 1'' \sin(nt+\varepsilon) - ae\cos\zeta\cos(nt+\varepsilon)$$
$$r\sin b' = a\sin(nt+\varepsilon) + 2a\zeta\sin 1'' \cos(nt+\varepsilon) - ae\cos\zeta\sin(nt+\varepsilon).$$

Remarquons que l'on a:

$$nt+\varepsilon-\zeta = nt+\varepsilon-(nt+\varepsilon-\varpi) = \varpi. \qquad nt+\varepsilon+\zeta = 2nt+2\varepsilon-\varpi.$$

On aura donc en vertu des formules:

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$
$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a-b) + \tfrac{1}{2}\sin(a+b).$$

$$r\cos b = a\cos(nt+\varepsilon) + \tfrac{1}{2}ae\cos(2nt+2\varepsilon-\varpi) - \tfrac{3}{2}ae\cos\varpi$$
$$r\sin b = a\sin(nt+\varepsilon) + \tfrac{1}{2}ae\sin(2nt+2\varepsilon-\varpi) - \tfrac{3}{2}ae\sin\varpi.$$

Si l'on représente par $n_1, a_1, \varepsilon_1, \varpi_1$ les grandeurs relatives à la Terre et correspondantes aux grandeurs $n, a, \varepsilon, \varpi$; on aura

$$\rho\cos\beta = a_1\cos(n_1t+\varepsilon_1) + \tfrac{1}{2}a_1e_1\cos(2n_1t+2\varepsilon_1-\varpi_1) - \tfrac{3}{2}a_1e_1\cos\varpi_1$$
$$\rho\sin\beta = a_1\sin(n_1t+\varepsilon_1) + \tfrac{1}{2}a_1e_1\sin(2n_1t+2\varepsilon_1-\varpi_1) - \tfrac{3}{2}a_1e_1\sin\varpi_1.$$

En posant

$$x = \Delta\cos b' \qquad y = \Delta\sin b'$$

et $P = \tfrac{1}{2}ae\cos(2nt+2\varepsilon-\varpi) - \tfrac{1}{2}a_1e_1\cos(2n_1t+2\varepsilon_1-\varpi_1) - \tfrac{3}{2}ae\cos\varpi + \tfrac{3}{2}a_1e_1\cos\varpi_1$

$$Q = \tfrac{1}{2}ae\sin(2nt+2\varepsilon-\varpi) - \tfrac{1}{2}a_1e_1\sin(2n_1t+2\varepsilon_1-\varpi_1) - \tfrac{3}{2}ae\sin\varpi + \tfrac{3}{2}a_1e_1\sin\varpi_1$$

Il vient donc:

$$x = a_1\cos(nt+\varepsilon) - a_1\cos(n_1t+\varepsilon_1) + P$$
$$y = a\sin(nt+\varepsilon) - a_1\sin(n_1t+\varepsilon_1) + Q.$$

Telles sont les expressions des coordonnées géocentriques de la planète à des quantités du $2^{\text{ème}}$ ordre près.

Cherchons maintenant la valeur de $\frac{dl'}{dt}$. On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\cos b - a\sin b'\frac{db'}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{da}{dt}\sin b' + a\cos b'\frac{db'}{dt}.$$

On en tire

$$-\frac{dz}{dt}\sin l' + \frac{dx}{dt}\cos l' = A\frac{dl'}{dt}$$

ou bien

$$A^2\frac{dl'}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Or en posant pour abréger

$$\frac{dl'}{dt} = P' \qquad \frac{dl''}{dt} = Q'$$

on a:

$$\frac{dx}{dt} = -na_1\sin(nt+\varepsilon) + n_1a_1'\sin(n_1t+\varepsilon_1) + P'$$

$$\frac{dy}{dt} = na_1\cos(nt+\varepsilon) - n_1a_1'\cos(n_1t+\varepsilon_1) + Q'$$

On aura donc:

$$A^2\frac{dl'}{dt} = na^2 + n_1a_1'^2 - (n+n_1)aa_1\cos[(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1] + R$$

en posant:

$$R = x'\{na_1\cos(nt+\varepsilon) - n_1a_1'\cos(n_1t+\varepsilon_1)\} + Q\{na_1\sin(nt+\varepsilon) - n_1a_1'\sin(n_1t+\varepsilon_1)\}$$

$$- P'\{a_1\cos(nt+\varepsilon) - a_1'\sin(n_1t+\varepsilon_1)\} + Q'\{a_1\cos(nt+\varepsilon) - a_1'\cos(n_1t+\varepsilon_1)\}$$

en négligeant les quantités PP' & $P'Q$ qui sont du 2e ordre.

Comme on a:

$$-P' = na_1e\sin(nt+2\varepsilon-\varpi) - n_1a_1'e_1\sin(2n_1t+2\varepsilon_1-\varpi_1)$$

$$Q' = na_1e\cos(2nt+2\varepsilon-\varpi) - n_1a_1'e_1\cos(2n_1t+2\varepsilon_1-\varpi_1)$$

on aura en effectuant

$$R = \tfrac{3}{2}na^2e\cos(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{3}{2}n_1a_1'^2e\cos(n_1t+\varepsilon-\varpi) - \tfrac{1}{2}(2+2n_1)aa_1e_1\cos[(2n_1-n)t+2\varepsilon_1-\varepsilon-\varpi_1]$$

$$-\tfrac{1}{2}(n_1+2n)aa_1e\cos[(2n_1-n)t+2\varepsilon-\varepsilon_1-\varpi] - \tfrac{3}{2}na_1^2e\cos(nt+2\varepsilon-\varpi) - \tfrac{3}{2}n_1a_1'^2e_1\cos(n_1t+\varepsilon_1-\varpi_1)$$

$$+\tfrac{3}{2}n_1aa_1e_1\cos(n_1t+\varepsilon_1-\varpi) + \tfrac{3}{2}naa_1e_1\cos(nt+\varepsilon-\varpi_1).$$

ou en réduisant

$$R = \tfrac{3}{2}naa_1e_1\cos(nt+\varepsilon-\varpi_1) + \tfrac{3}{2}n_1aa_1e\cos(n_1t+\varepsilon_1-\varpi)$$

$$-\tfrac{1}{2}(n_1+2n)aa_1e\cos[(2n-n_1)t+2\varepsilon-\varepsilon_1-\varpi] - \tfrac{1}{2}(n+2n_1)aa_1e_1\cos[(2n_1-n)t+2\varepsilon_1-\varepsilon-\varpi_1].$$

On voit que R se compose uniquement de petits termes périodiques.

Comme le terme R est toujours très-petit, $\frac{dl'}{dt}$ et par suite $A^2\frac{dl'}{dt}$ n'aura presque jamais toujours le signe de la partie principale et l'annulera presque en même temps. Voyons donc la variation de ce terme ou de la quantité

$$\frac{na^2 + n_1a_1'^2}{(n+n_1)aa_1} - \cos[(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1].$$

Posons:

$$\lambda = \frac{n a^2 + n_1 a_1^2}{(n+n_1) a a_1}$$

On peut mettre cette quantité sous une autre forme. En effet prenons pour unité de longueur le demi-grand axe de la Terre c'est à dire posons $a_1 = 1$. On a alors d'après la 3e loi de Kepler

$$n^2 a^3 = n_1^2 \quad \text{d'où} \quad n = \varpi n_1 a^{-\frac{3}{2}}.$$

On aura donc:

$$\lambda = \frac{a^{\frac{3}{2}} + 1}{(a^3+1) a} = \frac{a^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+1)}{\varpi (1+a^{\frac{3}{2}}) a}$$

ou enfin

$$\lambda = \frac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+1)}{\varpi (1+a^{\frac{3}{2}})}.$$

ou en posant

$$a^{\frac{1}{2}} = u$$

$$\lambda = \frac{u^3+u}{\varpi (u^3+1)}.$$

Cherchons comment varie λ si u varie d'une façon continue. On a:

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{(2u+1)(u^3+1) - 3u^2(u^3+u)}{(u^3+1)^2} = \frac{-u^4 - 2u^3 + 3u + 1}{(u^3+1)^2}$$

$$= \frac{2u(\varpi+1)(-u^2) + 1 - u^4}{(u^3+1)^2} = \frac{2u(-u^3) + (1+u^3)(1-u^3)}{(u^3+1)^2}.$$

ou enfin

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{(1-u^3)(1+2u)^2}{(u^3+1)^2}$$

Donc quand u varie de 0 à 1, λ augmente; pour $u=1$ λ devient maximum; puis quand u varie de 1 à ∞, λ diminue indéfiniment. La valeur maximum de λ est:

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1.$$

Donc pour $u<1$ ou $a^{\frac{1}{2}} < 1$ c'est à dire $a < 1$, λ est toujours plus petit que 1. Par conséquent la dérivée $\frac{d\Omega}{dt}$ peut s'annuler et changer de signe. Il y a donc pour toutes les planètes rétrogradation et station.

Appelons α l'angle compris entre $0°$ et $90°$ et ayant pour cosinus λ; et désignons par ε la quantité $n - n_1$ ou la quantité $n_1 - n$ suivant que la planète est inférieure ou supérieure c'est à dire plus près du Soleil ou non que la Terre. alors ε sera toujours une quantité positive. Cela posé, une époque de station sera donnée par l'équation

$$\varpi \varepsilon t + \varepsilon - \varepsilon_1 = -\alpha.$$

et si l'on appelle $\tau = t+\tau$ l'époque précédente de station, nous devrons avoir:

$$\lambda(t+\tau)+\varepsilon-\varepsilon_1 = +\alpha.$$

De l'époque t à l'époque $t+\tau$, la quantité $\frac{dl'}{dt}$ sera négative et la planète rétrogradera; et la durée de la rétrogradation sera précisément égale à τ.

On a d'après les deux équations précédentes

$$\nu\tau = 2\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \tau = \frac{2\alpha}{\nu}$$

et comme λ est d'autant plus grand que l'orbite de la planète est plus rapprochée de celle de la Terre, α sera d'autant plus petit que ces deux orbites seront plus rapprochées; mais comme ν varie dans le même sens que α, on ne peut rien conclure relativement à τ. En effectuant le calcul, on trouve que τ est égal en moyenne à

Pour Mercure.	$22^j\,1/2$.
" Vénus	42. 1/4.
" Mars.	71. 1/4
" Jupiter	114. 3/4.
" Saturne	137.

Cherchons maintenant l'époque où la variation de l' c'est à dire $\frac{dl'}{dt}$ est la plus considérable, nous nous contenterons de trouver cette époque en négligeant les carrés de la 1re puissance même de l'excentricité. On a alors:

$$\Delta^2\frac{dl'}{dt} = na^2 + n_1a_1^2 - (n+n_1)aa_1\cos\left[(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1\right].$$

et d'après les égalités donnant x et y:

$$\Delta^2 = x^2+y^2 = \left[a_1\cos(nt+\varepsilon) - a_1\cos(n_1t+\varepsilon_1)\right]^2 + \left[a\sin(nt+\varepsilon) - a_1\sin(n_1t+\varepsilon_1)\right]^2$$
$$= a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos\left[(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1\right].$$

Donc en posant pour abréger

$$\alpha = n-n_1 \qquad \beta = \varepsilon-\varepsilon_1$$

on aura:

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{na^2+n_1a_1^2-(n+n_1)aa_1\cos(\alpha t+\beta)}{a^2+a_1^2-2aa_1\cos(\alpha t+\beta)}$$

d'où

$$\frac{d^2l'}{dt^2} = \frac{(n+n_1)aa_1\sin(\alpha t+\beta)\left[a^2+a_1^2-2aa_1\cos(\alpha t+\beta)\right] - 2aa_1(n-n_1)\sin(\alpha t+\beta)\left[na^2+n_1a_1^2-(n+n_1)aa_1\cos(\alpha t+\beta)\right]}{\left[a^2+a_1^2-2aa_1\cos(\alpha t+\beta)\right]^2}.$$

c'à d.

$$\frac{dv'}{dt\varepsilon} = \frac{(n-n_1)\,aa_1 \sin(\lambda t+\beta)\left[(n+n_1)(a^2+a_1^2)-2(na^2+n_1a_1^2)\right]}{\left[(a^2+a_1^2)-2aa_1\cos(\lambda t+\beta)\right]^2}.$$

ou bien

$$\frac{dv'}{dt\varepsilon} = \frac{(n^2-n_1^2)(a_1^2-a^2)\,aa_1 \sin(\lambda t+\beta)}{\left[(a^2+a_1^2)-2aa_1\cos(\lambda t+\beta)\right]^2}.$$

Cette expression prouve que $\frac{dv'}{dt}$ est maximum ou minimum quand la quantité

$$\sin(\lambda t+\beta) \quad \text{ou} \quad \sin\left[(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1\right]$$

est nulle c'à d lorsque l'on a :

$$nt+\varepsilon = n_1t+\varepsilon_1 \quad \text{ou} \quad n_1t+\varepsilon_1+180°.$$

c'à d que quand la planète est en opposition ou en conjonction ou en opposition avec le Soleil.

Dans cette hypothèse, $\frac{dv'}{dt}$ devient négatif pour $nt+\varepsilon = n_1t+\varepsilon_1$ et positif pour $nt+\varepsilon-(n_1t+\varepsilon_1)=180°$.

Donc 1° pour une planète inférieure, la planète est rétrograde quand elle est en conjonction inférieure, et sa vitesse de rétrogradation est alors maximum. Il en est de même pour une conjonction supérieure. 2° Pour une planète supérieure, il y a quand la planète est en opposition en longitude moyenne, sa vitesse est rétrograde et maximum en valeur absolue, quand elle est en conjonction, sa vitesse est directe et maximum en valeur absolue aussi. Tout cela se voit d'ailleurs facilement par une simple considération géométrique

XI. De la Précession

La position relative de l'écliptique et de l'équateur ne reste pas invariable. Elle change constamment en vertu des deux causes suivantes.

1° A cause de l'attraction du Soleil et surtout de la Lune sur l'renflement équatorial de la Terre, l'axe de rotation de celle-ci ne conserve pas une direction fixe dans l'espace. Il décrit autour d'une droite menée par le centre de la Terre et de direction invariable dans le sens rétrograde, et ce cône n'est pas un cône de revolution. Il en résulte que l'intersection de l'équateur avec un grand cercle dont le plan est fixe se meut dans le sens rétrograde et que l'inclinaison du plan de l'équateur sur le plan fixe varie aussi d'une manière périodique.

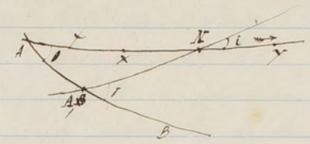
Ce phénomène est connu sous le nom de la précession lunisolaire.

2° A cause des perturbations que produisent les autres planètes sur le mouvement de translation de la Terre, le plan de l'orbite de celle-ci ne reste pas invariable de position. Il en résulte que l'écliptique change constamment de position par rapport à un plan fixe mené par le centre de la sphère céleste. Ceci produit ce qu'on appelle précession planétaire.

Nous traiterons plus tard par la théorie de deux importantes questions. Quant à présent nous nous contenterons d'accepter les résultats théoriques, confirmés d'ailleurs par l'observation, et d'en déduire quelques conséquences utiles au point de vue de l'astronomie pratique.

I. Formules générales de la précession et de la nutation. — Rapportons le centre de la sphère céleste au centre de la Terre, prenons pour plan fixe le plan

de l'écliptique à une époque déterminée que nous prendrons pour origine des temps. Soit $\Lambda\Lambda'$ cet écliptique fixe, et soit χ le point qui était, à l'origine des temps, ce que nous appellerons équinoxe moyen et que nous définissons tout à l'heure.



Soit AB l'équateur à une époque quelconque t. Désignons par γ l'angle χA compté dans le sens inverse et par δ l'angle χAB. La théorie nous enseigne alors qu'on a:

$$\gamma = \alpha t + \beta t^2 + \Upsilon$$
$$\theta = \theta_0 + \delta t^2 + \Theta$$

formules dans lesquelles α, β, δ désignent des constantes très petites valant β et δ; θ_0 un angle constant, Υ et Θ des termes périodiques de la forme

$$\Upsilon = \Sigma A \sin \omega \qquad \Theta = \Sigma B \cos \omega.$$

où A, B désignent des constantes et ω un angle variable. Les effets des termes Υ et Θ sont compris sous la dénomination générale de nutation; nous les considérerons à part dans un prochain chapitre; nous en ferons abstraction pour le moment.

Le plan défini par les éq. en γ et θ est donc celui auquel on rapporte $\Lambda\Lambda'$ = 0, Θ = 0 s'appelle le plan de l'équateur moyen.

Désignons donc soit $A\Lambda$ l'écliptique à l'époque t. Appelons i l'inclinaison du plan de cet écliptique par rapport au plan fixe $\chi\chi'$ et Λ la longitude de son nœud ascendant Λ par rapport au point $\Lambda'\chi$ c'est à dire sous $\chi\Lambda' = \Lambda$ cet arc étant compté dans le sens direct. La théorie nous enseigne que si l'on s'en tient aux inégalités séculaires, on a

$$\Lambda = \Lambda_0 + \alpha' t$$

Λ_0 étant une constante et α' une autre constante très petite, ainsi que i qui reste constamment égal à i_0. Mais cette théorie nous apprend également que Λ et i sont affectés de termes périodiques dépendant d'arguments de la forme $\omega = \alpha t + \beta$ et que ces termes périodiques ont pour coefficients des quantités de l'ordre de α^2 ou $\alpha\alpha'$ ou α'^2 c'est à dire des quantités très petites du second ordre. Nous négligerons donc ces termes périodiques et nous écrirons

$$\Lambda = \Lambda_0 + \alpha' t \qquad i = i_0$$

Nous avons ainsi déterminé la position de l'équateur moyen à l'époque t par rapport au plan fixe $\chi\chi'$. Il nous reste à déterminer la position de l'équateur vrai par rapport à ce même plan.

Soit $\Lambda\Lambda'$ l'écliptique à l'époque t, Λ le nœud ascendant de l'équateur vrai sur cet écliptique, $\Lambda\Lambda'$ étant compté dans le sens direct, $\Lambda\Lambda' = \Lambda$, $\Lambda\Lambda' = \Lambda$ et $\Lambda\Lambda' = \Lambda$ étant compté dans le sens direct, $\Lambda\Lambda' = \Lambda$ et $\Lambda\Lambda' = \Lambda$ étant compté dans le sens direct.

nombre de siècles :

$$i\cos\Delta = pt + rt^2$$
$$i\sin\Delta = qt + st^2$$

où p & q désignent des constantes et r, s aussi des constantes mais beaucoup plus petites que p & q.

Le plan ΔN défini par les équations précédentes s'appelle le plan de l'écliptique moyen

L'intersection Δ_1 de l'équateur moyen avec l'écliptique moyen s'appelle équinoxe moyen.

On voit bien que l'équinoxe moyen coïncide avec le point γ pour l'époque $t = 0$.

Nous verrons dans la suite comment on peut déterminer les valeurs des différents coefficients numériques qui entrent dans ces diverses formules. Pour le moment nous adoptons les valeurs données par Leverrier dans les Annales de l'Observatoire de Paris.

Nous prendrons provisoirement pour origine des temps le midi moyen de Paris au 1er Janvier de l'an 1850 ; et pour unité de temps l'année julienne de 365,25 jours solaires moyens. Cela posé, ~~nous obtenons les valeurs suivantes~~ les valeurs données par Leverrier sont les :

$a = 50'',37140$ $\quad b = -0'',0001094.$

$\theta_0 = 23°\,27'\,32'',00$ $\quad \alpha = 0'',00000723.$

$p = -0'',47566$ $\quad r = 0'',000\,00568$

$q = +0'',05888$ $\quad s = 0'',000\,01964.$

Désirons que, en négligeant d'abord p & q, nous avons :

$$\gamma = 50'',37140.t - 0'',0001094\,t^2$$
$$\theta = 23°27'32'',00 + 0'',00000723\,t^2$$
$$i\cos\Delta = -0'',47566t + 0'',000\,00568\,t^2$$
$$i\sin\Delta = 0'',05888.t + 0'',000\,01964\,t^2.$$

II. Précession générale et obliquité moyenne de l'écliptique. — La quantité γ que nous venons de considérer s'appelle particulièrement précession lunisolaire parce que son existence est due tout entière à l'action de la

Lune et du Soleil. L'arc $\Lambda\Lambda_1$ que nous désignerons par x porte le nom de précession planétaire parce qu'il naît uni dans les perturbations des planètes. Enfin la différence entre $N\overset{x}{\Omega}$ et $N\Lambda_1$, que nous désignerons par y, s'appelle précession générale. Cette quantité $N\Lambda_1 - N\overset{x}{\Omega}$ se réduirait à y si les actions des planètes étaient nulles. — L'angle $\Omega\Lambda N$ que nous désignerons par δ est ce que nous appellerons obliquité moyenne de l'écliptique : c'est en effet l'obliquité de l'écliptique à l'époque t par rapport à l'équateur moyen.

Etant donnés x, δ, i et Λ, nous nous proposons maintenant de trouver les trois quantités y, X et δ. Pour cela, on pourrait employer les formules de Delambre appliquées au triangle $N\Lambda\Lambda_1$, dans lequel on connaît un côté et les angles adjacents. Mais les différences $X-y$ et $\delta-\delta$ ainsi que x étant de petites quantités, on peut les développer par rapport à t et s'arrêter à la seconde puissance ; et pour effectuer ce développement, il est plus commode d'employer une autre procédé particulier.

1° Calcul de x. — On a dans le triangle $N\Lambda\Lambda_1$,

$$-\cos x = -\cos\delta\cos i + \sin\delta\sin i\cos(\gamma+\Lambda).$$

Posons :

$$\delta = \gamma = \delta + z.$$

Alors comme $x = \gamma - \delta$ est la même arc que i, on pourra prendre

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \sin x = x$$

ainsi $\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} \qquad \sin i = i.$

Il vient alors :

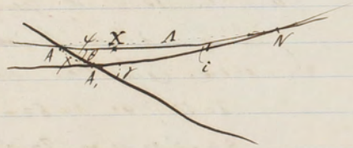
$$-\cos\delta + x\sin\delta + \frac{x^2}{2}\cos\delta = -\cos\delta\cos z + \frac{i^2}{2}\cos\delta + i\sin\delta\cos(\gamma+\Lambda).$$

ou bien :

$$x = i\cos(\gamma+\Lambda) + \frac{i^2 - x^2}{2}\cot\delta \text{ etc.}$$

Mais dans le 2ème terme du 2d membre qui est du 2d ordre, on peut remplacer x par $i\cos(\gamma+\Lambda)$ et δ par δ_0, ce qui donne :

$$x = i\cos(\gamma+\Lambda) + \tfrac{1}{2} i^2 \sin^2(\gamma+\Lambda)\cot\delta_0 \text{ etc.}$$



Or on a approximativement

$i\cos(\gamma+\Lambda) = i\cos\Lambda\cos\gamma - i\sin\Lambda\sin\gamma = i\cos\Lambda - i\sin\Lambda.\gamma\sin 1''$

$i\sin(\gamma+\Lambda) = i\sin\Lambda\cos\gamma + i\cos\Lambda.\sin\gamma = i\sin\Lambda + i\cos\Lambda.\gamma\sin 1''$

En substituant et s'arrêtant au 2e ordre, on aura:

$$i\cos(\gamma+\Lambda) = Pt + Rt^2 - 2Q''\sin 1''\, t^2$$

$$i\sin(\gamma+\Lambda) = Qt + St^2 + 2P''\sin 1''\, t^2.$$

en en posant

$$R - 2Q''\sin 1'' = H \qquad S + 2P''\sin 1'' = I$$

il vient:

$$i\cos(\gamma+\Lambda) = Pt + Ht^2$$

$$i\sin(\gamma+\Lambda) = Qt + It^2.$$

On aura par suite:

$$i^2\sin^2(\gamma+\Lambda).\sin 1'' = Q^2\sin 1''\, t^2.$$

Donc en substituant dans la valeur de x

$$x = Pt + Ht^2 + \tfrac{1}{2}Q^2\sin 1''\cot\beta_0\, t^2$$

Si donc on pose:

$$c = P \qquad f = H + \tfrac{1}{2}Q^2\sin 1''\cot\beta_0$$

on aura

$$x = \beta_0 + ct + ft^2 + \varepsilon.$$

2e Calcul de χ. — On a dans le triangle NAA_1

$$\frac{\sin\chi}{\sin i} = \frac{\sin(\gamma+\Lambda)}{\sin\gamma}.$$

d'où

$$\chi = i + (\gamma+\Lambda)\left\{\sin\beta_0 + ct\sin 1''\cos\beta_0\right\}^{-1}.$$

$$= i + (\gamma+\Lambda)\frac{1}{\sin\beta_0}\left(1 - ct\sin 1''\cot\beta_0\right)$$

$$= \frac{Qt + It^2}{\sin\beta_0}\left(1 - P\cot\beta_0\sin 1''\, t\right)$$

on en déduit en posant:

$$e = \frac{Q}{\sin\beta_0} \qquad f = \frac{I - PQ\sin 1''\cot\beta_0}{\sin\beta_0}$$

nous aurons:

$$\chi = et + ft^2.$$

3e Calcul de χ_1. — On a dans le triangle NAA_1:

$$\sin\chi\cos\delta = \sin(\gamma+\Lambda)\cos(\gamma_1+\Lambda) - \cos(\gamma+\Lambda)\sin(\gamma_1+\Lambda)\cos i.$$

on en remplaçant $\cos i$ par $1 - 2\sin^2\frac{i}{2}$:

$$\sin\chi\cos\delta = \sin(\chi - \chi_1) + 2\cos(\gamma+\Lambda)\sin(\gamma_1+\Lambda)\sin^2\frac{i}{2}.$$

ou en négligeant les termes du 2e ordre et remplaçant dans le coefficient de i qui est du 2e ordre γ_1 par γ.

$$\chi\cos\theta = (\chi - \chi_1) + \frac{\ddot{\alpha}_1 t^2}{2}\cos(\chi+1) - \ddot{\imath}\sin(\chi+1)$$

D'où en résolvant et remplaçant θ par θ_1, ce qui est permis :

$$\chi - \chi_1 = \chi\cos\theta_1 - \frac{\ddot{\alpha}_1 t^2}{2}\cos(\chi+1) + \ddot{\imath}\sin(\chi+1).$$

ou bien

$$\chi - \chi_1 = \chi\cos\theta_1 \mp \frac{DQ\ddot{\alpha}_1 t^2}{2}.$$

On constate que le second terme est presque insensible. $= 0{,}00000007$

En substituant la valeur de χ dans l'autre, χ

$$\chi_1 = \alpha_1 t + \tfrac{1}{2}\delta_1 t^2 + \Sigma.$$

où l'on a :

$$\alpha_1 = \alpha - Q\cot\theta_1 \qquad \delta_1 = \delta - I\cot\theta_1 + DQ\sin^2(\cot^2\theta_1 + \tfrac{1}{2}).$$

En effectuant le calcul on trouve

$$H = -0{,}000\,30870 \qquad I = -0{,}000\,09652.$$
$$i_1 = -0{,}47566 \qquad \alpha_1 = -0{,}000\,00145.$$
$$e = +0{,}14790 \qquad f = -0{,}000\,24167.$$
$$\alpha_1 = 50{,}23572. \qquad \delta_1 = +0{,}000\,11243.$$

On aura donc, en faisant abstraction de la nutation,

$$\chi = 0{,}47900\,t - 0{,}000\,24167.\,t^2$$
$$\chi_1 = 50{,}23572\,t + 0{,}000\,11243.\,t^2$$
$$\gamma = 23^\circ 27' 32{,}00'' - 0{,}47586.t - 0{,}000\,00145.t^2$$

III. Durée de l'année sidérale et de l'année tropique.

Nous verrons dans la théorie des perturbations que la longitude du Soleil est de la forme

$$\text{vraie} \qquad \varepsilon = \varepsilon + nt + n'\sin t + R$$

ε, n, n' étant trois constantes et R l'ensemble des termes périodiques ; ce que nous appellerons longitude moyenne du soleil, c'est l'ensemble des trois premiers termes $\varepsilon + nt + n'\sin t$. En prenant

$$\text{Longitude} \qquad \text{projection } \pi \text{ sur l'écliptique moyenne} \qquad \text{position moyenne}$$
$$\varepsilon_0 = \varepsilon + nt + n'\sin t.$$

La direction π si l'on arrête plutôt, pour avoir ε_0 pour longitude, s'appelle la position moyenne du Soleil à l'époque considérée.

Cela posé, marquons dans la figure précédente

π la position moyenne
Θ du Soleil sur l'écliptique.

III. Durée de l'année sidérale et de l'année tropique. — Reprenons la figure précédente où $\chi\varepsilon$ représente l'écliptique à l'origine des temps et $N\varepsilon_1$ l'écliptique à l'époque t. Nous avons dans la théorie des perturbations que le Soleil s'écarte très peu du plan $\chi\varepsilon_1$; soit S le pied de l'arc perpendiculaire abaissé sur $\chi\varepsilon_1$ du lieu du centre du Soleil. La théorie nous apprend que la somme $\chi N + NS$ des arcs χN et NS, somme que nous représenterons par $\tilde{\chi}$ a pour expression :

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}' t + \tilde{\chi}'' t^2 + R$$

$\tilde{\chi}_0$, $\tilde{\chi}'$, $\tilde{\chi}''$ étant trois constantes et R un ensemble de termes périodiques.

La quantité $L_0 + \tilde{\chi}$ est ce qu'on appelle la longitude vraie du Soleil rapportée à l'équinoxe fixe.

L'ensemble des trois premiers termes de L c'est-à-dire la quantité

$$L_1 = L_0 + \tilde{\chi}' t + \tilde{\chi}'' t^2$$

s'appelle la longitude moyenne du Soleil rapportée à l'équinoxe fixe.

Cela posé, on dit qu'une année sidérale s'est écoulée lorsque la quantité L_1 a augmenté d'une circonférence entière. Comme L_1 contient un terme en t_0^2, la durée de l'année sidérale ainsi définie ne sera pas constante pour tous les siècles. Mais comme $\tilde{\chi}''$ est un coefficient très petit, la variation de cette durée sera très peu considérable.

La variation de L_1, dans l'unité de temps est à fort peu près égale à $\tilde{\chi}' + 2\tilde{\chi}'' t$. La durée de l'année sidérale A_1 sera donc pour valeur :

$$A_1 = \frac{\text{circonf.}}{\tilde{\chi}' + 2\tilde{\chi}'' t} = \frac{\text{circ.}}{\tilde{\chi}'}\left(1 + \frac{2\tilde{\chi}''}{\tilde{\chi}'} t\right)^{-1}$$

ou sensiblement

$$A_1 = \frac{\text{circonf.}}{\tilde{\chi}'} - \frac{\text{circonf.}\, 2\tilde{\chi}''}{\tilde{\chi}'^2} t.$$

En conservant la même origine et la même unité pour compter les époques, on a d'après la Note.

$$\tilde{\omega}_0 = 280°\,46'\,43'',51$$

$$\tilde{\omega}' = 1295977'',4427.$$

$$\tilde{\omega}'' = -\,0'',000\,011\,63.$$

On aura donc pour A_1 rapporté à l'année julienne :

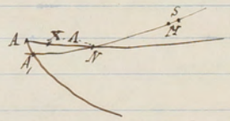
$$A_1 = \frac{129\,5000}{1295977'',4427} + \frac{1296'000 \times 0,000\,011\,626}{1295977'',4427^2}.$$

En effectuant le calcul et exprimant la première partie en jours moyens et la seconde en secondes, on trouve :

$$A_1 = 365^j,253\,357 + 0'',000\,07938\,t.$$

On voit que dans 10000 ans à partir de 1800, A_1 n'aura pas encore augmenté de 4^r.

Cherchons maintenant la longitude moyenne l du Soleil rapportée à l'équinoxe A_1 de l'époque t. On appelle ainsi l'arc qui sépare un point A_1 de la position N' d'un astre fictif qui aurait tel que $\gamma N + NZ = \tilde{\omega}_1$. On a donc :



$$l = A_1N + NZ$$

$$\tilde{\omega}_1 = \gamma N + AZ.$$

D'où

$$l - \tilde{\omega}_1 = A_1N - \gamma N = Y_1$$

On aura donc :

$$l = \tilde{\omega}_1 + Y_1 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}'t + \tilde{\omega}''t^2 + \beta_1 t + \delta_1 t^2$$

ou en posant

$$l' = \tilde{\omega}' + \beta_1 \qquad l'' = \tilde{\omega}'' + \delta_1$$

$$l = \tilde{\omega}_0 + l't + l''t^2.$$

Cela posé on voit que l'année tropique est écourtée lorsque la quantité l a augmenté d'une circonférence. On aura donc pour la durée Δt de l'année tropique à l'époque t :

$$\Delta t = \frac{\text{circonf.}}{l'} - \frac{\text{circonf.}\,2l''}{l'^2}\,t.$$

On a d'après les valeurs de l', $\tilde{\omega}''$, β_1, δ_1 :

$$l' = 1296027'',6784$$

$$l'' = +\,0'',000\,11066.$$

On aura donc :

$$A_t = \frac{1296000}{1296027,6784} - \frac{1296000 \times 0,0022132}{(1296027,6784)^2}\, t$$

En effectuant, on trouve

$$A_t = 365^j,242220 - 0^s,005389\, t.$$

On voit que la diminution de l'année tropique est plus considérable que l'augmentation de l'année sidérale. Donc au bout de 100 ans à partir de 1850, l'année tropique sera diminuée d'une demi-seconde.

IV. Changement de l'origine des temps et de l'unité de temps. — Dans toutes les formules précédentes, nous avons pris pour origine des temps le midi moyen de Paris au 1er Janvier 1850 et pour unité de temps, l'année julienne. Mais si l'on a en vue la construction des éphémérides, il sera généralement plus commode de prendre une autre origine et une autre unité. L'unité de temps qu'on prend ordinairement est la durée actuelle de l'année tropique qui est égale à 365j,24220. Quant à l'origine des temps que l'on adopte, c'est le commencement de l'année 1850 telle que Bessel la définit. Bessel introduit une année fictive qui devait commencer à l'époque où la longitude moyenne du Soleil rapportée à l'équinoxe moyen est égale exactement à 280°. Le commencement de cette année fictive qui ne correspond qu'à celui de l'année civile d'un seul méridien, a l'avantage d'être le même pour tous les méridiens.

Voyons par quoi il faudra remplacer t dans nos formules précédentes par suite du changement de l'origine et de l'unité des temps. D'après ce qui précède, la longitude moyenne du Soleil au temps t compté en année julienne à partir de notre première origine est, en négligeant le terme en t^2, égale à

$$L = 280°\,46'\,43'',51 + 129602\,7'',6784\, t$$

Donc notre seconde origine des temps rapportée à l'ancienne origine est donnée par l'éq.

$$280° = 280°\,46'\,43'',51 + 1296027'',6784 . t$$

d'où l'on tire :

$$t = -\frac{46'\,43'',51}{1296027'',6784} = -\frac{2803'',51}{1296027'',6784} = -0^j,00216316.$$

Il faudra donc remplacer dans nos formules

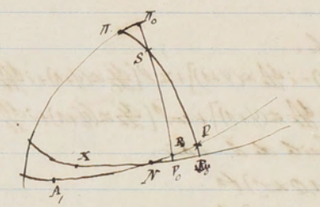
$$t \quad \text{par} \quad -0,00216316 + \frac{365,242220}{365,25}\,t$$

c'est à dire par :

$$-0,00216316 + (1 - 0,00002135).t$$

Nous ferons cette substitution dans la suite quand nous nous occuperons de ce que l'on appelle réduction des lieux moyens des étoiles.

V. Changements Variation annuelle de la longitude et de la latitude des astres. — Soit π_0 le pôle nord de l'écliptique à l'origine des temps et π le pôle nord de l'écliptique à l'époque t. Considérons une étoile quelconque S et soient P_2 et P les pôles des parallèles de S sur les deux écliptiques



Appelons l_0 et λ_0 la longitude et la latitude de l'astre à l'origine des temps et l et λ les valeurs de ces coord. à l'époque t. On aura

$$\lambda_0 = SP \qquad \lambda = SL$$

$$l_0 = XP_0 = XN + NP_0 = A + NP_0$$

$$l = A_1P = A_1N + NP = \gamma_1 + A + NL.$$

On aura donc dans le triangle $\pi\pi_0 S$

$$\pi\pi_0 = i \qquad \pi_0 S = \frac{\pi}{2} - \lambda_0 \qquad \pi S = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

$$\pi_0\pi S = \frac{\pi}{2} - NL = \frac{\pi}{2} - (l - \gamma_1 - A)$$

$$\pi\pi_0 S = \frac{\pi}{2} + NL_0 = \frac{\pi}{2} + l_0 - A.$$

On aura donc :

$$\cos\lambda = \cos i \cos\lambda_0 - \sin i \cos\lambda_0 \sin(l_0 - A) \qquad (1)$$

$$\cos\lambda \sin(l - \gamma_1 - A) = \sin i \sin\lambda_0 + \cos i \cos\lambda_0 \sin(l_0 - A) \qquad (2)$$

$$\cos\lambda \cos(l - \gamma_1 - A) = \cos\lambda_0 \cos(l_0 - A). \qquad (3)$$

* On peut écrire ces formules :

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{dl_1}{dt} + \text{fonction}\left\{\cos l'\left(\frac{di}{dt}\cos(l_1+l') - i\frac{dl'}{dt}\sin(l_1+l')\right] + \sin l'\left(\frac{di}{dt}\sin(l_1+l') + i\frac{dl'}{dt}\cos(l_1+l')\right)\right\}$$

$$\frac{dl'}{dt} = -\sin i'\left(\frac{di}{dt}\cos(l_1+l') - i\frac{dl'}{dt}\sin(l_1+l')\right] + \cos l'\left(\frac{di}{dt}\sin(l_1+l') + i\frac{dl'}{dt}\cos(l_1+l')\right]$$

Or on a, comme il est facile de le voir :

$$i\cos(l_1+l') = Pt + (R - a_2 Q\sin i')t^2.$$

$$i'\sin(l_1+l') = Qt + (S + a_2 P\sin i')t^2$$

D'où

$$\frac{di}{dt}\cos(l_1+l') - i\frac{dl'}{dt}\sin(l_1+l') = P + 2(R - a_2 Q\sin i')t + i\frac{dl_1}{dt}(l_1+l')\frac{dl_1}{dt}$$

$$\frac{di}{dt}\sin(l_1+l') + i\frac{dl'}{dt}\cos(l_1+l') = Q + 2(S + a_2 P\sin i')t - i\cos(l_1+l')\frac{dl_1}{dt}$$

Mais on a

$$\frac{1}{\sin i'}\frac{di}{dt} = a_2 + 2b_2 t \quad \text{et par suite} \quad \begin{cases} i\sin(l_1+l')\frac{dl_1}{dt} = a_2 Q\sin i'\cdot t \\ i\cos(l_1+l')\frac{dl_1}{dt} = a_2 P\sin i'\cdot t \end{cases}$$

Donc les seconds membres sont égaux à

$$P + (2R + a_2 Q\sin i')t = P + Vt$$

$$Q + (2S + a_2 P\sin i')t = Q + Vt.$$

Donc :

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{dl_1}{dt} + \text{fonction}\left(P\cos l + Q\sin l\right) + \text{fonction}\left(V\cos l + V\sin l\right).t$$

$$\frac{dl'}{dt} = -P\sin l + Q\cos l + \text{fonction}(-V\sin l + V\cos l).t.$$

Posons :

$$i'_0\cos l'_0 = P \qquad x\cos N = U$$

$$i'_0\sin l'_0 = Q \qquad x\sin N = V.$$

En différentiant les deux dernières éq., il vient :

$$-\sin\lambda\sin(l-\gamma_1-1)\frac{dl}{dt} + \cos\lambda\cos(l-\gamma_1-1)\left(\frac{dl}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}\right)$$

$$= \left[\cos i\sin\lambda_0 - \sin i\cos\lambda_0\cos(l_0-1)\right]\frac{di}{dt} - \sin i\cos\lambda_0\sin(l_0-1)\frac{dl_0}{dt}$$

$$\sin\lambda\cos(l-\gamma_1-1)\frac{d\lambda}{dt} + \cos\lambda\sin(l-\gamma_1-1)\left(\frac{dl}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}\right) = -\cos\lambda_0\sin(l_0-1)\frac{dl_0}{dt}$$

Remplaçons dans le deuxième membre leurs valeurs (1) (2) ; quant à la 2e remarquons que d'après (3) (6)

$$\cos\lambda_0\sin(l_0-1) = -\sin i\sin\lambda + \cos i\cos\lambda\sin(l-\gamma_1-1)$$

Nous avons alors :

$$-\sin\lambda\sin(l-\gamma_1-1)\frac{d\lambda}{dt} + \cos\lambda\cos(l-\gamma_1-1)\left(\frac{dl}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}\right) = \cos\lambda\frac{di}{dt} - \sin i\cos\lambda\sin(l-\gamma_1-1)\frac{dl_0}{dt}$$

$$+\sin\lambda\cos(l-\gamma_1-1)\frac{d\lambda}{dt} + \cos\lambda\sin(l-\gamma_1-1)\left(\frac{dl}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}\right) = +\left[\sin i\cos\lambda - \cos i\cos\lambda\sin(l-\gamma_1-1)\right]\frac{dl_0}{dt}$$

d'où l'on tire en résolvant :

$$\frac{dl}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} = \text{fonction}\lambda\cos(l-\gamma_1-1)\frac{di}{dt} + (\sin i\,\text{fonction}\lambda\sin(l-\gamma_1-1) - \cos i)\frac{dl_0}{dt}.$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sin(l-\gamma_1-1)\frac{di}{dt} + \sin i\cos(l-\gamma_1-1)\frac{dl_0}{dt}.$$

Si nous voulons calculer $\frac{dl}{dt}$ et $\frac{d\lambda}{dt}$ jusqu'en termes du 1er ordre en t, nous pourrons négliger (remplacer) dans le second membre i par i_0 et $\cos i$ par 1 ; alors on aura :

* $$\frac{dl}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} = \text{fonction}\lambda\left\{\cos(l-\gamma_1-1)\frac{di}{dt} + i\sin(l-\gamma_1-1)\frac{dl_0}{dt}\right\}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sin(l-\gamma_1-1)\frac{di}{dt} + i\cos(l-\gamma_1-1)\frac{dl_0}{dt}.$$

Nous nous bornerons à l'approximation adoptée (dans le cas de i suffisamment court)

$$\frac{i}{e} = \frac{di}{dt} \qquad \text{d'où} \qquad i = t\frac{di}{dt}$$

De plus on peut poser :

$$\cos\left(t\frac{dl_0}{dt}\right) = 1 \qquad \sin\left(t\frac{dl_0}{dt}\right) = t\frac{dl_0}{dt}.$$

On aura donc enfin :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \text{fonction}\lambda\cos\left(l-\gamma_1-1-t\frac{dl_0}{dt}\right)\frac{di}{dt}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sin\left(l-\gamma_1-1-t\frac{dl_0}{dt}\right)\frac{di}{dt}.$$

Telles sont les grandeurs qui permettent de passer de la longitude et de la latitude d'une étoile à une époque donnée à celles d'une autre époque donnée (comme nous l'expliquerons dans le paragraphe suivant) toutes les fois que de l'intervalle de ces deux époques n'est pas trop considérable et que l'étoile ne soit pas trop voisine du pôle. Dans le cas où ce procédé n'est pas applicable, on emploiera les formules rigoureuses données précédemment.

Le premier terme $\frac{d\gamma}{dt}$ de $\frac{dl}{dt}$ qui ne dépend

On aura alors:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dy}{dt} + i'\cos(l-l_0)\operatorname{tg}\Lambda + \kappa\cos(l-N).t.$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -i'\sin(l-l_0) - \kappa\sin(l-N).t.$$

En adoptant

$$a_0 = 50''{,}23465 \qquad i' = 0''{,}47919. \qquad l_0 = 172^\circ\,56'\,40''.$$

on aura à l'origine des temps:

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = +50''{,}23465 + 0''{,}47919.\cos(l-l_0)\operatorname{tg}\Lambda \\ \frac{d\Lambda}{dt} = -0''{,}47919\sin(l-l_0). \end{cases}$$

pas de la position particulière de l'écliptique porte le nom de précession générale annuelle.

Nous avons donné précédemment non pas les valeurs de i et Λ mais celles de $i\cos\Lambda$ et $i\sin\Lambda$, nous allons en déduire les valeurs de i et Λ ainsi que leurs variations annuelles. On a:

$$i\cos\Lambda = Pt + Rt^2$$

$$i\sin\Lambda = Qt + St^2$$

On en tire d'abord:

$$i^2 = (P^2+Q^2)t^2 + 2(PR+QS)t^3 + (R^2+S^2)t^4$$

$$= (P^2+Q^2)t^2\left\{1 + 2\frac{(PR+QS)}{P^2+Q^2}t + \frac{R^2+S^2}{P^2+Q^2}t^2\right\}.$$

d'où en développant

$$i = \sqrt{P^2+Q^2}.t + \frac{PR+QS}{\sqrt{P^2+Q^2}}t^2.$$

Maintenant posons:

$$\operatorname{tg}\Lambda_0 = \frac{Q}{P}$$

et choisissons Λ_0 de façon que $\cos\Lambda_0$ et $\sin\Lambda_0$ aient respectivement les signes de P et de Q. On aura:

$$i\cos\Lambda = \sqrt{P^2+Q^2}\cos\Lambda_0 + t + Rt^2 \quad -\sin\Lambda_0 \quad \cos\Lambda_0$$

$$i\sin\Lambda = \sqrt{P^2+Q^2}\sin\Lambda_0.t + St^2. \quad \cos\Lambda_0 \quad \sin\Lambda_0$$

d'où

$$i\sin(\Lambda-\Lambda_0) = (-R\sin\Lambda_0 + S\cos\Lambda_0)t^2$$

$$i\cos(\Lambda-\Lambda_0) = \sqrt{P^2+Q^2}.t + (R\cos\Lambda_0 + S\sin\Lambda_0)t^2$$

d'où

$$\operatorname{tg}(\Lambda-\Lambda_0) = \frac{(-R\sin\Lambda_0 + S\cos\Lambda_0)t}{\sqrt{P^2+Q^2} + (R\cos\Lambda_0 + S\sin\Lambda_0)t}t$$

En négligeant le 2e ordre, on aura donc:

$$\Lambda - \Lambda_0 = \frac{-R\sin\Lambda_0 + S\cos\Lambda_0}{\sqrt{P^2+Q^2}\sin 1''}t\left(1 - \frac{R\cos\Lambda_0 + S\sin\Lambda_0}{\sqrt{P^2+Q^2}}t\right).$$

Pour notre but, il nous suffit de prendre:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{-R\sin\Lambda_0 + S\cos\Lambda_0}{\sqrt{P^2+Q^2}\sin 1''}t$$

et

$$t\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{-R\sin\Lambda_0 + S\cos\Lambda_0}{\sqrt{P^2+Q^2}\sin 1''}t$$

En opérant le changement de l'origine et de l'unité des temps indiqué plus haut, on trouve:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = 50''{,}23465 + 0{,}000\,11243\,t^2$$

$$i\cos\Lambda = -0''{,}47565 + 0''{,}000\,00\,\overline{?6?}\,t^2$$

$$i\sin\Lambda = 0{,}05887 + 0''{,}000\,01964\,t^2$$

En substituant ces valeurs on trouve :

$$i = 0''{,}47919\,t - 0''{,}0000476\,t^2$$
$$\Lambda = 172°\,56'\,40'' - 8''{,}772\,t.$$

et par suite

$$\frac{di}{dt} = 0''{,}47919 - 0''{,}0000952.t.$$
$$\frac{d\Lambda}{dt} = -8''{,}772.$$

Si nous posons :

$$\gamma_1 + \Lambda + t\frac{d\Lambda}{dt} = M.$$

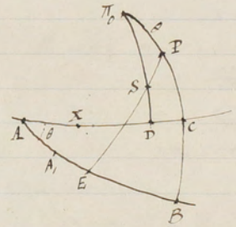
on aura en négligeant le 2e ordre :

$$M = 172°\,56'\,40'' + 32''{,}691.t$$

et les formules qui donne $\frac{dl}{dt}$ et $\frac{d\beta}{dt}$ seront :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{di}{dt}\operatorname{tg}\beta\cos(l-M)$$
$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{di}{dt}\sin(l-M).$$

VII. Variation annuelle de l'ascension droite et de la déclinaison d'une astre. — Soit Π_0 le point de l'équateur moyen à l'époque t et Π celui de l'écliptique à l'origine des temps. Soit S une étoile quelconque. Dans le triangle $\Pi_0 P S$, on a :



$$\Pi_0 P = 2 \qquad \Pi_0 S = \frac{\pi}{2} - \lambda_0 \qquad PS = \frac{\pi}{2} - \beta$$
$$S\Pi_0 P = DC = \frac{\pi}{2} - \overset{A}{\times} D = \frac{\pi}{2} - (\gamma + l_0)$$
$$SP\Pi_0 = \frac{\pi}{2} + AE = \frac{\pi}{2} + (X + \alpha)$$

α et δ étant l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile à l'époque t. On aura donc :

$$\sin\lambda_0 = \sin\beta\cos\varepsilon - \cos\beta\sin\varepsilon\sin(\alpha + X)$$
$$(1)\quad \begin{cases} \cos\lambda_0 \sin(\gamma + l_0) = \sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin(\alpha + X) \\ \cos\lambda_0\cos(\gamma + l_0) = \cos\beta\cos(\alpha + X) \end{cases}$$

On peut partir de ces éq. pour trouver $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$; mais il est plus simple de partir des formules suivantes :

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\lambda_0\sin\varepsilon\sin(l_0 + X)$$
$$(2)\quad \begin{cases} -\cos\beta\sin(\alpha + X) = \sin\lambda_0\sin\varepsilon - \cos\lambda_0\cos\varepsilon\sin(l_0 + X) \\ +\cos\beta\cos(\alpha + X) = \cos\lambda_0\cos(\gamma + l_0). \end{cases}$$

qui ne sont d'ailleurs qu'une transformation de précédente. On aura en différentiant la 1re éq.

$$\cos^2\frac{dv}{dt} = -(\sin\lambda\cos\Omega - \cos\lambda\sin\Omega\cos i(\zeta+\chi))\frac{d\Omega}{dt} + \cos\lambda\sin\Omega\sin i(\zeta+\chi)\frac{di}{dt}$$

ou bien d'après la 2e éq. (2) de la dernière page

$$\cos^2\frac{dv}{dt} = \cos^2 i(\zeta+\chi)\frac{d\Omega}{dt} + \sin^2\Omega\cos^2\lambda(\zeta+\chi)\frac{di}{dt}$$

ou enfin

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}\sin i(\zeta+\chi) + \frac{di}{dt}\sin\Omega\cos(\zeta+\chi).$$

En différentiant maintenant la 3e (2), il vient.

$$\cos^2 i\sin(\zeta+\chi)\frac{di}{dt} + \cos^2\Omega\sin(\zeta+\chi)\left(\frac{d\Omega}{dt}+\frac{d\chi}{dt}\right) = \cos\lambda\sin i(\zeta+\chi)\frac{d\chi}{dt}.$$

$$= \left[\sin\lambda\sin\Omega + \cos\lambda\cos\Omega\sin i(\zeta+\chi)\right]\frac{d\chi}{dt}.$$

En remplaçant $\frac{d\Omega}{dt}$ par sa valeur, il vient.

$$\frac{di}{dt} + \frac{d\chi}{dt} = -\operatorname{tg}^2\cos(\zeta+\chi)\frac{d\Omega}{dt} + \left(\cos i + \operatorname{tg}^2\sin(\zeta+\chi)\sin i\right)\frac{d\chi}{dt}.$$

Il ne nous reste plus qu'à développer ces expressions jusqu'au second ordre en t. On a (1)

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d\chi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\cos\beta + \operatorname{tg}\beta\sin i\left(\sin\beta\frac{d\chi}{dt} + \operatorname{tg}\beta\cos\alpha\left(\chi\sin\beta\frac{d\chi}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right)\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \cos\alpha\left(\sin\beta\frac{d\chi}{dt} + \chi\frac{d\beta}{dt}\right) - \sin\alpha\left(\chi\sin\beta\frac{d\chi}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right)$$

Nous allons d'abord montrer que l'on a

$$\chi\sin\beta\frac{d\chi}{dt} - \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

En effet on a:

$$\frac{d\chi}{dt} = 2+\frac{2}{5}t$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 2\beta t$$

$$\chi = \beta t + \beta t^2 = \frac{3Q}{\sin\beta_0}t + \frac{I - PQ\sin^2\alpha\sin\beta_0}{\sin\beta_0}t^2.$$

Donc:

$$\chi\sin\beta_0\frac{d\chi}{dt} - \frac{d\beta}{dt} = \left(2Q - 2\beta\right)t + \left[3(I - PQ\sin^2\alpha\sin\beta_0)\sin i + 2Q\sin i\right]t^2.$$

Le terme en t^2 est tout à fait insensible; quant au coefficient de t, les valeurs théoriques de β, Q et I montrent, et il est facile de se vérifier, que l'on a:

$$3Q\sin i - 2I = 0.$$

On aura donc:

$$\chi\sin\beta_0\frac{d\chi}{dt} - \frac{d\beta}{dt} = 0 \qquad \frac{d\beta}{dt} = \chi\sin\beta_0\frac{d\chi}{dt}.$$

On voit en même temps que $\chi\frac{d\beta}{dt}$ est du 3e ordre et peut être négligé. On aura donc simplement.

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d\chi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\cos\beta_0 + \frac{d\chi}{dt}\sin\beta_0\operatorname{tg}\beta\sin i$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\chi}{dt}\sin\beta_0\cos\alpha.$$

Posons:

$$m = -\frac{d\chi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\cos\beta_0 \qquad n = \frac{d\chi}{dt}\sin\beta_0$$

Nous aurons:

$$\frac{dx}{dt} = m + n\,tg\beta \sin\alpha$$
$$\frac{d\beta}{dt} = n\cos\alpha.$$

Les quantités m et n qui ne dépendent point de α ni de β, peuvent être mises sous la forme:

$$m = \mu\beta + \mu' t^2$$
$$n = \nu\beta + \nu' t^2$$

et l'on aura:

$$\mu = -\frac{e}{f''} + 2\sin\beta_0 \qquad \mu' = -\frac{e}{2f''} + 2\sin\beta_0$$
$$\nu = 2\sin\beta_0 \qquad \nu' = 2\sin\beta_0.$$

En opérant le changement d'unité dans χ et dx, on trouve:

$$\chi = 50'',37032\,t - 0'',00010934\,t^2$$
$$x = 0'',14791\,t - 0'',00024167.t^2.$$

Quant à β_0, il reste sensiblement le même. On aura donc en effectuant:

$$m = 46'',05911\,t + 0'',00038304\,t^2$$
$$n = 20'',05197\,t - 0'',00008706\,t^2.$$

Voici maintenant la manière dont on doit se servir des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ pour passer d'une époque donnée à une autre époque donnée. Soit en général $f(x)$ une fonction de x pour laquelle on peut négliger les différences Δ^3. En posant

$$x = \tfrac{1}{2}(t+t') \qquad \Delta x = \tfrac{1}{2}(t'-t)$$

on aura

$$f(x-\Delta x) = f(t) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x)$$
$$f(x+\Delta x) = f(t') = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x)$$

d'où

$$f(t') - f(t) = 2\Delta x f'(x). = (t'-t) f'\left(\tfrac{1}{2}(t+t')\right)$$

On aura donc:

$$f(t') = f(t) + f'\left(\tfrac{t+t'}{2}\right).(t'-t).$$

Ce qui veut dire que pour avoir $f(t')$ il suffit d'ajouter à $f(t)$ le produit par $t'-t$ de la dérivée de $f(x)$ pour la valeur $x = \frac{1}{2}(t+t')$ c'est-à-dire la moyenne des valeurs t et t'.

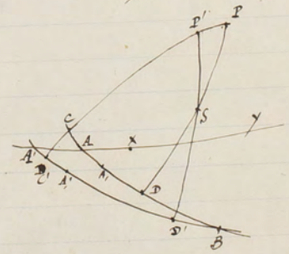
Donc pour passer de α et β pour l'époque t à α et β de l'époque t', il suffit de calculer par les formules

précédents on n'a pas besoin de connaître les valeurs exactes de α et δ, les valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ pour l'époque suffisent).

Dans les catalogues d'étoiles on donne en général, la valeur de $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$ pour l'époque de chaque catalogue et on donne le nom de variations annuelles. On donne aussi dans le nom de variations séculaires, les valeurs de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ et $\frac{d^2\delta}{dt^2}$, multipliées par 100, sachant que nous supposons tout à l'heure les expressions de α et δ que l'on peut regarder comme constantes pendant un intervalle suffisamment petit. On calculera à l'aide de ces variations séculaires les valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$ pour l'époque $\frac{1}{2}(t+t')$ et l'on achèvera le calcul comme nous l'avons expliqué.

Il faut remarquer que ce procédé ne peut s'appliquer que si $t-t'$ est petit, par exemple compris entre -100 ans et $+100$ ans, 2° que l'étoile ne soit pas trop près du pôle, car nous allons voir que si elle est ainsi, les termes en $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ et $\frac{d^2\delta}{dt^2}$ de α et δ sont les influences trop considérables pour être négligés.

VIII. *Calcul rigoureux des coordonnées d'une étoile à une époque donnée connaissant ses coordonnées à une autre époque donnée.* — Soient AB et A'B les équateurs moyens aux époques t et t' et P, P' leurs pôles boréaux. Soit S une étoile quelconque. Nous nous proposons, étant données l'ascension droite et la déclinaison à l'époque t, de déterminer rigoureusement l'ascension droite et la déclinaison à l'époque t'. Or dans le triangle SPP' on a :



$$PP' = ABA' \qquad P = 90° - DB \qquad P' = 90° + D'B.$$

On pourra donc résoudre notre problème quand on aura résolu préalablement le triangle ABA'. Procédons

Donc d'abord à la résolution du triangle sphérique.

Posons pour abréger

$AB = 90° + z$ $\quad A'B = 90° + z'$ $\quad ABA' = \eta$.

On aura pour les autres éléments du triangle:

$AA' = X' - X$ $\quad A'AB = 180° - A$ $\quad AA'B = A'$.

Nous avons donc en appliquant les formules de Delambre:

$$\sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{z'+z}{2} = \cos\frac{X'+X}{2}\sin\frac{A'-A}{2}.$$

$$\sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{z'+z}{2} = \sin\frac{X'-X}{2}\sin\frac{A'+A}{2}.$$

$$\cos\frac{\eta}{2}\sin\frac{z'+z}{2} = \sin\frac{X'-X}{2}\cos\frac{A'+A}{2}.$$

$$\cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{z'+z}{2} = \cos\frac{X'+X}{2}\cos\frac{A'-A}{2}.$$

Ces formules permettent de calculer z, z' et η par logarithmes; et comme il y a ici n éq. pour 3 inconnues, on aura une équation de contrôle pour vérifier les résultats.

Cela étant, on a:

$$DB = 90° - CA - AA_1 - A_1D = 90° - (\alpha + X + z)$$

$$D'B = 90° + A'C' - A'A_1' - A_1'D = 90° - (\alpha + X' + z')$$

X' désignant la valeur de x à l'époque t'. On aura donc.

$$PP' = \eta \qquad P = \alpha + X + z \qquad P' = 180° - (\alpha + X' - z').$$

On aura donc:

$$\sin P' = \cos\eta \sin P + \sin\eta \cos P \cos(\alpha + X + z)$$

$$\cos P' \cos(\alpha + X' - z') = -\sin\eta \cos P + \cos\eta \cos P \cos(\alpha + X + z)$$

$$\cos P' \sin(\alpha + X' - z') = \cos P \sin(\alpha + X + z)$$

L'on sait par les propriété précédent z z' et η et que l'on peut d'ailleurs calculer facilement X et X' par les formules:

$$X = et + ft^2 \qquad X' = et' + ft'^2$$

on aura donc α et P' par les éq. précédentes.

On peut employer pour la résolution de ces dernières équations les auxiliaires A et a définis par:

$$A \sin a = \tan P.$$

$$A \cos a = \cos P \cos(\alpha + X + z)$$

et l'on aura alors:

$$\sin P' = A \sin(\eta + a)$$

$$\cos P' \cos(\alpha + X' - z') = A \cos(\eta + a)$$

$$\cos P' \sin(\alpha + X' - z') = \cos P \sin(\alpha + X + z).$$

Nous avons supposé jusqu'ici que l'astre considéré
était une étoile absolument fixe c'à d. dépourvue de mouvement
propre. Or, la plupart des étoiles réputées fixes ont
un mouvement sensible; mais dans un laps de temps peu
considérable, on peut les supposer se mouvoir sur un
grand cercle de la sphère céleste. Et, pour une étoile horaire,
on peut même supposer que son ascension droite et sa
déclinaison varient proportionnellement au temps. Pour
ces étoiles appelons α' et δ' les variations annuelles
de l'ascension droite et de la déclinaison qui résultent de
son mouvement propre. Alors après avoir calculer α et δ par la
méthode précédente il faudra ajouter ensuite aux résultats
obtenus les termes $\alpha'(t-t)$ et $\delta'(t-t)$.

Pour les étoiles voisines du pôle, les variations de
l'ascension droite et de la déclinaison peuvent être
irrégulières. Car 1° pour un petit déplacement de l'astre
angulaire suivant un grand cercle, l'ascension droite
varie considérablement; 2° Pour la déclinaison, elle
peut passer par un maximum ou par un minimum
variable. Considérons pour ces étoiles les quantités:

$$\cos P\cos(\alpha+X+z) \qquad \cos P\sin(\alpha+X+z)$$

qui sont les coordonnées rectangulaires de l'étoile par rapport
aux axes OC et OB de la figure précédente. On peut
considérer ces coordonnées comme variant proportionnellement
au temps; il suffira pour tenir compte du mouvement
propre, de remplacer dans les éq. précédentes ces coordonnées par:

$$\cos P\cos(\alpha+X+z)+\alpha'(t-t) \qquad \cos P\sin(\alpha+X+z)+\delta'(t-t)$$

α' et δ' étant ici les variations annuelles de ces coordonnées.

Si le mouvement propre de l'étoile est inconnu et
que l'on compare les résultats obtenus par le nouveau
calcul précédent au résultat actuel de l'observation,
cette comparaison permettra de déterminer ce
mouvement propre. On aura par exemple dans le cas
d'une étoile horaire les équations:

$$\alpha \text{ observée} = \alpha \text{ calculé} + k(t'-t) \cdot$$

et de même pour la déclinaison. On a

$$k = \frac{\alpha \text{ observée} - \alpha \text{ calculé}}{t'-t}$$

Pour que le mouvement propre soit bien déterminé, il faut évidemment que l'intervalle $t'-t$ ne soit pas trop petit.

Nous verrons tout à l'heure un moyen plus expéditif de résoudre le problème que nous venons de traiter. Mais auparavant, nous allons traiter une question aussi intéressante qui se rattache immédiatement au problème précédent.

VIII. *Aspect du ciel à des époques différentes.* — Par suite de la précession en ascension droite et surtout en déclinaison de chaque étoile, la même étoile n'occupe pas constamment la même place par rapport à l'horizon d'un même lieu. Telle étoile qui était circumpolaire peut cesser de l'être et devenir horaire tandis que d'autres peuvent cesser de se coucher. Au Sud, on peut voir certaines étoiles disparaître pour toujours et d'autres commencer leur apparition au-dessus de l'horizon.

D'un autre côté, par suite du déplacement du pôle, l'étoile α de la Petite Ourse qui est à une si petite distance du pôle passera et qu'on appelle pour cela étoile polaire pourra perdre ce nom par suite de son éloignement du pôle; tandis que peut-être une autre étoile de grandeur comparable à α Petite Ourse prendra la place qu'occupe actuellement cette étoile privilégiée; et ainsi de suite. Ce sont là autant d'effets que produira la précession et qui font changer notablement l'aspect de la voute céleste vue d'un même lieu de la surface de la Terre.

Si l'on veut se faire une idée exacte de l'aspect général à une époque t' avant ou après l'époque t, il suffira de déterminer de la manière déjà indiquée à l'époque t par rapport à l'équateur et à l'équinoxe

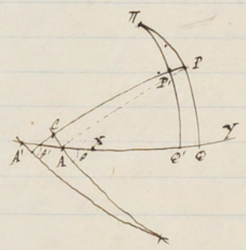
de l'époque t et la transformer suivant la courbe idéale qu'on aura construite pour l'époque t en une courbe qui convienne à l'époque t'. N'en allons donc résoudre cette question :

Etant donnés deux époques t & t', calculer l'ascension droite et la déclinaison du pôle à l'époque t' par rapport à l'équateur & à l'équinoxe moyens de l'époque t.

Si nous appelons A & D ces deux coordonnées demandées, il est facile de voir que l'on a :

$$A = -(z+x) \qquad D = 90° - \gamma$$

z & γ étant les quantités que nous avons considérées dans le paragraphe précédent. On aura donc A & D par les formules du paragraphe précédent. Mais si l'on veut avoir que A & D sans avoir besoin de z, on peut employer un autre procédé plus commode. Soit π le pôle de l'écliptique fixe, P P' les pôles des équateurs aux temps t & t'. On a



$$\gamma\pi P = 90° - \gamma \qquad \chi\pi Q' = 90° - \chi'$$

Donc :

$$P\pi P' = Q Q' = \chi' - \chi.$$

De plus on

$$\pi P = \delta \qquad \pi P' = \delta' \qquad PP' = 90° - D$$

$$\pi P P' = 90° - AC = 90° + A + \chi$$

On aura donc :

$$\sin D = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta'\cos(\chi' - \chi)$$

$$\cos D \sin A^{(A+\chi)} = -\cos\delta\cos\delta' + \cos\delta\sin\delta'\cos(\chi' - \chi)$$

$$\cos D \cos A^{(A+\chi)} = \sin\delta'\sin(\chi' - \chi).$$

formules qui permettent de déterminer A & D.

Si l'on n'a pas besoin d'une grande précision, on pourra prendre $\delta = \delta' = \delta_0$ et les deux dernières éq. deviendront

$$\cos D \sin A^{(A+\chi)} = -2\sin\delta_0\cos\delta_0\sin^2\frac{\chi'-\chi}{2}$$

$$\cos D \cos A^{(A+\chi)} = 2\sin\delta_0\sin\frac{\chi'-\chi}{2}\cos\frac{\chi'-\chi}{2}.$$

D'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} A^{(A+\chi)} = -\cos\delta_0 \operatorname{tg}\frac{\chi'-\chi}{2}$$

$$\cos D = \frac{\sin\delta_0 \sin(\chi'-\chi)}{\cos(A+\chi)}$$

On écrira l'ambiguïté dans la valeur de A+X en remarquant que cos(A+X) a toujours le même signe que $\Delta(Y-X)$.

Cherchons par exemple les coordonnées de la poste au commencement de notre 8me colonne qui commence à l'accrochement de l'Empereur Jovienus, portant l'épithète et l'équinoxe de l'an 1650, époque de l'atlas de Dien & Flamsteed. On a ici:

$$t=t \qquad t'=-2509$$

On peut négliger x et l'on a:

$$Y=50'' \qquad Y'=+50'',3703\,t'-0'',000109\,t'^2.$$

On en trouve en effectuant

$$Y'-Y=-35°\,18'\,35''$$

et par suite:

$$A=196°\,16',5 \qquad D=76°\,7',7.$$

IX. Développement des quantités z, z' et y en fonction du temps. — Lorsque l'intervalle t-t est compris au plus entre -25 ans et +100 ans, on peut employer, pour le calcul des quantités auxiliaires z, z' et y, les formules très-commodes et suffisamment approchées que nous allons développer.

Posons pour abréger:

$$\frac{t'-t}{2}=\varphi \qquad \frac{\delta'-\delta}{2}=\omega \qquad \frac{\delta'+\delta}{2}=\delta_0+\varepsilon$$

nous aurons:

$$\varphi=\frac{3}{2}(t'-t)+\frac{3}{2}(t'^2-t^2) \qquad \omega=\frac{3}{2}(t'^2-t^2) \qquad \varepsilon=\frac{3}{2}(t'^2+t^2).$$

Posons en outre:

$$\frac{z+z'}{2}=\lambda \qquad \frac{z'-z}{2}=\mu \qquad \frac{y}{2}=\nu.$$

Les équations du paragraphe VIII deviendront:

$$\sin\nu\sin\mu=\cos\varphi\sin\omega$$
$$\sin\nu\cos\mu=\sin\varphi\sin(\delta_0+\varepsilon)$$
$$\cos\nu\sin\lambda=\sin\varphi\cos(\delta_0+\varepsilon)$$
$$\cos\nu\cos\lambda=\cos\varphi\cos\omega.$$

On en tire:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\lambda=\operatorname{tg}\varphi\frac{\cos(\delta_0+\varepsilon)}{\cos\omega}$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\mu=\cot\varphi\frac{\sin\omega}{\sin(\delta_0+\varepsilon)}$$

(3). $\qquad \psi_r = \frac{\omega}{\varphi_{1,1}} (t+\varepsilon) \frac{\sin \lambda}{\sin \varphi_{1,1}}$.

Négligeons les puissances de t supérieures à la 3ième.

1° En poursuivant la série de l'éq. (1)

$$\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^3 \sin^2 1'' = (\varphi + \tfrac{1}{3}\varphi^3 \sin^2 1'')(\cos b_0 - \varepsilon \sin 1'' \sin b_0)$$

ou bien

$$\lambda + \tfrac{1}{3}\lambda^3 \sin^2 1'' = \varphi \cos b_0 - \varphi \varepsilon \sin 1'' \sin b_0 + \tfrac{1}{3}\varphi^3 \sin^2 1'' \cos b_0$$

ou en remplaçant λ^3 par sa valeur approché à 3e ordre près $\varphi^3 \cos^3 b_0$

$$\lambda = \varphi \cos b_0 + \tfrac{1}{3}\varphi^3 \sin^2 1'' \cos b_0 \sin^2 b_0 - \varphi \varepsilon \sin 1'' \sin b_0$$

2° On constate que le dernier coefficient $\varphi \varepsilon \sin 1''$ est à peu près égal à $0{,}000000000^{09}_{}\, t(t^2+t^2)$; il est donc tout à fait insensible. Il en sera en général de même pour les termes du 3ème ordre qui ne contiennent pas $(t-t)^3$. Nous gardons donc seulement les termes qui contiennent $(t-t)^2$ et les termes qui contiennent $t(t-t)^2$ et $(t-t)^3$.

Nous avons ainsi

$$\lambda = \varphi \cos b_0 + \tfrac{1}{3}\varphi^3 \sin^2 1'' \cos b_0 \sin^2 b_0.$$

2° L'éq. (2) donne :

$$\mu + \tfrac{1}{3}\mu^3 \sin^2 1'' = \frac{1}{\varphi \sin 1''(1+\frac{1}{3}\varphi^2 \sin^2 1'')} \times \frac{\omega(1+\frac{1}{3}\omega^2 \sin^2 1'')}{\sin b_0 (t+t) + \beta \sin 1'' \cos b_0}$$

ou bien

$$\mu = \frac{\omega}{\varphi \sin 1'' \sin b_0}\left(1-\tfrac{1}{3}\varphi^2 \sin^2 1''\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\omega^2 \sin^2 1''\right)\left(1-\beta \sin 1'' \cot b_0\right) - \tfrac{1}{3}\mu^3 \sin^2 1''$$

On constate que la partie principale de μ à savoir $\frac{\omega}{\varphi \sin 1'' \sin b_0}$ a un coefficient inférieur à $0{,}''1$; la seule que l'on puisse négliger tant le reste; et l'on aura sensiblement.

$$\mu = \frac{\omega}{\varphi \sin 1'' \sin b_0}$$

3° L'éq. (3) donne enfin :

$$\nu + \tfrac{1}{3}\nu^3 \sin^2 1'' = \left(\psi b_0 + \frac{\varepsilon \sin 1''}{\cos b_0}\right)\left(1-\tfrac{1}{6}\lambda^2 \sin^2 1''\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\mu^2 \sin^2 1''\right).$$

$$= \lambda \psi b_0 - \tfrac{1}{6}\lambda^3 \sin^2 1'' \psi b_0$$

tant le reste étant négligeable. On en tire :

$$\nu = \lambda \psi b_0 - \tfrac{1}{6}\lambda^3 \sin^2 1'' \psi b_0 - \tfrac{1}{3}\lambda^3 \psi^3 b_0$$

$$= \varphi \sin b_0 + \tfrac{1}{3}\varphi^3 \sin^2 1'' \cos^3 b_0 - \tfrac{1}{6}\varphi^3 \sin^2 1'' \sin b_0 \cos^2 b_0 - \tfrac{1}{3}\lambda^3 \sin^2 1'' \sin^3 b_0.$$

ou enfin

$$\nu = \varphi \sin b_0 - \tfrac{1}{6}\varphi^3 \sin^2 1'' \sin b_0 \cos^2 b_0$$

En substituant maintenant dans λ et ν les valeurs de

φ et ω_1 on aura :

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\alpha\omega k_0(t'-t) + \tfrac{1}{2}\delta\omega k_0(t'^2-t^2) + \tfrac{1}{24}\alpha^3\omega k_0^3(t'-t)^3$$

$$\mu = \frac{\gamma}{\alpha^2+\omega^2 k_0^2}(t'+t) - \frac{\delta\gamma}{\alpha^2+\omega^2 k_0^2}(t'+t)^2$$

$$\nu = \tfrac{1}{2}\alpha\omega k_0(t'-t) + \tfrac{1}{2}\delta\omega k_0(t'^2-t^2) - \tfrac{1}{48}\alpha^3\omega k_0^3(t'-t)^3.$$

Pour se mettre ces formules en nombre, il faut connaître outre α, δ, les valeurs de α_0 et de γ après le changement de l'origine et de l'unité des temps. Mais on constate que l'éq. qui donne δ reste sensiblement constante la même. — On trouve en effectuant le calcul

$$\frac{z+z'}{2} = 23'',10351(t'-t) - 0'',0000501\,5(t'^2-t^2) + 0'',0000000182(t'-t)^3$$

$$\frac{z-z'}{2} = 0'',07437(t'+t) + 0'',00000016(t'+t)^2$$

$$y = 20'',05198(t'-t) - 0'',0000+352(t'^2+t^2) - 0'',000000\,0420(t'-t)^3.$$

Ces équations permettent de résoudre commodément un problème que devrait s'être proposé, à savoir : Etant donnés l'ascension droite et la déclinaison des étoiles d'un catalogue pour le commencement de l'an 1845, trouver les valeurs de ces coordonnées pour le commencement de chaque année depuis 1755 à 1955.

Dans un pareil problème, t est une constante et $\frac{z+z'}{2}$ et $\frac{z'-z}{2}$ sont des polynômes du 3ème degré et y un polynome du 2e degré en t'. On pourra donc calculer, à l'aide des différences, les valeurs de ces quantités pour des années équidistantes. On calculera ensuite, au moyen des formules données dans le paragraphe VII l'ascension droite et la déclinaison d'abord de 10 à 10 ans ; puis on interpolera on aura les valeurs de ces coordonnées de 5 en 5 ans. Si l'étoile est trop près du pôle, on interpolera non pas α et δ qui varient trop rapidement, mais les quantités $\cos^2\omega\sin(\alpha+\chi-z')$ et $\cos^2\omega\sin(\alpha+\chi-z')$ dont la variation est plus lente.

Ce procédé devra être employé pour toutes les étoiles dont les déclinaisons dépassent 84° 0'S. ou N. la distance du pôle de moins de 6°. Pour les autres étoiles, on pourra employer avec sécurité le développement de α et δ en séries ordonnées suivant les puissances de $t'-t$.

X. Développement de α et β suivant les puissances de $t-t_0$. – Soit α et β l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile au temps t et α' β' les mêmes quantités au temps t'. Si l'on peut développer α' et β' suivant les puissances ascendantes de $t'-t$, on aura d'après le théorème de Taylor :

$$\alpha' = \alpha + \frac{d\alpha}{dt}(t'-t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t'-t)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3}(t'-t)^3 + \dots$$

$$\beta' = \beta + \frac{d\beta}{dt}(t'-t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{dt^2}(t'-t)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\beta}{dt^3}(t'-t)^3 + \dots$$

Nous allons calculer les trois coefficients de ces équations.

Nous avons déjà trouvé

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{d\beta}{dt} = n\cos\alpha$$

m et n étant de la forme

$$m = \mu + \mu' t \qquad n = \nu + \nu' t.$$

En différentiant de nouveau nous avons.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\mu' + \frac{1}{2}\nu' \sin\alpha \operatorname{tg}\beta + \left(\tfrac{1}{2} n\cos\alpha \operatorname{tg}\beta (m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta) + \tfrac{1}{2} n \sin\alpha \left(1 + \operatorname{tg}^2\beta\right)\right) n\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{1}{2}\nu'\cos\alpha - \frac{1}{2} n\sin\alpha (m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta)$$

ou en ordonnant par rapport à $\operatorname{tg}\beta$:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\mu' + \frac{1}{2} n^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2}(\nu' \sin\alpha + m n \cos\alpha)\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{2} n^2 \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{1}{2}\nu'\cos\alpha - \frac{1}{2} m n \sin\alpha - \frac{1}{2} n^2 \sin^2\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

En différentiant encore une fois, on aura :

$$\frac{1}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \frac{1}{6} n\nu' \sin 2\alpha + \frac{1}{6} n^2 \cos 2\alpha (m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta) + \frac{1}{6}(\nu'\cos\alpha - m n \sin\alpha)(m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\beta$$
$$+ \frac{1}{6}(m\nu' + n\mu')\cos\alpha \operatorname{tg}\beta + \frac{1}{3} n\nu' \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta + \frac{1}{3} n^2 \cos 2\alpha \operatorname{tg}^2\beta (m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta)$$
$$+ \frac{1}{6}\overset{n\cos\alpha}{(}\nu'\sin\alpha + m n\cos\alpha)\left(1 + \operatorname{tg}^2\beta\right) + \frac{1}{3} n^2 \sin 2\alpha \overset{\cos}{\operatorname{tg}}\beta \left(1 + \operatorname{tg}^2\beta\right).$$

$$\frac{1}{6}\frac{d^3\beta}{dt^3} = -\frac{1}{6}\nu'\sin\alpha (m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta) - \frac{1}{6}(m\nu' + n\mu')\sin\alpha - \frac{1}{6} m n \cos\alpha (m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta)$$
$$- \frac{1}{3} n\nu' \sin^2\alpha \operatorname{tg}\beta - \frac{1}{6} n^2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha \operatorname{tg}^2\beta \; \overset{(m + n\sin\alpha \operatorname{tg}\beta)}{+} - \frac{1}{6} n^2 \sin^2\alpha \overset{\cos}{\operatorname{tg}}\beta \left(1 + \operatorname{tg}^2\beta\right).$$

ou en ordonnant :

$$\frac{1}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \frac{1}{12} m n^2 + \frac{1}{6} n\nu' \sin 2\alpha + \frac{1}{6} m n^2 \cos 2\alpha.$$
$$+ \left\{\left(\tfrac{1}{12} n^3 - \tfrac{1}{6} m^2 n\right)\sin\alpha + \left(\tfrac{1}{3} m\nu' + \tfrac{1}{6} n\mu'\right)\cos\alpha + \tfrac{1}{4} n^3 \sin 3\alpha\right\}\operatorname{tg}\beta$$
$$+ \left(\tfrac{1}{2} n\nu' \sin 2\alpha + \tfrac{1}{2} m n^2 \cos 2\alpha\right)\operatorname{tg}^2\beta + \tfrac{1}{3} n^3 \sin 3\alpha \operatorname{tg}^3\beta$$

$$\frac{1}{6}\frac{d^3\beta}{dt^3} = -\left(\tfrac{1}{3}\nu' + \tfrac{1}{6}\mu'\right)\sin\alpha - \frac{1}{6} m^2 n\cos\alpha - \frac{1}{12} n^3 \sin 2\alpha \sin\alpha$$
$$- \left(\tfrac{1}{2} n\nu' \sin^2\alpha + \tfrac{1}{4} m n^2 \sin 2\alpha\right)\operatorname{tg}\beta - \frac{1}{4} n^3 \sin 2\alpha \sin\alpha \operatorname{tg}^2\beta.$$

Ces deux dernières quantités n'acquièrent de valeurs sensibles que pour des étoiles très-près du pôle. Pour ces dernières les dernières termes même peuvent devenir sensibles.

Pour nous rendre compte de l'influence du $\frac{dv^2}{dt^2}$, prenons seulement le terme en $tg^2\delta$. Ce terme provient de la différentielle dernière des 3e terme en $tg^2\alpha$ qui est:

$$+n^3 \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}(n+n\alpha\, tg\alpha)\, tg^2\delta + n^3 \alpha\sin\alpha\, tg^2\alpha(1+tg^2\delta).$$ nous.

Le terme cherché est donc:

$$\frac{1}{4} n^4 \alpha \sin 4\alpha\, tg^4\delta.$$

Si l'on veut que l'erreur commise en omettant le terme soit moindre que $0''{,}01$, on devra avoir:

$$\frac{1}{4} \frac{n^4 \alpha^4 \sin^4 1''}{\text{rad}^4} tg^4\delta \frac{1}{15} < 0{,}01.$$

c'à d:

$$tg^4\delta < \frac{26}{n^4 \alpha^4 \sin^4 1''}.$$

On trouve en effectuant à peu près: $\delta < 89°\,58'$.

En étudiant de même l'influence des dérivés troisièmes on trouve que l'erreur commise en les négligeant est moindre qu'une demi-centième de seconde d'arc en R.A. tant que δ est moindre que 84°.

Pour les étoiles, le calcul de $\alpha' \delta'$ se réduira donc en définitive dans les formules de la forme:

$$\alpha' = \alpha + (\overset{\text{III}}{\sigma}(t'-t) + \sigma'(t'-t)^2 + \ldots$$

$$\delta' = \delta + (\tau + \varepsilon)(t'-t) + \tau'(t'-t)^2.$$

$\sigma, \tau, \sigma' \tau'$ désignent les valeurs des dérivés précédemment trouvés.

XII. De la Nutation.

I Nous avons fait l'abstraction des quantités Ψ et Θ qui entrent dans les expressions de χ et Θ ainsi que dans celles de χ_1 et Θ_1. Nous allons les prendre en considération dans ce chapitre.

La Théorie nous apprend que Ψ et Θ sont de la forme:

$$\Psi = N_1 \sin b + N_1' \sin 2b + N_2 \sin 2\odot + N_3 \sin 2\mathbb{C} + N_4 \sin(\odot - \pi') + N_5 \sin(\odot + \pi') + N_6 \sin(\mathbb{C} - \pi')$$

$$\Theta = N \cos b + N' \cos 2b + N_2 \cos 2\odot + N_3 \cos 2\mathbb{C} + N_5 \cos(\odot + \pi')$$

où les N et les N' désignent des constantes et

b la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire

$\odot$ la longitude du Soleil

$\mathbb{C}$ la longitude de la Lune

π la longitude du périgée de l'orbite solaire

π' la longitude du périgée de l'orbite lunaire.

Les quantités N et N' ne sont pas absolument fixes. Elles dépendent de l'obliquité de l'écliptique à l'époque considérée, et varient à peu près proportionnellement au temps. D'après les recherches de M. Peters, leurs valeurs en 1850 sont:

$N = -17'',2491$	$N = +9'',2236$
$N_1 = +0'',2073$	$N_1 = -0'',0897$
$N_2 = -1'',2692$	$N_2 = +0'',5508$
$N_3 = -0'',2041$	$N_3 = +0'',0886$
$N_4 = +0'',1277$	
$N_5 = -0'',0213$	$N_5 = +0'',0093.$
$N_6 = +0'',0677$	

Le coefficient N du terme en $\cos b$ dans l'expression de Θ s'appelle la <u>constante de la nutation</u>.

II. Théorie. Nutations en ascension droite et en déclinaison. Si nous faisons abstraction de Ψ et Θ, les coordonnées d'une étoile ainsi obtenues s'appellent les coordonnées moyennes. Nous nous proposons ici, étant données les

coordonnées moyennes d'une étoile, de déterminer ses coordonnées vraies en tenant compte des effets de la nutation.

La nutation ayant pour effet d'augmenter les grandeurs $\psi \sin\varepsilon$ de Ψ, ε de Θ, on aura

$$\alpha \text{ vrai} = \alpha \text{ moy.} + \frac{\partial\alpha}{\partial\psi}\Psi + \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\Theta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\psi\partial\varepsilon}\Psi\Theta + \dots$$

$$\delta \text{ vrai} = \delta \text{ moy.} + \frac{\partial\delta}{\partial\psi}\Psi + \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}\Theta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta}{\partial\psi\partial\varepsilon}\Psi\Theta + \dots$$

Or d'après ce que nous avons vu au paragraphe VII, du chapitre précédent, on a évidemment:

$$d\alpha = (\cos\varepsilon + \operatorname{tg}\delta\sin\alpha\sin\varepsilon)\,d\psi - \operatorname{tg}\delta\cos\alpha\,d\varepsilon.$$

$$d\delta = \sin\varepsilon\cos\alpha\,d\psi + \sin\alpha\,d\varepsilon$$

On aura donc:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\psi} = \cos\varepsilon + \sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\alpha \qquad \frac{\partial\delta}{\partial\psi} = \sin\varepsilon\cos\alpha$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = -\operatorname{tg}\delta\cos\alpha \qquad \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \sin\alpha.$$

En différentiant de nouveau, il vient:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\psi^2} = \sin\varepsilon\sin\alpha(1+\operatorname{tg}^2\delta).\sin\varepsilon\cos\alpha + \sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\cos\alpha(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\alpha)$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\psi\partial\varepsilon} = (-\sin\varepsilon + \cos\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\alpha) + \sin\varepsilon(1+\operatorname{tg}^2\delta)\sin^2\alpha - \sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\operatorname{tg}\delta\cos\alpha$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varepsilon^2} = -(1+\operatorname{tg}^2\delta)\cos\alpha\sin\alpha + \operatorname{tg}\delta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\delta\cos\alpha$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\psi^2} = \cos\alpha\cos\delta - \sin\varepsilon\sin\alpha(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\alpha)$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\psi\partial\varepsilon} = \cos\alpha(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\alpha)$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\varepsilon^2} = \sin^2\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\delta\cos\alpha.$$

ou bien:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\psi^2} = \sin^2\varepsilon\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \cot\varepsilon\cos\alpha\operatorname{tg}\delta + \sin 2\alpha\operatorname{tg}^2\delta\right)$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\psi\partial\varepsilon} = -\sin\varepsilon\left(\cos^2\alpha - \cot\varepsilon\sin\alpha\operatorname{tg}\delta + \cos 2\alpha\operatorname{tg}^2\delta\right)$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varepsilon^2} = -\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \sin 2\alpha\operatorname{tg}^2\delta\right)$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\psi^2} = -\sin^2\varepsilon\sin\alpha\left(\cot\varepsilon + \sin\alpha\operatorname{tg}\delta\right)$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\psi\partial\varepsilon} = \sin\varepsilon\cos\alpha\left(\cot\varepsilon + \sin\alpha\operatorname{tg}\delta\right)$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial\varepsilon^2} = -\cos^2\alpha\operatorname{tg}\delta.$$

Si nous nous bornons d'abord aux termes du premier ordre, on aura de suite

$$\Delta\alpha = \alpha \text{ vrai} - \alpha \text{ moy.}$$

$$\Delta\delta = \delta \text{ vrai} - \delta \text{ moy.}$$

$$\Delta\alpha = (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)\Psi - \Theta - \cos\alpha\operatorname{tg}\delta. \quad (1)$$

$$\Delta\delta = \sin\varepsilon\cos\alpha.\Psi + \sin\alpha. \quad (2)$$

Parmi les termes du second ordre, nous qui pendant

avec quelque influence sensible sont ceux qui proviennent des premiers termes du développement V et Θ. Nous pouvons donc prendre dans le calcul des termes du second ordre

$$V = N \sin\theta \qquad \Theta = N\cos\theta$$

Nous aurons alors:

$$V^2 = N^2\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}N^2 - \tfrac{1}{2}N^2\cos 2\theta$$
$$\Theta^2 = N^2\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}N^2 + \tfrac{1}{2}N^2\cos 2\theta$$
$$V\Theta = N^2\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}N^2\sin 2\theta$$

En substituant ces valeurs ainsi que celle des dérivées secondes de α et δ et faisant abstraction des termes non périodiques; et nous appelant $\delta\alpha$, $\delta\delta$ les parties de $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ ainsi obtenues, nous aurons,

$$\delta\Delta\alpha = -\tfrac{1}{4}N^2\sin 2\theta\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \cot\delta\cos\alpha\operatorname{tg}\delta + \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\delta\right)\cos 2\delta$$
$$- \tfrac{1}{2}N^2\sin^2\theta\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\delta} + \tfrac{1}{2}\cos 2\alpha - \cot\delta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\delta + \cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\delta\right)\sin 2\delta$$
$$- \tfrac{1}{4}N^2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\delta\right)\cos 2\delta$$
$$\delta\Delta\delta = +\tfrac{1}{4}N^2\sin^2\theta\sin 2\delta\left(\cot\theta + \sin\alpha\operatorname{tg}\delta\right)\cos 2\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{2}N^2\sin 2\theta\cos\alpha\left(\cot\theta + \sin\alpha\operatorname{tg}\delta\right)\sin 2\delta - \tfrac{1}{4}N^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\delta\cos 2\delta.$$

Pour mettre en évidence les termes semblables à ceux qui entrent dans le 1er ordre posons:

$$\delta\Delta\alpha = +\tfrac{1}{2}N\underbrace{N'}_{\sin\theta}\sin 2\delta\left(\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\operatorname{tg}\delta\right) - \tfrac{1}{4}N^2\sin 2\theta\cos 2\delta\cos\alpha\operatorname{tg}\delta + P$$
$$\delta\Delta\delta = \tfrac{1}{2}N^2\cot\theta\sin 2\delta.\sin\theta\cos\alpha + \tfrac{1}{4}N^2\sin 2\theta\cos 2\delta.\sin\alpha. + Q.$$

Nous aurons:

$$P = -\tfrac{1}{4}\left(N^2\sin^2\theta + N^2\right)\left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\delta\right)\sin 2\alpha\cos 2\delta$$
$$- \tfrac{1}{2}N^2\sin\theta\left(\cos^2\alpha + \cos 2\alpha\operatorname{tg}^2\delta\right)\sin 2\delta - \tfrac{1}{2}MN\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin 2\delta$$
$$Q = \tfrac{1}{4}\left\{N^2\sin^2\theta\sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}N^2\cos^2\alpha\right\}\operatorname{tg}\delta\cos 2\delta +$$
$$+ \tfrac{1}{4}MN\sin\theta\sin 2\alpha\operatorname{tg}\delta\sin 2\delta.$$

ou bien:

$$P = -\tfrac{1}{4}\left(N^2\sin^2\theta + N^2\right)\left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\delta\right)\sin 2\alpha\cos 2\delta$$
$$- \tfrac{1}{2}MN\sin\theta\left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\delta\right)\cos 2\alpha\sin 2\delta - \tfrac{1}{2}MN\left(\tfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta\right)\sin 2\delta$$
$$Q = \tfrac{1}{8}\left\{\left(N^2\sin^2\theta + - M^2\right) - \left(N^2\sin^2\theta + N^2\right)\cos 2\alpha\right\}\operatorname{tg}\delta\cos 2\delta$$
$$+ \tfrac{1}{4}MN\sin\theta\sin 2\alpha\operatorname{tg}\delta\sin 2\delta.$$

En effectuant le calcul on trouve:

$$\delta\Delta\alpha = -0'',0009\underbrace{\sin^2\theta}_{\sin\theta}\left(\cos\theta + \sin\theta\sin\alpha\operatorname{tg}\delta\right) - 0'',0001\cos 2\delta\cos\alpha\operatorname{tg}\delta + P.$$
$$\delta\Delta\delta = \mp\,0'',0009\sin 2\delta\left(\underbrace{\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha}_{\sin\theta\cos\alpha}\right) + 0'',0001\cos 2\delta.\sin 2\alpha + Q.$$

$$P = -0'',00016\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\cos 2\theta\right)\sin 2\delta\cos 2\theta + 0'',00015\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\cos 2\theta\right)\cos 2\delta\sin 2\theta$$
$$+ \overline{Z} - 0'',00089\sin 2\theta.$$

$$Q = -\left(0'',00002 + 0'',00008\cos 2\delta\right)\tfrac{3}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta - 0'',00008\sin 2\delta\tfrac{3}{2}\sin^2\theta.$$

Les seuls termes à craindre dans P et Q sont ceux qui sont multipliés soit par $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2\theta$ soit par $\frac{3}{2}\sin 2\theta$. Mais on constate que le plus grand terme dans P atteint à peine $0'',01$ pour $\delta > 88°10'$ et que dans Q tous les termes sont négligeables pour l'étoile polaire même. — Il en résulte que l'influence du 2e ordre se réduit simplement à modifier un peu le coefficient de $\sin 2\theta$ dans $\overline{Z}$ et celui de $\cos 2\theta$ dans Θ. On prendra donc au lieu de Z_1 et N_1 les quantités

$$Z_1' = Z_1 - 0'',0009 \qquad N_1' = N_1 + 0'',0001$$

c'est-à-dire:

$$Z_1' = +0'',2064 \qquad N_1' = -0'',0896.$$

et l'on emploiera les formules qui donnent $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ jusqu'au premier ordre.

Remarque. — On a construit plusieurs sortes de tables ayant pour but de faciliter le calcul de la nutation, en réunissant dans une même table tout ce qui se rapporte à un même astre. Nous en parlerons avec détail quand nous traiterons spécialement de la construction des éphémérides astronomiques.

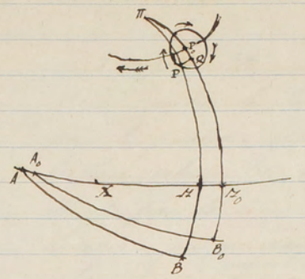
III. Ellipse de nutation. — On pourra se faire une idée assez exacte de l'ensemble des phénomènes de la précession et de la nutation en prenant simplement

$$\chi = \alpha t + N\sin\theta$$
$$\theta = \theta_0 + N\cos\theta$$

Si l'on fait d'abord abstraction des seconds termes qui proviennent de la nutation, le pôle P de l'équateur décrira autour du pôle π de l'écliptique fixe un petit cercle de rayon sphérique égal à θ_0 et sera animé d'un mouvement uniforme et dans le sens rétrograde. Soit P_0 le point défini par les éq.

$$\chi = \alpha t \qquad \theta = \theta_0$$

point que nous appellerons pôle moyen, parce qu'il



est le pôle de l'équateur moyen. Cherchons la vraie pôle P sur un arc PQ perpendiculaire sur l'arc πP_0. Appelons

$x = P_0Q \qquad y = PQ$

On a d'abord immédiatement:

$x = \pi P - \pi P_0 = \chi AB - \chi A_0B_0 = N \cos b$

En outre:

$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} P\pi P_0 = \sin \pi Q$.

Mais $P\pi P_0 = \chi H_0 - \chi H = 90^\circ - \chi H - (90^\circ - \chi H_0)$

ou $P\pi P_0 = \chi A - \chi A_0 = H - h$

Donc:

$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(H - h) \cdot \sin \varepsilon$.

ou approximativement:

$y = H - h \sin b$.

On a donc

$x = N \cos b \qquad y = H - h_0 \sin b$

Or ce sont là précisément les éq. qui définissent une ellipse dont on désignait l'anomalie excentrique par b et dont les demi-axes sont N et $H - h_0$ pourvu toutefois que $H - h_0$ soit $< N$. Or on a:

$N = +9'',22 \qquad H - h_0 = -6'',87$

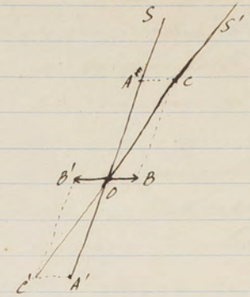
Donc, le vrai pôle décrit à peu près autour du pôle moyen une ellipse dont les demi-axes sont 9'' et 7'' et comme b est un angle qui décroit constamment le sens du mouvement est celui indiqué par les flèches.

C'est cette ellipse, dont la découverte est due à ~~Bradley~~ Peters et qui porte le nom d'ellipse de nutation

XIII. Théorie de l'Aberration.

I. Généralités sur l'aberration des fixes. - Quand nous recevons la lumière provenant d'un astre, nous la percevons suivant la direction de la dernière vitesse par rapport à nous. Or cette vitesse n'est pas la même que la vitesse absolue de la lumière, puisque nous-mêmes nous possédons une vitesse propre résultante du mouvement de la Terre. Pour fixer les idées, supposons d'abord que il s'agisse d'une étoile fixe. La vitesse absolue de la lumière au moment de l'observation est la droite qui joint l'étoile à l'œil de l'observateur ; mais la vitesse apparente ne coïncide pas avec cette direction que si la vitesse de la lumière est infiniment grande par rapport à celle de l'observateur, ce qui ne peut être regardé comme supposé dans l'état actuel de la science. Il s'ensuit que l'étoile paraîtra dans une direction différente de celle qu'elle a réellement. Cet écart qui dépend de la vitesse de l'observateur a reçu le nom d'aberration des fixes. La partie de l'aberration qui provient du mouvement de translation de la Terre autour du Soleil s'appelle l'aberration annuelle, car elle dépend de la position de la Terre dans son orbite et redevient la même au bout d'une année sidérale. La partie qui provient de la rotation de la Terre, s'appelle aberration diurne ; elle est constante à travers toutes les saisons, mais elle varie suivant la latitude du lieu de l'observation.

Soit O l'œil de l'observateur et S une étoile envoyant de la lumière en O dans la direction OA ; soit OB la vitesse de la Terre, OA' celle de la lumière. En D'après un principe de cinématique, on obtiendra la vitesse apparente de



la lumière en composant OA' avec une vitesse OB' égale et directement opposée à la vitesse OB. a pour somme OC'. Donc l'étoile paraîtra en S' dans le prolongement de la droite OC'.

Si l'on porte dans la direction réelle OS du rayon visuel de l'étoile un vecteur OA dont la longueur soit égale à la vitesse absolue de la lumière, on peut dire que la direction apparente du rayon visuel de l'étoile est celle de la somme OC des deux vecteurs OA et OB. Cette dernière considération permet de traiter facilement l'effet de l'aberration dans un système quelconque de coord.

En effet soient φ et θ les deux coordonnées sphériques de S par rapport à un système xyz d'axes rectangulaires passant par le point et soient φ', θ' ses coord. apparentes c'est à dire les coord. du point S'.

Appelons V la vitesse de la lumière, v la vitesse de l'observateur, θ_0 et φ_0 les coord. sphériques du point B qui est l'extrémité du vecteur OB; appelons aussi G la longueur du vecteur OC.

Nous aurons alors:

$$G\cos\theta'\cos\varphi' = V\cos\theta\cos\varphi + v\cos\theta_0\cos\varphi_0 - v\sin\varphi\cos\varphi$$
$$G\cos\theta'\sin\varphi' = V\cos\theta\sin\varphi + v\cos\theta_0\sin\varphi_0\cos\varphi - v\sin\varphi\cos\varphi$$
$$G\sin\theta' = V\sin\theta + v\sin\theta_0.$$

On en tire d'abord

$$G\cos\theta'\cos(\varphi'-\varphi) = V\cos\theta + v\cos\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi) \qquad \cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi)$$
$$G\cos\theta'\sin(\varphi'-\varphi) = V\cos\theta + v\cos\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi). \qquad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi).$$

d'où

$$\operatorname{tg}(\varphi'-\varphi) = \frac{\frac{v}{V}\cos\theta_0\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_0-\varphi)}{1+\frac{v}{V}\sin\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi)}.$$

On trouve comme nous le verrons plus tard $\frac{v}{V}$ est un nombre très-petit. On peut donc développer $\varphi'-\varphi$ en série et s'arrêter au 2e ordre, ce qui donne d'après une formule connue:

$$\varphi'-\varphi = \frac{v}{V}\cos\theta_0 \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} \sin(\theta_0-\theta) - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2 \cos^2\theta_0 \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} \sin 2(\theta_0-\theta).$$

Nous verrons plus loin que $\frac{v}{V}$ est au plus égal au nombre dont le logarithme est $\bar{5},9974$. Donc le second terme est toujours moindre que:

$$0'',00201 \sec^2\delta.$$

Pour que cette quantité soit $< 0'',1$, il faut que:

$$0'',00201 \sec^2\delta < 0'',1$$

c'est à dire $\log\sec\delta < 0,84454 - 3,9959$.

ou $\delta < 84°\,48'\,12''$.

Pour les étoiles horaires, ce terme n'a donc aucune influence.

Passons maintenant au calcul de $\delta'-\delta$.

On tire des éq. précédentes:

$$G\cos\delta' = V\cos\delta + v\cos\theta_0 \frac{\cos(\theta_0 - \frac{1}{2}(\varphi'+\varphi))}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}$$

ou en posant:

$$\cot\gamma = \frac{\cos(\theta_0 - \frac{1}{2}(\varphi'+\varphi))}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)} \cot\theta_0$$

on aura

$$G\cos\delta' = V\cos\delta + v\sin\theta_0 \cot\gamma \quad - \sin\delta \cos\delta$$
$$G\sin\delta' = V\sin\delta + v\sin\theta_0 \qquad \cos\delta . \sin\delta .$$

D'où

$$G\sin(\delta'-\delta) = v\sin\theta_0 \frac{1}{\sin\gamma} \sin(\gamma-\delta)$$
$$G\cos(\delta'-\delta) = V + v\sin\theta_0 \frac{1}{\sin\gamma} \cos(\gamma-\delta).$$

On en tire:

$$\operatorname{tg}(\delta'-\delta) = \frac{\frac{v}{V}\frac{\sin\theta_0}{\sin\gamma}\sin(\gamma-\delta)}{1+\frac{v}{V}\frac{\sin\theta_0}{\sin\gamma}\cos(\gamma-\delta)}.$$

En développant en série, il vient

$$(\delta'-\delta)\sin 1'' = \frac{v}{V}\frac{\sin\theta_0}{\sin\gamma}\sin(\gamma-\delta) - \left(\frac{v}{V}\right)^2 \frac{\sin^2\theta_0}{\sin\gamma}\cos\gamma\sin(\gamma-2\delta)$$

Le second terme peut s'écrire:

$$\left(\frac{v}{V}\right)^2 \frac{\sin^2\theta_0}{\sin\gamma}\left\{2\sin\delta\cos\delta\cos\gamma\cos 2\delta - (\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\sin 2\delta\right\}.$$

ou bien:

$$\left(\frac{v}{V}\right)^2\left\{\sin^2\theta_0 \cot\gamma\cos 2\delta - (\cot^2\gamma - 1)\sin^2\theta_0 \sin 2\delta\right\}$$

ou en remplaçant $\cot\gamma$ par sa valeur:

$$\left(\frac{v}{V}\right)^2\left\{\frac{\cos(\theta_0-\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi))}{2\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}\sin^2\theta_0\cos 2\delta - \left(\frac{\cos^2(\theta_0-\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi))}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)\sin 2\delta\right\}.$$

Comme $\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)$ est un petit angle, tant est facile à faire dans la parenthèse, et par conséquent, ce terme du second ordre peut être négligé tout entier.

On aura donc simplement

$$\theta' - \theta = \frac{v}{v'} \frac{1}{\sin 1''} \frac{\sin B_0}{\sin \beta} \sin(\theta - \theta)$$

ou

$$= \frac{v}{v'} \frac{1}{\sin 1''} \frac{\sin B_0}{\sin \beta} (\sin \beta \cos \theta - \cos \beta \sin \theta)$$

$$= \frac{v}{v'} \frac{1}{\sin 1''} (\sin B_0 \cos \theta - \cot \beta \sin B_0 \sin \theta)$$

ou bien

$$\theta' - \theta = \frac{v}{v'} \frac{1}{\sin 1''} \left\{ \sin B_0 \cos \theta - \frac{\cos\left(\frac{\theta_0 - \frac{1}{2}(\theta' + \theta)}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2}(\theta' - \theta)} \cos B_0 \sin \theta \right\}$$

ou enfin en négligeant le carré de $\frac{v}{v'}$ dans le coefficient de $\cos B_0 \sin \theta$:

$$\theta' - \theta = \frac{v}{v'} \frac{1}{\sin 1''} \left\{ \sin B_0 \cos \theta - \cos(\theta_0 - \theta) \cos B_0 \sin \theta \right\}$$

Nous allons à présent appliquer ces formules à des cas particuliers.

II. *Aberration annuelle en longitude et en latitude.*

Soient l, λ, l', λ' la longitude et la latitude vraies et apparentes de l'étoile. Comme la vitesse de translation de la Terre est une droite située dans le plan de l'écliptique, on aura : $\beta = 0$ et l'on aura :

$$l' - l = \frac{v}{v'} \frac{1}{\sin 1''} \sec \lambda \sin(\theta_0 - \theta) + R \quad (2^e \text{ coef.}) \quad R$$

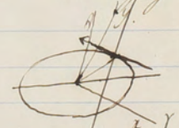
$$\lambda' - \lambda = -\frac{v}{v'} \frac{1}{\sin 1''} \cos(\theta_0 - \theta) \sin \theta$$

R désignant le 2e terme de $l' - l$. On peut écrire :

$$l' - l = \frac{v \sin \theta_0}{v' \sin 1''} \sec \lambda \cos \theta - \frac{v \cos \theta_0}{v' \sin 1''} \sec \lambda \sin l + R,$$

$$\lambda' - \lambda = -\frac{v \cos \theta_0}{v' \sin 1''} \sin \lambda \cos l - \frac{v \sin \theta_0}{v' \sin 1''} \sin \lambda \sin l.$$

Il nous faut calculer $v \sin \theta_0$ et $v \cos \theta_0$. Reprenons en négligeant les puissances de l'excentricité de l'orbite terrestre à partir de la 2e les coordonnées héliocentriques de la Terre rapportées au centre du Soleil sont :



$$x = a(1 - e\cos\zeta) \qquad y = \frac{3}{2} + 2e \sin \zeta.$$

Si nous menons par le point o, une parallèle au rayon vecteur de la Terre et qu'on appelle x y les coord. de son extrémité, on aura

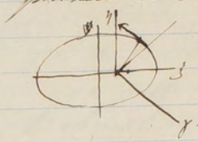
$$\frac{dx}{dt} = v' \cos \theta_0 \qquad \frac{dy}{dt} = v' \sin \theta_0.$$

Mais en appelant ϖ la longitude du périhélie terrestre on a :

$$x = r \cos(v + \varpi) \qquad y = r \sin(v + \varpi)$$

d'où on déduit après les différentiations :

Appelons ξ et η les coordonnées rectangulaires de la Terre par rapport aux axes $O\xi$ $O\eta$ passant par le centre du Soleil et dont le premier aboutit au périhélie de la Terre. On aura évidemment,



$$r\cos\varphi = \frac{d\xi}{dt}\cos\varpi - \frac{d\eta}{dt}\sin\varpi$$
$$r\sin\varphi = \frac{d\xi}{dt}\sin\varpi + \frac{d\eta}{dt}\cos\varpi.$$

Mais on a

$$\xi = r\cos v \qquad \eta = r\sin v$$

v étant l'anomalie de la Terre.

Donc:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varpi - r\frac{dv}{dt}\sin\varpi$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varpi + r\frac{dv}{dt}\cos\varpi$$

Mais on a en négligeant le carré de l'excentricité.

$$r = a(1-e\cos\zeta) \qquad \omega = \zeta + 2e\sin\zeta.$$

d'où en différentiant et remarquant que l'on a $\frac{d\zeta}{dt} = n$,

$$\frac{dr}{dt} = +ane\sin\zeta \cdot \frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{d\omega}{dt} = n + 2ne\cos\zeta.$$

Donc:

$$\frac{d\xi}{dt} = +ane\sin^2\zeta\cos\omega - a(1-e\cos\zeta)(n+2ne\cos\zeta)\sin\omega.$$
$$\frac{d\eta}{dt} = +ane\sin^2\zeta\sin\omega + a(1-e\cos\zeta)(n+2ne\cos\zeta)\cos\omega.$$

en ne conservant ω avec ζ dans les termes multipliés par e:

$$\frac{d\xi}{dt} = -na\sin\omega \qquad \cos\varpi \qquad \sin\varpi$$
$$\frac{d\eta}{dt} = na\cos\omega + nae\cdot \qquad -\sin\varpi. \qquad +\cos\varpi$$

On aura donc:

$$r\cos\varphi = -na\sin(\omega+\varpi) - nae\sin\varpi \qquad -\sin l \quad -\cos l$$
$$r\sin\varphi = na\cos(\omega+\varpi) + nae\cos\varpi. \qquad \cos l. \quad -\sin l.$$

On en conclut:

$$l'-l = \frac{na}{r^2\sin 1''}\sin\lambda\cos(\omega+\varpi-l) + \frac{na}{r^2\sin 1''}e\cos\lambda\sin(\varpi-l) + R.$$
$$\lambda'-\lambda = \frac{na}{r^2\sin 1''}\sin\lambda\sin(\omega+\varpi-l) + \frac{na}{r^2\sin 1''}e\sin\lambda\sin(\varpi-l).$$

Si nous appelons $\odot$ la longitude du Soleil et π la longitude du périgée solaire, on aura:

$$\omega+\varpi = \odot \pm 180° \qquad \varpi = \pi \pm 180°$$

et les formules précédentes deviendront:

$$l'-l = -\frac{na}{r^2\sin 1''}\sin\lambda\cos(\odot-l) - \frac{na}{r^2\sin 1''}e\cos(\pi-l)$$
$$\lambda'-\lambda = -\frac{na}{r^2\sin 1''}\sin\lambda\sin(\odot-l) - \frac{na}{r^2\sin 1''}e\sin(\pi-l).$$

Pour le Soleil, on a $\lambda = 0$ et par suite.

$l'-l = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\cos(l-\pi)$. $\lambda'-\lambda = 0$.

Remarque. – Nous avons supprimé le terme R dans l'expression de $l'-l$ car les formules ne s'emploient jamais pour les étoiles voisines du pôle de l'écliptique.

Le coefficient $\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$ s'appelle la <u>constante de l'aberration</u> : c'est le rapport de la vitesse moyenne de la Terre à la vitesse de la lumière, ce rapport étant multiplié par $\frac{1}{\sin 1''}$ pour la convertir en secondes d'arc.

La valeur de la constante de l'aberration est d'après Struve, égale à 20",445.

III. Aberration annuelle en ascension droite et en déclinaison. – Appelons α, δ les coord. équatoriales vraies d'une étoile et α', δ' ses coord. apparentes. On aura :

$$\alpha'-\alpha = \frac{v}{\sqrt{1-e^2}}\cos\beta_0 \sec\delta \sin(\varphi_0 - \alpha) + R.$$
$$\delta'-\delta = \frac{v}{\sqrt{1-e^2}}\{\sin\beta_0\cos\delta - \cos(\varphi_0-\alpha)\cos\beta_0\sin\delta\}.$$

Posons :

$$v_1 = v\cos\beta_0\cos\varphi_0 \qquad v_2 = v\cos\beta_0\sin\varphi_0 \qquad v_3 = v\sin\beta_0$$

on aura :

$$\alpha'-\alpha = \frac{\sec\delta}{\sqrt{1-e^2}}\{v_2\cos\alpha - v_1\sin\alpha\} + R$$
$$\delta'-\delta = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\{v_3\cos\delta - (v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha)\sin\delta\}$$

Or nous avons trouvé pour les composantes de v suivant le système d'axes écliptiques

$$-na\sin\{\sin(\omega+\Omega) + e\sin\Omega\} \qquad na\cos\{\cos(\omega+\Omega)+e\cos\Omega\}$$

et

$$+na\cos(\sin\Theta + e\sin\Pi) \qquad -na(\cos\Theta + e\cos\Pi)$$

et les quantités v_1, v_2, v_3 s'obtiendront en projetant les composantes sur les axes équatoriaux. On aura donc :

$$\alpha'-\alpha = \frac{-na}{\sqrt{1-e^2}}(\sin\Theta + e\sin\Pi)\sec\delta\sin\alpha - \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(\cos\Theta + e\cos\Pi)\cos\varphi\sec\delta\cos\alpha + R.$$
$$\delta'-\delta = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(\sin\Theta + e\sin\Pi)\sin\delta\cos\alpha - \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(\cos\Theta + e\cos\Pi)(\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\sin\alpha)$$

Calculons maintenant le terme R. On a :

$$R = -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\cos^2\beta_0\sec^2\delta\sin(2\varphi_0 - 2\alpha)$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\text{[illegible]}}{V^2\sqrt{1-e^2}}\left\{v^2\cos^2\beta_0\frac{\partial^2\beta_0}{\partial\beta_0^2}\cos 2\alpha - v^2\cos^2\beta_0(\cos^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_0)\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha^2}\right\}.$$

ou $R = -\frac{1}{2}\frac{n^2a^2}{p^2\sin 1''}\left\{2V_1V_2\cos 2\alpha - (V_1^2 - V_2^2)\sin 2\alpha\right\}$.

En négligeant e, ce que l'on peut faire, on aura

$$R = +\frac{1}{2}\frac{n^2a^2}{p^2\sin 1''}2\sin\odot\cos\odot\cos 2\alpha\sec^2\delta$$
$$+\frac{1}{2}\frac{n^2a^2}{p^2\sin 1''}\left(\sin^2\odot - \cos^2\odot\cos^2\gamma\right)\sec^2\delta\sin 2\alpha.$$

ou bien :

$$R = \frac{1}{2}\frac{n^2a^2}{p^2\sin 1''}\sin 2\odot\cos 2\alpha\sec^2\delta$$
$$-\frac{1}{4}\frac{n^2a^2}{p^2\sin 1''}(1+\cos^2\gamma)\cos 2\odot\sin 2\alpha\sec^2\delta$$
$$+\frac{1}{4}\frac{n^2a^2}{p^2\sin 1''}\sin^2\gamma\sin 2\alpha\sec^2\delta.$$

En substituant la valeur $\frac{na}{p\sin 1''} = 20'',445$, on trouve,

$$R = +0'',00093\sin 2\odot\cos 2\alpha\sec^2\delta$$
$$-0'',00093\cos 2\odot\sin 2\alpha\sec^2\delta$$
$$+0'',00008\sin 2\alpha\sec^2\delta.$$

Le dernier terme est tout à fait insensible et l'on aura à peu près

$$R = +0'',00093\sin 2(\odot-\alpha)\sec^2\delta.$$

$0'',000062.$

Ce terme devra être pris en considération pour toutes les observations ou calculs soignés de l'étoile polaire par exemple. Dans un cas ordinaire, on pourra en faire abstraction, autant pour toute autre circumpolaire que la Petite Ourse.

II. — Trajectoire apparente d'une étoile dans son mouvement apparent autour de sa position vraie. — Ellipse d'aberration. — Si dans les expressions de l'aberration annuelle en longitude et en latitude, nous négligeons les termes en e et que nous posions pour abréger

$$A = \frac{na}{p\sin 1''}$$

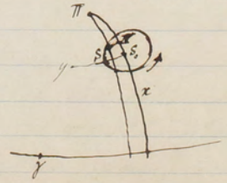
il viendra

$$\lambda - l = -A\cos\beta\cos(l-\odot) \qquad \lambda - l = A\sin\beta\sin(l-\odot).$$

Soient S et S' les positions vraie et apparente de l'étoile à un instant quelconque. Soit π le pôle de l'écliptique. Abaissons l'arc SN perpend. à l'arc πS_0, et posons :

$$S_0N = x \qquad SN = y.$$

On aura approximativement :



$$x = \pi S_0 - \pi S = 90° - \lambda - (90° - \lambda') = \lambda' - \lambda = \overset{\text{var}}{A} \sin(l - \odot)$$

On aura ensuite :

$$y = \delta \pi_0 S_0 = \pi N = (l - l') \sin(90° - \lambda) = (l - l') \cos\lambda .$$

On aura donc :

$$x = A \sin(l - \odot) \qquad y = \overset{\text{var}}{A} \cos(l - \odot).$$

On voit ainsi que S décrit autour de S_0 une ellipse dont le grand axe est perpendiculaire à πS_0 et ayant pour valeur A et dont le petit axe est au signe dirigé suivant πS_0 et a pour valeur $A \sin\lambda$, et comme l'angle $l - \odot$ est constamment croissant, on voit que le sens du mouvement est celui indiqué par la flèche. La plus grande écart de S et S_0 a lieu quand on a :

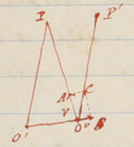
$$l - \odot = 0 \text{ ou } 180°$$

ce qui, si l'on veut, permet cette expression, lorsque l'étoile est en conjonction ou en opposition avec le Soleil.

Loi de l'ellipse que nous venons de considérer est souvent appelée ellipse d'aberration. Son grand axe est le même pour toutes les étoiles tandis que son petit axe est proportionnelle au sinus de la latitude de l'étoile considérée. Donc, pour une étoile située dans le plan de l'écliptique l'ellipse d'aberration se réduit à une ligne droite, tandis que pour une étoile située au pôle de l'écliptique, cette ellipse devient un cercle.

Remarque - L'existence des ellipses d'aberration, découverte par l'illustre Bradley et que l'on peut vérifier très-facilement aujourd'hui, puisque il s'agit d'un arc de plus de 20", est la preuve la plus concluante que nous ayons de la réalité du mouvement de translation de la Terre autour du Soleil.

T. Aberration planétaire - Lorsque l'astre que nous avons considérons est une planète ou une comète et en général un astre qui a un mouvement propre



* Mais à l'époque $t-\tau$ la Terre étant en O' et la direction B vraie de la planète est O'P.

Pendant le temps τ, on peut considérer le mouvement de la Terre comme rectiligne et uniforme et suivant la direction O'B. Il en aura

$$O'O = v.\tau = OB.\tau.$$

Comme on a la même

$$PO = V.\tau = OA.\tau.$$

Il en résulte que l'on a :

$$\frac{O'O}{PO} = \frac{OB}{OA} = \frac{O'B}{AC}.$$

Donc O'P est parallèle à OA' et par suite la direction vraie au temps $t-\tau$ est la même que la direction apparente au temps t.

considérable, à cause que nous venons de le précédemment n'est plus applicable : car la direction absolue de la lumière au moment de l'observation ne passait pas par la droite qui joint la position actuelle de la planète à l'observateur, mais bien celle qui y joint la position de la planète à une époque antérieure d'une quantité égale au temps que met la lumière pour franchir la distance qui sépare la planète de l'observateur. Soit τ cet intervalle de temps, et soit t l'époque de l'observation. Donc la direction apparente du rayon visuel de la planète, déduite de la fait l'observation dans un mouvement de la Terre n'est point la direction vraie de ce rayon à l'époque t mais elle est la direction vraie à l'époque $t-\tau$ * pendant l'intervalle de temps τ la Terre ne s'étant point supposée. *

Cherchons dans l'abord la valeur de τ. En appelant Δ la distance de la planète à la Terre, on a :

$$\tau = \frac{1}{v}\Delta.$$

Mais nous avons déjà vu précédemment

$$\frac{n}{1^{mm}} = 20''445$$

d'où en prenant pour unité de distance :

$$\frac{1}{v} = \frac{20''445\ \text{sin}1''}{n}.$$

Or si nous prenons pour unité de temps la seconde du temps moyen, on a

$$n = \frac{3548''1927}{86400}\ \text{sin}1''.$$

On aura donc :

$$\frac{1}{v} = \frac{86400.20''445}{3548''1927} = 497''86$$

par suite

$$\tau = 497''86.\Delta.$$

Si donc on connaît pour l'époque t que l'on considère la variation en une seconde des coordonnées de la planète, il sera facile d'en tenir compte soit pour passer du lieu théorique au lieu apparent soit inversement pour passer du lieu apparent au lieu théorique.

Nous expliquerons plus tard en traitant de la construction des éphémérides comment on effectue

ce calcul d'une manière fort simple.

VI. – Aberration lunaire. – Cherchons d'abord la valeur de ce qu'on peut appeler la constante de l'aberration lunaire c'est à dire le rapport de la vitesse linéaire d'un point de l'équateur terrestre due à la rotation de la Terre, à la vitesse de la lumière, ce rapport étant divisé par sin 1". Soit n' la vitesse angulaire de la Terre et a le rayon équateur de la Terre; la quantité B que nous cherchons est égale à

$$B = \frac{n'a}{V \sin 1''}.$$

Or on a en appelant A la constante de l'aberration annuelle:

$$A = \frac{na}{V \sin 1''}$$

On aura donc:

$$\frac{B}{A} = \frac{n'a}{na} \quad \text{ou} \quad B = A \cdot \frac{n'}{n} \cdot \frac{a'}{a}$$

Mais $\frac{a'}{a}$ est égale à $\pi \sin 1''$, π étant la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil. Donc:

$$B = A \frac{n'}{n} \pi \sin 1''$$

Le rapport $\frac{n'}{n}$ est égal au nombre qui exprime combien il y a de jours sidéraux dans une année sidérale, c'est à dire au nombre de fois que la même étoile fait un passage méridien pendant que le Soleil fait un tour du ciel, il est donc égale à 366,256 (voir le Chapit. II). Quant à π, adoptons la valeur 8",85. On aura alors:

$$B = A \cdot 366,256 \cdot 8,85 \cdot \sin 1''.$$

En effectuant le calcul, on trouve:

$$B = 0",321 = 0,0214.$$

On voit ainsi que l'aberration lunaire doit être bien moins considérable que l'aberration annuelle.

Nous chercherons seulement l'effet de l'aberration sur l'ascension droite et la déclinaison, les seules coord. qu'on détermine directement par l'observation.

Si l'on appelle φ' la latitude réduite du lieu de l'observation, la vitesse de l'observateur due à la rotation et ρ la distance de ce lieu au centre de la Terre

à la rotation de la Terre sera évidemment

$$v' = n\rho\cos\varphi'.$$

Mais l'instrument de cette vitesse aura sa déclinaison égale à zéro et son ascension droite égale à celle du lieu de l'observation augmentée de 90°. En appelant Θ le temps sidéral de l'observation, on aura donc:

$$\alpha_0 = 90° + \Theta \qquad \delta_0 = 0$$

En arrêtant les séries du 1er paragraphe au terme du 1er ordre, ce que l'on peut faire dans cette recherche et posant $\varphi = \alpha$ $\delta = \delta$, on aura donc:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{n\rho\cos\varphi'}{\nabla\cos\delta''} \sin\delta' \cos(\alpha - \Theta)$$

Les équations ~~fondamentales~~ du paragraphe I, deviennent en faisant $\varphi = \alpha$ $\delta = \delta$:

$$G\cos\delta'\sin(\alpha' - \alpha) = n\rho\cos\varphi'\cos(\Theta - \alpha)$$

$$G\cos\delta'\cos(\alpha' - \alpha) = \nabla\cos\delta - n\rho\cos\varphi'\sin\delta'\sin(\Theta - \alpha).$$

$$\nabla G\sin\delta' = \nabla\sin\delta. \qquad \sin\delta' - \sin\delta$$

En arrêtant la série au 1er ordre, on trouve d'abord:

$$\alpha' - \alpha = \frac{n\rho\cos\varphi'}{\nabla\cos\delta''} \sin\delta' \cos(\Theta - \alpha).$$

Puis en négligeant toujours le second ordre, on a:

$$G\cos\delta' = \left\{\nabla^2\cos^2\delta - 2\nabla\cos\delta\, n\rho\cos\varphi'\sin^2(\Theta - \alpha)\right\}^{+\frac{1}{2}}$$

$$= \nabla\cos\delta\left\{1 - \frac{n\rho\cos\varphi'}{\nabla\cos\delta''}\sin^2(\Theta - \alpha)\right\}$$

ou

$$G\cos\delta' = \nabla\cos\delta - n\rho\cos\varphi'\sin^2(\Theta - \alpha). \qquad \cos\delta'$$

On a donc:

$$0 = \nabla\sin(\delta' - \delta) - \frac{n\rho\cos\varphi'}{\nabla\cos\delta''}\cos\delta'\sin\delta'\sin^2(\Theta - \alpha).$$

d'où en développant

$$\delta' - \delta = \frac{n\rho\cos\varphi'}{\nabla\cos\delta''}\sin\delta'\sin^2(\Theta - \alpha).$$

On a eu soin d'écrire δ au lieu de δ', car cela revenait à négliger le 2d ordre.

On peut réunir ces formules, en désignant par t l'angle horaire de l'étoile au moment de l'observation

$$\alpha' - \alpha = B\frac{\rho}{\nabla}\cos\varphi'\cos t\sec\delta$$

$$\delta' - \delta = B\frac{\rho}{\nabla}\cos\varphi'\sin\delta\sin t.$$

Comme B est un angle fort petit, en prenant $\frac{\rho}{\nabla} = 1$ et $\varphi' = \varphi$, il n'en peut résulter aucune erreur

appréciable, on aura donc ainsi

$$\alpha' - \alpha = 0'',0214 \cos B \cos A$$
$$\delta' - \delta = 0'',321 \sin B \sin A$$

Si l'étoile est dans le méridien, l'observation en déclinaison est nulle et l'observation en ascension droite est à son maximum et est égale à $\pm 0'',0214 \sec B$.

Remarque — Quand on construit des éphémérides, on ajoute aux coordonnées vraies de l'astre les effets provenant de l'aberration annuelle et l'on obtient ainsi ce que l'on appelle ses coordonnées apparentes. A l'égard de l'aberration diurne, on fait l'inverse, on ajoute à l'ascension droite et à la déclinaison observées les corrections dues à l'aberration diurne. Ce sont les coord. ainsi corrigées que on doit comparer les coord. théoriques fournies par l'éphéméride.

VII. Analogie des effets de la parallaxe annuelle d'une étoile avec ceux de l'aberration annuelle. — Pour une étoile dont la distance au Soleil n'est pas infiniment grande par rapport aux dimensions de l'orbite de la Terre, la direction de son rayon visuel ne reste pas constamment la même dans le cours de l'année. La variation de cette direction constitue ce que l'on appelle la parallaxe annuelle de l'étoile.

Soit Δ la distance de l'étoile au Soleil, Δ' sa distance à la Terre, r le rayon vecteur de la Terre. Appelons l, λ la longitude et la latitude de l'étoile observée du centre du Soleil, l', λ' les mêmes quantités pour un observateur placé au centre de la Terre. — On aura.

$$\Delta' \cos\lambda' \cos l' = \Delta \cos\lambda \cos l + r \cos\odot$$
$$\Delta' \cos\lambda' \sin l' = \Delta \cos\lambda \sin l + r \sin\odot$$
$$\Delta' \sin\lambda' = \Delta \sin\lambda. \qquad \text{Lat. Col.}$$

On en tire.

$$\Delta' \cos\lambda' \cos(l'-l) = \Delta \cos\lambda + r \cos(l-\odot)$$
$$\Delta' \cos\lambda' \sin(l'-l) = -\Delta \cos\lambda \sin(l-\odot)$$

D'où en développant et s'arrêtant au 1er ordre.

$$l'-l = -\frac{r}{\Delta \sin 1''} \sin(\lambda - \odot).$$

On a enfin :

$$\Delta' \cos\lambda' = \Delta \cos\lambda + r\cos(l-\odot) \qquad \cos\lambda' - \cos\lambda$$

et par suite :

$$\Delta' \cos(\lambda'-\lambda) = \Delta + r\cos\lambda\cos(l-\odot)$$
$$\Delta' \sin(\lambda'-\lambda) = -r\sin\lambda\cos(l-\odot)$$

D'où approximativement :

$$\lambda'-\lambda = -\frac{r}{\Delta \sin 1''} \sin\lambda\cos(l-\odot).$$

Le coefficient $\frac{r}{\Delta \sin 1''}$ est sensiblement égal à $\frac{a}{\Delta \sin 1''}$ qui on appelle la constante de la parallaxe annuelle ; en désignant par ϖ, on aura :

$$l'-l = -\varpi \cos\lambda \sin(l-\odot) \qquad \lambda'-\lambda = -\varpi \sin\lambda \cos(l-\odot).$$

Ces expressions sont tout à fait analogues à celles de l'aberration annuelle. — On verra comme dans le paragraphe IV que l'étoile paraîtra décrire une ellipse. Seulement, ici, le maximum d'effet arrive c'est-à-dire l'étoile se trouve au moment du grand axe de l'ellipse grand $l-\odot$ est égal à 90° ou à 270°.

XIV. Réduction du lieu moyen d'une étoile à son lieu apparent.

I. Généralités. – Nous avons expliqué dans le chapitre XI, comment, étant données les coord. apparentes d'une étoile au commencement d'une certaine année tropique, on peut trouver ses coordonnées moyennes au commencement d'une autre année tropique. Nous allons maintenant traiter le problème suivant: – Etant données l'ascension droite et la déclinaison moyennes d'une étoile au commencement d'une certaine année tropique, trouver l'ascension droite et la déclinaison apparentes de la même étoile pour une certaine époque dans l'année, en tenant compte de la précession de la nutation et de l'aberration.

Appelons α, δ les coord. moyennes données et $\alpha+\Delta\alpha, \delta+\Delta\delta$ les coord. apparentes cherchées. Soit t l'époque considérée comptée à partir du commencement de l'année et exprimée en fraction de l'année tropique. Nous avons obtenu en résumant tout ce qui a été dit dans les chapitres précédents

$$\Delta\alpha = (m + n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)t + \Psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\operatorname{tg}\delta) - \Theta\cos\alpha\operatorname{tg}\delta - A(\cos\alpha\cos\odot + \cos\varepsilon\sin\alpha\sin\odot) - A(\cos\alpha\cos\pi + \cos\varepsilon\sin\alpha\sin\pi)$$

$$\Delta\delta = (n\cos\alpha + \varepsilon)t + \Psi\sin\varepsilon\cos\alpha + \Theta\sin\alpha - A(\sin\alpha\cos\odot + \cos\varepsilon\sin\alpha\sin\odot) - A(\cos\alpha\cos\pi + \cos\varepsilon\sin\alpha\sin\pi)$$

en désignant par n et ε le mouvement propre de l'étoile en asc. droite et en déclinaison, par A la constante de l'aberration $= 20''445$.

Comme nous supposons que l'étoile n'est pas trop près du pôle, nous avons négligé les puissances supérieures de l'aberration et d'autres quantités analogues.

II. Nombres de Bessel. Introduction. Bessel pose:

$$A = t + \tfrac{1}{2}\Psi\sin\varepsilon\sin\odot \qquad C = -A(\cos\varepsilon\sin\odot + \cos\pi)\cos\alpha \qquad E = (\cos\varepsilon - \tfrac{m}{n}\sin\varepsilon\sin\alpha)\Psi$$

$$B = -\Theta \qquad D = -A(\cos\odot + \cos\varepsilon\sin\alpha\sin\pi)$$

et $a = m + n \sin\lambda \tan\varphi$ $\quad a' = + n\cos\lambda$

$b = \cos\lambda \tan\varphi$ $\quad b' = - \sin\lambda$

$c = \cos\lambda \sec\delta$ $\quad c' = \tan\varphi \cos\delta - \sin\lambda\sin\delta$

$d = \sin\lambda \sec\delta$ $\quad d' = \cos\lambda \sin\delta$

Alors la formule précédente deviennent

$\Delta\alpha = Aa + Bb + Cc + Dd + E + kt$

$\Delta\delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + kt$.

Le coefficient de E est à peu près égal à $\cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2$ ou à 0,0027. Le terme le plus considérable de E sera donc: $0,0027 \times 17'25'',26 = 0'',05$ sinb. On peut donc négliger E dans le plus grand nombre de cas.

Les quantités a, b, c, d; a', b', c', d' varient très lentement avec le temps; elles sont les plus caractéristiques de chaque étoile. La plupart des catalogues d'étoiles donnent à côté des coord. de l'étoile les valeurs de ces quantités pour l'époque du catalogue. On peut s'en servir sans modification pendant un grand nombre d'années avant & après cette époque.

Pour les quantités A, B, C, D, E, ce sont des simples fonctions du temps qui ne dépendent point de chaque étoile en particulier. On peut donc les donner dans un almanach pour chaque jour de l'année.

A l'exemple de Bessel, le "Jahrbuch" de Berlin donnent les valeurs de A, B, C, D, E de dix en dix jours d'heure en commençant par le moment où la longitude du Soleil est égale à 280°. Pour une époque intermédiaire, on interpolera, non pas ces quantités, ce qui serait long, mais les coord. apparentes que l'on aura calculées pour les époques de la Table.

Baily, dans sa préface du catalogue de l'association britannique, ~~a dit~~ a changé la notation de Bessel, "sans nécessité" comme le fait remarquer Brünnow. Baily appelle A, D ce que Bessel appelait C, D et C, D ce que Bessel appelait A, B, de même pour les petites lettres de l'alphabet. Nous adopterons cette nouvelle

natalain uniquement parce que c'est elle qui a été adoptée par les constructeurs de la Connaissance des temps et du Nautical Almanac.

La connaissance des temps, le Nautical Almanac et l'American ephemeris donnent les logarithmes des nombres A, B, C, D pour le midi moyen de chaque jour pour les méridiens respectifs de Paris, de Greenwich, et de Washington. Le premier et le dernier donnent aussi la valeur naturelle en secondes d'arc du nombre 6.

Dans la construction de ces quantités, on a besoin, entre autres quantités, de la valeur du facteur 6. Voici comment on peut le calculer.

Appelons t_0 le temps écoulé depuis le commencement de l'année telle que la définit Bessel et j le nombre de jours moyens écoulés depuis le commencement de l'année civile, estimé en année tropique et j le nombre de jours moyens écoulés depuis le commencement de l'année civile jusqu'à l'époque que l'on considère; on aura alors,

$$t = t_0 + j \times \frac{1}{365{,}2422}.$$

Pour simplifier le calcul de t_0, prenons pour le commencement de l'année civile le midi moyen du 31 décembre pour une année commune et le midi moy. du 1er janvier pour une année bissextile. Nous appellerons année ordinaire une année ainsi définie.

Cela posé, si nous appelons T le temps écoulé depuis le 1er janvier 1850 midi moy. de Paris exprimé jusqu'au commencement de l'année ordinaire que nous considérons et T' le temps écoulé depuis la même origine jusqu'au com. de l'année tropique, on aura évidemment

$$t_0 = T - T'.$$

Soient maintenant λ et l les longitudes de Paris et du lieu pour lequel on veut construire l'éphéméride, ces longitudes étant comptées en fraction du jour. Alors le nombre de jours écoulés depuis notre origine jusqu'au com. de

Chaque année ordinaire est donnée par le tableau suivant.

1850 $-1-(l-l_0)$	1854 $365\times4-5(l-l_0)$
1851 $-1-(l-l_0)+365$	1855 $365\times5-5(l-l_0)$
1852 $-1-(l-l_0)+365\times2+1$	1856 $365\times6+1-(l-l_0)$
1853 $-(l-l_0)+365\times3$	. . . . .

Tous les nombres de ce tableau sont de la forme:

$$3-1-5(l-l_0)+365(N-1850)$$

N étant le nombre d'années écoulées depuis l'origine et N' étant le numéro de l'année dans l'ère chrétienne et B le nombre de fois bissextile depuis l'origine jusqu'à la fin de l'année considérée. On aura donc:

$$T=\frac{3-1-(l-l_0)+365\times(N-1850)}{365,2422}.$$

Quant à T' on a d'après ce que nous avons dit

$$T'=-0,00216816\frac{365,25}{365,2422}+(N-1850).$$

ou bien:

$$T'=-0,00216832+(N-1850).$$

On aura donc:

$$t_0=\frac{3-1-(l-l_0)+365\times(N-1850)}{365,2422}+0,00216832-(N-1850).$$

ou bien:

$$t_0=\frac{3-(l-l_0)-0,2422\times(N-1850)-0,20990}{365,2422}.$$

Pour la quantité j on aura en affectant le numéro de jours écoulés depuis le mid. jusqu'au jour qui [illegible] le minuit considéré, suivant que l'année est commune ou bissextile.

$j=n+0,5$ ou $n+0,5-1$

On aura donc enfin

$$t=\frac{3-(l-l_0)-0,2422(N-1850)-0,20990+n+0,5-i}{365,2422}.$$

i désignant 0 ou 1 suivant que l'année est commune ou bissextile.

Remarque.- Comme les constantes a, b, etc ne s'emploient que pour les ascensions droites, les catalogues les donnent non pas telles que nous les avons définies mais ces valeurs multipliées par $\frac{1}{15}$ afin d'avoir immédiatement des temps.

III.- Nombres de Mr Airy.- Mr Airy emploie un autre procédé que Bessel afin de n'employer que les nombres positifs.- Soient les nombres de Bessel suivant la notation de Bessel.

Baily

$A = -20,445(\cos\odot + e\cos\pi)\cos\lambda$ $C = b + \frac{1}{\eta}\sin\varepsilon$ $E = \Sigma(\cos\delta - \frac{m}{n}\sin\alpha)$

$B = -20,445(\sin\odot + e\sin\pi)$ $D = -\odot$

$a = \cos\alpha\sin\odot$ $a' = \frac{1}{\eta}\sin\varepsilon\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\odot$

$b = \sin\alpha\sin\odot$ $b' = \cos\alpha\sin\odot$

$c = m + n\sin\alpha\tan\varphi$ $c' = n\cos\alpha$

$d = \cos\alpha\cos\odot\tan\varphi$. $d' = -\sin\alpha$.

Ici remarque que les valeurs négatives de A, B, D etc ne peuvent surpasser 25" en valeur absolue et que celles de C, a', b', d' dont le même temps inférieures à 1,2 en valeur absolue. De plus pour toutes les étoiles dont la distance polaire n'passe 3° 10', les quantités a, b, c ne surpasse pas 1,2 et c ne surpasse pas 25". Il pose donc:

$E = A + 25$ $e = a + 1,2$ $e' = a' + 1,2$

$F = B + 25$ $f = b + 1,2$ $f' = b' + 1,2$

$G = C + 1,2$ $g = c + 25$ $g' = c + 25$

$H = D + 25$ $h = d + 1,2$ $h' = d' + 1,2$

$\Sigma = 210 - 1,2E - 12F - 25G - 12H$

$l = 210 - 25e - 25f - 1,2g - 25h$

$l' = 210 - 25e' - 25f' - 1,2g' - 25h'$

On aura alors en substituant les valeurs de A, B, C etc:

$\Delta\alpha = Ee + Ff + Gg + Hh + \Sigma + l - 300,00$ (en secondes de temps)

$\Delta\delta = Ee' + Ff' + Gg' + Hh' + \Sigma + l' - 300,00$ (en secondes d'arc)

ΔR désignant la correction de la distance polaire.

Les valeurs quantités E, F etc. devant toujours positives excepté e, f, gh pour une circumpolaire.

Le catalogue intitulé "Catalogue of 2156 stars formed from the observations made during twelve years et" donnent pour chaque étoile les constantes e f g h et l l', et le Nautical Almanac fournit les nombres journaliers A B. E F G H et Σ.

IV.– Autre procédé de réduction.– Quand on a affaire à une étoile dont les constantes sont inscrites dans un catalogue dont on dispose, la méthode précédente est très-commode; mais lorsqu'on n'a pas cet avantage, on évite le calcul un peu long des constantes, a', b' etc en suivant une

autre marche. — En employant la notation de Bailly, en x et en faisant abstraction du mouv. propre:

$\Delta\alpha = A\cos\alpha\sec\delta + B\sin\alpha\sec\delta + Cm + D\sin\alpha\tan\delta + E\cos\alpha\tan\delta + F$

$\Delta\delta = A\sin\alpha\sin\delta - A\cos\alpha\sin\delta + B\sin\alpha\sin\delta + C\cos\alpha - D\cos\alpha$

Posons:

$Am + E = f$ $\quad C\cos\alpha = g\cos G$ $\quad B = h\cos H$

$A\sin\delta = i$ $\quad D = g\sin G$ $\quad A = h\sin H$

on aura:

$\Delta\alpha = f + g\sec\delta\cos(G+\alpha) + h\sin\delta\cos(H+\alpha)\tan\delta$

$\Delta\delta = g\sin(G+\alpha) + h\sin(G+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta$

Les quantités A et E, f, g, h, i et G, H sont simplement fonction des temps; leurs valeurs généralisées sont données dans tous les recueils d'éphémérides.

V. — Calcul des coordonnées apparentes au moment du passage de l'étoile à un méridien $g\varphi$ donné:

1° Supposons que l'on veuille calculer et construire une éphéméride de l'étoile, et, supposons en outre, pour fixer les idées qu'il s'agisse d'une étoile boréale. On commencera par calculer de dix jours en dix jours les valeurs de $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$, pour le minuit moyen du 1er méridien, c'est-à-dire pour lequel sont nuls les nombres A, B, C, D. Soient α la ascension droite pour une date $g\varphi$ de t et α' l'ascension droite 10 jours après. Soit Π le temps sidéral du 1er méridien de longitude 0 à minuit de l'époque t; $\Theta + \Pi + (l-l_0)$ sera le temps sidéral du méridien de longitude l à minuit de l_0 à l'époque t. Par conséquent le temps qui s'écoule depuis l'époque jusqu'au moment du passage de l'étoile au méridien l sera égal à $\alpha - \Pi - (l-l_0)$. Appelons τ cet intervalle de temps converti en fraction de jour. Alors on aura pour l'ascension droite cherchée

$$\alpha + \frac{\tau}{10}(\alpha' - \alpha)$$

puisque la variation de l'ascension droite dans l'intervalle de dix jours peut être considérée comme proportionnelle au temps.

On aura de même pour la distance cherchée :

$$\rho + \frac{\tau}{10}(\rho' - \rho).$$

Si l'on a $l = l_0$, le procédé sera le même : seulement $l - l_0$ étant nul, le calcul se simplifiera.

2°. Supposons maintenant qu'à l'aide de la table construite comme précédemment on veuille avoir les coord. pour une date intermédiaire. On formera le coefficient τ comme dans le cas précédent en substituant la date actuelle à la date t. En appelant p le nombre de jours écoulés entre les deux dates, on interpolera en prenant $p + \tau$ au lieu de τ.

Mais dans l'année il y a un jour où la même étoile passe deux fois au méridien. Si ce jour tombe entre la date t et la date θ qui la suit 10 jours d'après, l'intervalle tabulaire est en réalité de 11 jours d'horloge. Il faudra alors prendre $\frac{p+\tau}{11}$ pour les passages depuis celui de la date t jusqu'au premier passage inclusivement et $\frac{p+\tau+1}{11}$ pour les passages suivants.

3°. Si l'on veut avoir les coord. d'une étoile dont le lieu apparent n'est donné par aucune éphéméride, le plus simple est de calculer les coord. pour le minuit qui précède l'époque et pour celui qui le suit et d'interpoler ensuite à l'aide d'un coefficient analogue à τ.

Applications de l'Astronomie sphérique.

Introduction.

I. Dans les chapitres qui précèdent, nous avons traité des lois générales qui régissent les mouvements des corps célestes et les différentes questions théoriques qui s'y rapportent. Nous avons même donné les moyens de trouver, ou moins approximativement, les valeurs numériques de quelques-unes des constantes qui entrent dans nos formules. Pour compléter l'étude purement géométrique du ciel que nous nous sommes proposé de faire, il nous reste encore à rechercher les moyens les plus précis possible d'avoir des valeurs plus exactes de nos constantes, et de remonter de là à la prédiction des places des étoiles fixes, du Soleil, de la Lune, des planètes & des comètes même si c'est possible, et cela avec autant de commodité que possible. En d'autres termes, il nous reste encore à traiter 1° la détermination des valeurs les plus probables des constantes astronomiques. 2° la construction des éphémérides.

L'ordre logique exigerait d'entamer tout de suite ces deux questions avant de sortir du cadre strictement théorique. Mais comme ces questions se rattachent, pour la plus à une branche spéciale des mathématiques appliquées, au calcul des probabilités, et pour l'autre à ce que l'on appelle la mécanique céleste, et qui ont été faites de l'astronomie ayant pour but de remonter des lois géométriques des mouvements célestes à leurs causes physiques, nous préférons ajourner ces questions jusqu'au moment où nous serons plus familiarisés avec ces deux théories; peut-être même plutôt, nous attendrons le moment où nous aurons une idée approchée de ce qu'elles peuvent être.

Quant à présent, nous admettrons que nous ayons

un recueil d'éphémérides, aussi corrects que possible.
nous abstiendrons par exemple dans la discussion de ce que nous fournit le "Nautical Almanac" et nous indiquerons quelques applications importantes que l'on en peut faire soit en Géodésie soit en navigation, soit dans d'autres questions.

Ce qui va suivre ne sera donc qu'une simple digression, mais une digression très-intéressante même pour ceux qui s'occupent exclusivement de l'astronomie pure; car elle sera une préparation très-utile à l'astronomie pratique proprement dite qui est la base de la question de la détermination des constantes.

Précisons maintenant notre problème. Il peut être énoncé comme il suit:

On possède d'un lieu un recueil d'éphémérides permettant de trouver pour chaque instant d'époque rapporté au temps d'un méridien déterminé, soit de Greenwich, les places du Soleil, de la Lune, des planètes et de quelques étoiles fixes; d'un autre côté, un instrument qui permet de trouver soit la hauteur soit l'azimut d'un astre soit l'une et l'autre avec un chronomètre bien réglé d'un astre et de ce coord. à un instant quelconque. On demande de déduire d'une ou de plusieurs observations effectuées avec cet instrument:

1° Soit le temps local de l'observation.
2° Soit la latitude du lieu de l'observation.
3° Soit la position de la ligne Nord-Sud.
4° Soit la différence de longitudes de deux lieux.

Nous n'entreprendrons pas de résoudre ces questions pour un observatoire fixe, car alors nous ferons de tous les besoins d'un tel observatoire un l'objet d'une étude approfondie dans la astronomie pratique.

Nous traiterons seulement les deux cas suivants:

1° Cas où l'on est arrêté à terre hors d'un observatoire.
2° Cas où l'on est sur mer.

Le second cas est celui de ce que l'on appelle

astronomie nautique.

II. Principe général. - Soit

$$f(x, y, z, u, \ldots) = 0$$

une relation qui existe entre plusieurs quantités $x, y, z \ldots$ soit n le nombre de ces quantités. Supposons que d'après des observations préalables, on connaisse les valeurs de $n-2$ quantités qui entrent dans cette relation, et que l'observation actuelle ait fait connaître la valeur de l'une des deux quantités restantes, y par exemple. Il s'agit d'en déduire la valeur de l'autre quantité, soit x, ou au moins sa valeur approchée.

Soit x_0 la valeur de x donnée par l'observation actuelle et δx la correction qu'il faut lui appliquer à ce résultat pour avoir sa valeur rigoureusement exacte. Soient de même z_0, u_0 etc les valeurs approchées de $z, u \ldots$ et $z_0 + \delta z, u_0 + \delta u$, etc leurs valeurs vraies. Appelons x_0 la valeur de x qu'on déduit de l'éq. précédente en y mettant à la place de $y, z, u, \ldots$ leurs valeurs approchées $y_0, z_0 \ldots$ et δx la correction qu'il faut ajouter à x_0 pour avoir la valeur exacte de x. On aura par définition

$$(1) \qquad f(x_0, y_0, z_0, u_0 \ldots) = 0$$

$$(2) \qquad f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, u_0 + \delta u, \ldots) = 0.$$

Supposons que $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ soient assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits. Alors l'équation (2) développée suivant les puissances par la formule de Taylor deviendra, d'après l'éq. (1):

$$f'_{x_0} \delta x + f'_{y_0} \delta y + f'_{z_0} \delta z + f'_{u_0} \delta u + \ldots = 0.$$

On en tire:

$$(3) \qquad \delta x = -\frac{f'_{y_0}}{f'_{x_0}} \delta y - \frac{f'_{z_0}}{f'_{x_0}} \delta z - \frac{f'_{u_0}}{f'_{x_0}} \delta u - \ldots$$

Si l'on détermine ultérieurement $\delta y, \delta z, \delta u$ etc par un procédé d'éq. cette équation fait connaître f'_{x_0}

la correction qu'il faut appliquer à la valeur x₀ préalablement déterminée de l'inconnue x. Mais si l'on suppose que l'on ignore entièrement f_x', f_y', et cette même équation nous donne les précautions importantes pour choisir les circonstances les plus favorables pour la détermination de x et éviter les circonstances défavorables.

1°. Supposons que f_{x_0}' soit très-petit. Alors les coefficients des quantités f_y', f_z', $\dots$ seront au bien très-grands, et dans ce cas une petite erreur dans une quantité donnée pourra entraîner une grande erreur sur la valeur de x, ou bien ils seront indéterminés. Supposons au contraire, que f_x' soit très-grande. Alors, au moins les coefficients de f_y', f_z', $\dots$ seront au bien très-petits, et alors une petite erreur des données n'aura presque aucune influence sur le résultat, ou bien ils seront d'une grandeur finie, si le dénominateur est lui-même très-grand à moins d'une circonstance exceptionnelle.

On en conclut qu'il y a avantage à choisir des circonstances dans lesquelles f_{x_0}' soit grand et désavantageux à éviter celles où il est petit.

Supposons par exemple que z soit une des quantités constantes. On a alors:

$$f_x' dx + f_y' dy = 0$$

d'où

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y'}{f_x'} \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y'}{f_x'}$$

On voit ainsi que le cas le plus défavorable est celui où la fonction f_x' passe par un maximum ou par un minimum, et que le cas le plus favorable est celui où c'est la fonction x de y qui passe par un maximum ou par un minimum.

2°. Pour les quantités f_{y_0}', f_{z_0}', f_{u_0}', $\dots$ on devra choisir les circonstances ou bien dans lesquelles

elles soient les plus petites possible. Mais en général, on ne peut pas chercher faire en sorte que tous les coefficients du second membre soient voisins de zéro. Alors tout ce qu'on peut faire est de faire en sorte que quelques-uns seulement d'entre eux soient petits et les autres finis. On devra éviter, dans tous les cas, les circonstances où quelques-uns de ces coefficients ou un même, un seul, seraient infinis en très grands, faisant tous les autres négligeables, car l'influence du terme ayant ce coefficient suffirait à elle seule pour fausser la exactitude. valeur de l'inconnue x.

3° Supposons que dans l'éq. précédente on ait à peu près $f'=0$, $f'_{x_0}=0$, ... et que le coefficient de y^3 soit d'une grandeur finie. Alors, puisque les quantités z, ... ne seront connues qu'approximativement on pourra néanmoins avoir une valeur très-exacte de x, pourvu que l'observation qui fournit la valeur de y soit elle-même exacte. C'est ainsi que, en présence de plusieurs quantités dont les valeurs exactes sont toutes inconnues, on peut dans certains cas isoler une seule d'entre elles et la déterminer avec exactitude, on la main à une quantité finie du 2d ordre par rapport aux corrections des autres quantités.

Tous ces préceptes n'embrassent pas, il s'en faut bien, tous les cas que nous aurons à traiter, mais ils nous dispenseront toujours servirant toujours d'un guide utile et nous indiqueront la marche à suivre dans nos observations et nos discussions. Tels qu'ils sont, ils résoudront immédiatement la question de la détermination du temps par l'observation d'une hauteur.

Remarque I. L'instrument de hauteur en astronomie est généralement capable de donner

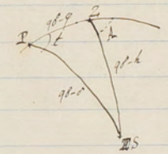
les dix secondes d'arc et pas plus loin. Nous supposerons donc dans ce qui suit, que l'on ait affaire à un pareil instrument, à moins toutefois d'une mention spéciale.

Remarque II. Nous traiterons d'abord le cas où l'on est à terre et nous examinerons ensuite dans le même chapitre tout ce qui est particulier aux observations en mer.

I. Détermination du temps.

I. Par l'observation du passage d'une étoile au méridien. – Le détail de ce mode de détermination a été donné ailleurs; nous n'y reviendrons pas. Ajoutons seulement que cette méthode est la plus précise de toutes, si l'on ne l'emploie pas toujours, c'est parce qu'elle exige un instrument spécial, qu'on appelle la lunette méridienne portative. Il est vrai qu'on peut remplacer avec cet instrument spécial par un altazimut ordinaire dont on fait le cercle vertical dans un plan parallèle à celui du méridien; mais le résultat n'est pas aussi exact qu'avec une lunette méridienne.

II. – Par l'observation d'une hauteur. – Dans le triangle formé par le pôle P, le zénith Z et l'astre S, on a en appelant t l'angle horaire de l'astre et δ sa déclinaison:



(1) $\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$

équation qui détermine t en fonction de la hauteur h pourvu que l'on connaisse préalablement la latitude φ du lieu de l'observation ainsi que la déclinaison de l'astre.

Pour nous conformer à la notation du chapitre précédent, posons

$$f(t,h,\varphi,\delta) = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t - \sin h.$$

Notre équation est alors:

$$f(t,h,\varphi,\delta) = 0$$

et l'équation qui détermine la correction est, en écrivant δ au lieu de P:

$$\cos\varphi\cos\delta\,dt + \cos h\,dh - (\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos t)\,d\varphi - (\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t)\,d\delta = 0$$

mais en appelant A et π l'azimut et l'angle parallactique de l'astre, on a:

$$-\cos h\cos A = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t$$

$$\cos h\sin\pi = \cos\varphi\sin t.$$

Notre équation devient donc:

$$\cos\varphi\sin A\,dt + \cos h\,dh + \cos h\cos A\,d\varphi - \cos h\cos\pi\,dP = 0$$

Le coefficient de dt devrait nul si $A = 90°$ sans que les autres coefficients le devinssent tous; il devrait nul aussi pour $t = 0$ ou $180°$. Donc dans notre détermination on doit éviter 1° d'observer une étoile près du point; 2° d'observer à une époque très peu passage au méridien. Par une raison analogue on évitera de viser un astre dans le voisinage de l'horizon.

Comme on a :

$$\frac{\sin t}{\cos\delta} = \frac{\sin A}{\cos\varphi} = \frac{\sin\pi}{\cos\varphi}$$

on peut écrire notre formule

$$(2)\qquad dt = -\frac{1}{\sin A\cos\varphi}\left(\text{ou }\frac{1}{\sin\pi\cos\varphi}\right)dh - \cot A\tan\varphi\,d\varphi + \cot\pi\tan\delta\,d\delta$$

On voit que le coefficient de dh ne saurait jamais être nul; mais il sera le plus petit possible si l'on a $\sin A = \pm 1$ ou $\sin\pi = \pm 1$. La première condition est celle que l'on cherche généralement à remplir; car elle a l'avantage d'annuler le coefficient de la correction $d\varphi$ presque toujours inconnue. C'est à dire qu'on observera, toutes les fois que cela sera possible, dans le plan du premier vertical.

Formule pratique. — Si l'on appelle z la distance zénithale correspondante à la hauteur h, et qu'on pose

$$2S = \varphi + \delta + z$$

nous avons montré qu'on a

$$(3)\qquad \tan\frac{1}{2}t = \pm\sqrt{\frac{\sin(S-\varphi)\sin(S-\delta)}{\cos S\cos(S-z)}}$$

où l'on prendra le signe + ou le signe − suivant que l'on a observé avant ou après le passage au méridien. Ayant calculé t, la formule

$$(4)\qquad \Theta = t + \alpha$$

donnera le temps sidéral de l'observation. En le comparant au temps que donne le chronomètre, on aura la correction de celui-ci.*

Il est presque inutile d'ajouter que la valeur de z donnée par l'observation devra être corrigée de la réfraction. Si c'est le Soleil ou une planète, on devra la corriger aussi de la parallaxe.

Cas où l'on a pris plusieurs hauteurs successives. — Soient $z_1, z_2, \ldots z_n$ les valeurs de z pour les époques $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$

* S'il s'agit du Soleil, t ainsi calculé sera le temps solaire vrai au moment de l'observation. On en déduira le temps moyen et on comparera au temps donné par le chronomètre.

et soient $I_1, I_2 \ldots I_n$ les indications du chronomètre à ces différents instants. Appelons I_0, Θ_0, T_0 les moyennes arithmétiques des nombres I, Θ, T. Pendant la série d'obs. on peut supposer la marche du chronomètre constante, si on la désigne par a, on aura en général

$$T_i + \Delta T_0 + a(\Theta_i - \Theta_0) = \Theta_i$$

ΔT_0 étant la correction du chronomètre à l'époque Θ_0.
On aura donc en faisant la somme et remarquant que $\Sigma(\Theta_i - \Theta_0) = 0$

$$\Sigma T_i + n\Delta T_0 = \Sigma\Theta$$

c'à.d.:

$$\Delta T_0 = \Theta_0 - I_0.$$

Il nous suffit d'avoir Θ_0 pour trouver ΔT_0.

Nous ferons le calcul pour le cas du Soleil et d'une étoile fixe les seuls importants dans la pratique.

Désignons nous d'abord par t_i les angles horaires de l'astre aux époques $\Theta_1, \Theta_2 \ldots \Theta_n$ et t_0 la moyenne des t. Appelons t_i' la valeur de t qui en résulte de l'éq. (3) en y mettant la valeur I_0 de T.* Si l'astre ~~se trouve à son~~ passe à distances égales du méridien, ce que nous supposons ici, la distance zénithale z_i peut être prise égale à

$$z_i = z_0 + \frac{dz}{dt}(t_i - t_0') + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{(t_i - t_0')^2}{2} \sin 1''$$

D'où en faisant la somme et remarquant que $\Sigma z = n z_0$:

$$0 = \frac{dz}{dt}(\Sigma t - n t_0') + \frac{d^2z}{dt^2}\Sigma\frac{(t_i - t_0')^2}{2}$$

D'où

$$t_0' = t_0 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} : \frac{dz}{dt}\right)\cdot\frac{1}{n}\Sigma\frac{(t_i - t_0')^2}{2}\sin 1''.$$

Calculons $\frac{d^2z}{dt^2} : \frac{dz}{dt}$. On a d'abord

$$\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \sin A$$

on en tire ensuite

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \cos\varphi \cos A \frac{dA}{dt}.$$

Mais nous avons d'après une formule donnée dans le chapitre I:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos P \cos\pi}{\cos h}.$$

On aura donc:

$$\frac{d^2z}{dt^2} : \frac{dz}{dt} = \frac{\cos P \cos\pi \cos A}{\cos h \sin A}.$$

* C'à.d. l'angle horaire de l'étoile au moment où la hauteur distance zénithale est égale à $\pm z_0$.

Si c'est le Soleil qu'on a observé, remarquons qu'on a:
$\Pi_i + \Delta\Pi_0 + \alpha(\Pi_i - \Pi_0) = t_i + \varepsilon_i$ ε_i était l'équation du temps.
Si en outre, puisque ε varie proportionnellement au temps dans le court laps de temps considéré
$\Sigma\Pi_i + n\Delta\Pi_0 = \Sigma t_i + \Sigma\varepsilon_i$ on a $\Delta\Pi_0 = t_0 + \Theta\varepsilon_0 - \Pi_0$
ε_0 était l'éq. du temps à l'époque t_0. Et si l'on a employé un chronom. $t_i - t_0 = \Pi_i - \Pi_0$ sensiblement. On aura donc:
$\Delta\Pi_0 = t_0 + \varepsilon_0 - n_0 \cot t + n_0 \frac{\cos\varphi \cos P \sin t}{\sin z \sin P}$.
$-\Pi_0$

Pour n'employer que des quantités déjà calculées, rappelons nous qu'on a:

$$\cot t = \cos\pi \cos A + \sin\pi \cot A \cos\Omega$$

d'où

$$\cos\pi \cos A = \cot t - \sin\pi \cot A \cdot \cos\Omega = \cot t - \frac{\cos\varphi \sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos P \sin t}{\cos t} \cos\Omega .$$

Car on a aussi:

$$\cot t \sin A = \cos P \sin t .$$

Donc:

$$\frac{d\Omega}{dt} : \frac{d\Omega}{dt} = \cot t - \frac{\cos\varphi \cos P \sin t}{\sin z \sin P \sin\Omega} .$$

On aura donc enfin:

$$t_0' = t_0 + \left(\cot t - \frac{\cos\varphi \cos P \sin t}{\sin z \sin P \sin\Omega}\right) \frac{1}{15} \sum \tfrac{1}{2}(t_i - t_0)^2 \sin 1''.$$

Dans le cas d'une étoile fixe, α est constant et l'on a $t_0' = \Theta_0' - \alpha$ $t_0 = \Theta_0 - \alpha$

et pour l'un quelconque d'entre eux on aurait sensiblement $(t_i - t_0')^2 = (\Pi_i - \Pi_0)^2$. si l'obsn. est idéale.

et par suite:

$$\Theta_0' = \Theta_0 + \left(\cot t - \frac{\cos\varphi \cos P \sin t}{\sin z \sin P \sin\Omega}\right) \frac{1}{15} \sum \tfrac{1}{2}\left(\frac{15}{1''}\right)^2 (\Pi_i - \Pi_0)^2 \sin 1''.$$

Puisque la durée de la série est toujours fort petite, on peut prendre sensiblement

$$\frac{1}{2}\left[15(\Pi_i - \Pi_0)\right]^2 \sin 1'' = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}(\Pi_i - \Pi_0)}{\sin 1''}$$

Cette quantité est donnée en table dans tous les livres d'astronomie pratique, $\Pi_i - \Pi_0$ comme argument. Désignons la par m et posons:

$$\frac{1}{n} \sum \frac{1}{2} m = m_0$$

alors on aura:

$$\Theta_0 = \overset{t_1 + \alpha}{\Theta_0'} - m_0 \cot t + m_0 \frac{\cos\varphi \cos P \sin t}{\sin z \sin P}.$$

En mettant cette valeur de Θ dans la formule $\Delta\Pi = \Theta_0 - \Pi_0$ on aura la correction cherchée $\Delta\Pi_0$ de l'horomètre.

Si l'on a affaire à une observation du Soleil, et que l'on emploie un chronomètre du temps sidéral moyen on pourra appliquer sensiblement tout ce que l'on vient de voir en changeant seulement le temps sidéral en temps moyen.

Remarque. - Dans le cas où l'on a observé un astre dont la déclinaison est variable, il faut connaître, au moins approximativement, la valeur de cette déclinaison

au moment de l'observation, et pour la connaître à l'aide de l'éphéméride, il faut connaître la longitude du lieu et le temps local; il semblerait donc qu'il y ait là un cercle vicieux. Mais dans la pratique, cela ne donne lieu à aucune difficulté sérieuse, car on connaît toujours de bonnes valeurs suffisamment approchées de ces deux quantités, et d'ailleurs, si cela est nécessaire, on aura recours à la méthode des approximations successives.

III. Par la méthode des hauteurs correspondantes.—

Avec un instrument de hauteur, on observe avant et après le passage d'une même étoile au méridien et l'on note les temps du chronomètre T_1 et T_2. On fait en sorte que la seconde observation ait lieu à la même hauteur de l'étoile. Si l'on appelle t_1 et t_2 les angles horaires aux deux époques d'observation et Θ_1, Θ_2 les temps sidéraux correspondants, on aura évidemment:

$$t_1 = -t_2$$

et comme on a

$$\Theta_1 = t_1 + \alpha \qquad \Theta_2 = t_2 + \alpha$$

on aura:

$$\tfrac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) = \alpha.$$

c'est-à-dire que l'époque moyenne est celle du passage de l'étoile au méridien.

Supposons que la marche horaire du chronomètre soit constante de la 1re époque à la seconde; et appelons T_0 la moyenne arithmétique de T_1 et T_2 et ΔT la correction que l'on doit appliquer à T_0 pour obtenir l'époque moyenne du chronomètre à l'époque $\tfrac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)$. Nous aurons:

$$\Theta_1 = T_1 + \Delta T + a\left(\Theta_1 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}\right)$$

$$\Theta_2 = T_2 + \Delta T + a\left(\Theta_2 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}\right)$$

en ayant égard à

$$\Theta_1 + \Theta_2 = T_1 + T_2 + 2\Delta T.$$

D'où

$$\Delta T = \alpha - T_0.$$

ce qui détermine ΔT_0.

Remarquons que ΔT_0 sera d'autant mieux déterminé que T_1 et T_2 seront mieux connus ; or ces derniers quantités ne varient à peu près proportionnellement à t_1 et t_2. Donc les conditions favorables et défavorables pour le problème actuel sont les mêmes que pour le problème précédent.

Cas où la déclinaison de l'astre est variable.—

Nous traiterons seulement le cas où l'on observe la hauteur h avant et après le midi vrai ou le minuit vrai.

Supposons d'abord que ce soit avant et après le midi vrai ; supposons aussi que l'on ait un chronomètre dont le temps moyen dont la marche est connue. Soient T_1, T_2 les indications de ce chronomètre aux deux époques des observations ramenées à celles de une époque qcq déterminée* ; soit toujours T_0 le moy. de T_1 et T_2. Soit ΔT_0 le temps écoulé depuis l'époque qui serait marquée par $\frac{1}{2}(T_1+T_2)$ ou T_0 jusqu'au midi vrai ; soit t_1 et t_2 les angles horaires du Soleil aux deux époques d'observations c'est-à-dire les temps solaires vrais à ces deux époques. Posons en outre :

$$\tau = T_0 - T_1 = T_2 - T_0 = \tfrac{1}{2}(T_2 - T_1).$$

Nous avons d'abord semblablement :

$$t_1 = -(\tau + x) \qquad t_2 = \tau - x.$$

On a maintenant en appelant h la hauteur observée et $\Delta\delta$ la variation de la déclinaison du Soleil dans l'intervalle de temps égal à τ et δ sa valeur à midi vrai :

$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta - \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta - \Delta\delta)\cos(\tau + x)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta + \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta + \Delta\delta)\cos(\tau - x).$$

On en tire en retranchant :

$$0 = \sin\varphi \sin\Delta\delta \cos\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\Delta\delta \sin\tau \sin x$$
$$- \cos\varphi \sin\delta \sin\Delta\delta \cos\tau \cos x.$$

Mais $\Delta\delta$ étant petit, on peut prendre $\sin\Delta\delta = \Delta\delta$ et $1 = \cos\Delta\delta$, il en résulte qu'on peut faire la même chose pour x. On aura donc :

$$x = -\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\tau} - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}\tau}\right)\Delta\delta.$$

* On fera cette réduction en tenant aussi compte de la diff. des équations du temps c'est-à-dire qu'on réduira le temps observé en temps Solaire vrai.

Soit p la variation horaire de la déclinaison au midi vrai du lieu d'observation ; à nombre pouvant être limité de l'ephéméride près simple interpolation. Si l'on exprime τ en heures, on aura

$$\Delta P = p.\tau$$

et l'on aura en exprimant x en secondes de temps.

$$x = -\frac{\delta\rho}{\delta\tau}\frac{4.\tau}{15} + \frac{\delta P}{\delta\tau}\cdot\frac{4\tau}{15}.$$

Posons :

$$A = -\frac{\alpha}{15\delta\tau} \qquad B = \frac{\tau}{15\delta\tau}.$$

alors on aura

$$x = A\,4\,\delta\rho + B\,4\,\delta P.$$

La quantité x qu'il faut ajouter à la moyenne $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ pour avoir le temps du chronomètre à midi vrai s'appelle l'équation des hauteurs correspondantes pour midi ou la correction du midi.

Dans la Table IV de Chauvenet, on trouve $\log A$ et $\log B$ avec 2τ comme argument sous le titre de "elapsed time". On peut donc trouver facilement x.

Ayant trouvé x, on l'ajoutera à $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ et en comparant au temps moyen à midi vrai, on aura la correction du chronomètre pour cette époque.

Supposons maintenant que l'on ait fait la 1re observation après le midi d'un certain jour et la 2e avant le midi du jour suivant. Soit τ le demi-intervalle des deux observations et x la correction qu'il faut ajouter à la moyenne des deux temps donnés par le chronomètre pour avoir celui correspondant au minuit vrai ; x est ce que l'on appelle l'éq. des haut. correspondantes pour le minuit ou la correction du minuit.

On aura ici en appelant δ la decl. de $\odot$ à minuit.

$$\sin h = \sin\varphi\sin(\delta - \Delta\delta) + \cos\varphi\cos(\delta - \Delta\delta)\cos\left[12^h - (\tau + x)\right]$$

$$\sin h = \sin\varphi\sin(\delta + \Delta\delta) + \cos\varphi\cos(\delta + \Delta\delta)\cos\left[12^h - (\tau - x)\right]$$

Ces équations ne diffèrent des précédentes qu'en ce que τ a été remplacé par $12^h - \tau$ et x par $-x$. On aura donc :

$$-x = -\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}+\frac{\partial P}{\partial \tau'}\right)\Delta\delta.$$

On aura donc en faisant une transformation analogue à la précédente:

$$x = -A\mu\,\Delta\varphi + B\mu\,\Delta\delta$$

et la marche du calcul restera la même, sauf le changement de signe de la quantité A.

Influence d'une petite inégalité de hauteurs. -

Par suite du changement de la réfraction, ou par d'autres causes, la hauteur de la seconde observation peut être différente de la 1re d'une petite quantité Δh. Or d'après l'équation différentielle du paragraphe précédent, on a entre Δh et l'accroissement correspondant Δt de l'angle horaire:

$$\cos\varphi\cos\delta\,\Delta t + \cos h\,\Delta h = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta t = -\frac{\cos h\,\Delta h}{\cos\varphi\cos\delta\sin t}.$$

Or le second angle horaire étant trop grand de Δt, la moyenne des deux temps de chronomètre à T_0 est trop grand de $\frac{1}{2}\Delta t$ pour être comparé à α. On doit donc lui appliquer la correction $-\frac{1}{2}\Delta t$. En appelant δT_0 cette correction, on aura donc,

$$\delta T_0 = \frac{1}{2}\frac{\cos h\,\Delta h}{\cos\varphi\cos\delta\sin t}$$

ou en temps

$$\delta T_0 = \frac{\cos h\,\Delta h}{30\cos\varphi\cos\delta\sin t}.$$

II. Détermination de la latitude.

I. Par une observation de hauteur quelconque.

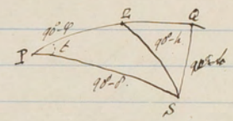
Reprenons l'équation

$$\tan h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t.$$

Si l'on connaît h δ et t, cette équation ne contenant plus d'inconnue que φ, pourra alors servir à la déterminer, c'est-à-dire que par une observation de la hauteur d'une étoile connue à une époque connue, on pourra déterminer la latitude du lieu de l'observation.

Pour résoudre commodément l'éq. précédente, abaissons du lieu S de la 2e astre l'arc SQ perpendiculaire.

Posons:



$$PQ = \pm(\varphi - \delta)$$

$$\pm ZQ = \oplus Z_1,$$

en convenant de prendre le signe + ou le signe − suivant que dans la 1re formule pour la 1re éq. suivant que le point Q se trouve du même côté de P que Z ou du côté opposé et dans la 2e suivant que cette Q se trouve au sud ou au nord du point Z. On aura alors dans tous les cas:

$$\varphi = \delta_1 + Z_1,$$

Maintenant dans le triangle PSQ, on a dans tous les cas:

$$\tan\delta = \cos SQ \tan\delta$$

$$\cos t \cos\varphi = \cos SQ \cos\delta \sin\varphi$$

En substituant ces valeurs dans l'éq. précédente il vient

$$\tan h = \cos SQ \cos(\varphi - \delta_1) = \cos SQ \cos Z_1$$

Comme $\cos SQ$ est évidemment positif on aura sans ambiguité la valeur de δ_1 par l'éq.

$$\tan\delta_1 = \frac{\tan h}{\cos t \cos\varphi}$$

en observant que $\cos t$ et $\tan\delta_1$ ont la même signe. ou bien par.

$$\tan\delta_1 = \tan\delta \sec t. \qquad (1)$$

Ensuite l'éq.

$$\cos Z_1 = \frac{\sin h}{\cos SQ}$$

on

$$(2)\qquad \cos Z_1 = \frac{\sin k + \sin l \sin P}{\cos l \cos P}$$

donnera $\cos Z_1$, et comme Z_1 est évidemment un angle compris entre $-90°$ & $90°$ et que l'on sait dès lors de quel côté de $Z_1 + \omega -$ suivant que l'astre est au Sud ou au Nord du premier vertical, on aura Z_1 sans ambiguité.

Enfin l'éq.

$$(3)\qquad q = \delta_1 + Z_1$$

donnera la latitude cherchée.

Dans le cas où l'astre a été observé dans le méridien, on a d'abord d'après (1)

$$\delta \pm p = \varphi.$$

et la définition de PC montre que l'on a:

$$(1')\qquad \delta = \delta_1 \text{ ou } 180° - \delta_1$$

suivant que l'astre fait son passage supérieur ou son passage inférieur.

On aura ensuite

$$(2')\qquad Z_1 = Z$$

en convenant de compter, comme nous l'avons déjà fait, de la distance zénithale méridienne positivement vers le Sud et négativement vers le Nord.

On pourra donc écrire dans ce cas

$$(3')\qquad q = \delta + Z_1$$

en faisant entre la convention relative à Z_1, cette nouvelle convention que la déclinaison serait comptée de 0 à 180° de l'équateur vers le pôle en traversant le zénith.

Influence des erreurs dans les données. – Reprenons l'équation différentielle du chapitre précédent.

$$\cos\varphi \cos A\, dt + \cos k\, dk + \cos l \sin A\, dq - \cos l \cos A\, dP = 0.$$

Substituons $\cos k\, dk$ par $\cos l \sin k\, dl$ et écrivons cette éq.:

$$dq = -dk \sin A - dl \cdot \tg A \cos q + dP \sec \pi \sin A \cos q.$$

On voit que les différents coefficients du second membre deviennent minimum quand l'astre se trouve dans le plan du méridien; le coefficient de dl y devient même nul. Donc le cas le plus favorable pour la détermination

de la latitude par une observation de hauteur est celle où l'on observe le plus près possible du méridien.

Cas où l'on observe une circumpolaire aux moments du passage supérieur & inférieur au méridien. –

Soient z & z' les distances zénithales aux époques des deux observations Δt δ & $\delta + \Delta\delta$ les déclinaisons apparentes aux époques. On aura alors:

$$\varphi = z + \delta$$
$$\varphi = z' + 180° - \delta - \Delta\delta.$$

d'où

$$\varphi = 90° + \tfrac{1}{2}(z + z') - \tfrac{1}{2}\Delta\delta.$$

Prenons au lieu de z & z' les hauteurs correspondantes h & h'. on aura:

$$-z = 90° - h \qquad -z' = 90° - h'.$$

par suite

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(h + h') - \tfrac{1}{2}\Delta\delta.$$

Pour connaître $\Delta\delta$ dû uniquement à la précession à la nutation etc, il suffit de connaître seulement une valeur approchée des coord. de l'étoile observée. Aussi cette méthode est-elle employée dans les observatoires où l'on se propose de déterminer les constantes astronomiques.

II. Par des hauteurs circumméridiennes. – Quand on observe la hauteur d'une étoile très près du méridien on dit que l'on observe sa hauteur circumméridienne.

Appelons δ la déclinaison de l'astre au moment où il passe au méridien, $\Delta\delta$ la quantité dont l'astre est près de faire son passage supérieur ou son passage inférieur, z la distance zénithale observée affectée du signe + ou du signe – suivant que l'astre est au Sud ou au Nord du zénith. Posons:

$$\varphi = \delta + z + \Delta$$

Si l'astre était, au moment de l'observation, exactement dans le méridien, c'est-à-dire si son angle horaire était nul, la quantité Δ serait nulle d'après ce que nous

avons dit dans le paragraphe précédent. Mais si t n'est que très petit en valeur absolue, R sera une petite quantité. Cette quantité R qui s'annule avec t est ce qu'on appelle la réduction au méridien. Il nous suffit d'avoir sa valeur pour connaître la latitude cherchée φ.

Reprenons l'équation

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$

ou en remplaçant $\cos t$ par $1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$.

$$\sin h = \cos(\varphi-\delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}.$$

Posons pour un moment:

$$-2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2} = x$$

alors:

$$\sin h = \cos(\varphi-\delta) + x$$

et l'on aura d'après la formule de Mac-Laurin:

$$h = h_0 + \left(\frac{dh}{dx}\right)_0\frac{x}{1} + \left(\frac{d^2h}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{2} + \dots$$

Or en différentiant l'éq. précédente, on a:

$$\cos h\,\frac{dh}{dx} = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{dx} = \frac{1}{\cos h}.$$

Ensuite

$$\frac{d^2h}{dx^2} = +\frac{\sin h}{\cos^2 h}\frac{dh}{dx} = \frac{\sin h}{\cos^3 h}.$$

Nous en nous arrêterons à ce terme du second ordre.

Maintenant pour $t=0$ et par suite $x=0$, on a, s'il s'agit d'une culmination supérieure:

$$\varphi = \delta + \Omega_0$$

c'est-à-dire $\Omega_0 = \pm(90^\circ - h) = \varphi - \delta$.

Donc:

$$90^\circ - h_0 = \pm(\varphi-\delta) \quad \text{ou} \quad h_0 = 90^\circ \mp (\varphi-\delta).$$

par suite:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_0 = \pm\frac{1}{\cos(\varphi-\delta)} \qquad \left(\frac{d^2h}{dx^2}\right)_0 = \pm\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos^2(\varphi-\delta)}.$$

et l'on aura:

$$90^\circ \mp \Omega = 90^\circ \mp (\varphi-\delta) \pm \frac{1}{\cos(\varphi-\delta)}\cdot x \pm \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos^2(\varphi-\delta)}\frac{x^2}{2}.$$

ou

$$\varphi = \delta + \Omega + \frac{1}{\cos(\varphi-\delta)}x + \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos^2(\varphi-\delta)}\cdot\frac{x^2}{2}.$$

On a donc:

$$R = \frac{1}{\cos(\varphi-\delta)}\cdot x + \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos^2(\varphi-\delta)}\cdot\frac{x^2}{2}.$$

ou enfin:

$$R = -m\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} + n\left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]^2\cot(\varphi-\delta)$$

en posant suivant l'usage

$$m = 2\pi^2\frac{1}{T}t \qquad n = 2\pi^4\frac{1}{T}t.$$

Tout ce que nous avons dit se rapporte au cas d'une culmination supérieure. Dans le cas d'une culmination inférieure, la déclinaison ne n'est plus égale à δ mais à $180°-\delta$ et en outre si nous convenons de compter l'angle horaire h à partir du moment de cette culmination, il faudra prendre 12^h+t au lieu de t. Donc

$$\sin h = \sin\varphi\sin(180°-\delta) + \cos\varphi\cos(180°-\delta)\cos(12^h+t).$$

ou bien

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$

équation de la même forme que dans le cas précédent. La expression de R sera donc aussi de la même forme.

Marche à suivre dans le calcul — L'angle horaire t de l'astre au moment de l'observation est supposé fourni par le chronomètre, alors les membres ne t sont connus, en degrés d'arc dans les tables de réduction que on trouve dans tous les recueils de table astronomique. Ensuite, à l'aide d'une valeur approchée de φ on calcule les coefficients de m et n. On en déduit une valeur de φ plus approchée, et l'on recommence, si on le juge nécessaire, le calcul avec cette nouvelle valeur de φ qu'on substitue dans le second membre.

Limites des erreurs commises dans R. — L'expression de R contenant $\sin(\varphi-\delta)$ au dénominateur n'est applicable que si la distance zénithale ne soit pas trop petite, à moins que l'angle horaire t ne soit lui-même très-petit.

Cherchons d'abord l'erreur commise en s'arrêtant au premier terme de R. Si l'on veut que le second terme de R soit égal à un nombre donné b, il faut que l'on ait

$$b = \frac{2\pi^4\frac{1}{T}t}{\sin 1''}\left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]^2\cot(\varphi-\delta).$$

Posons :

$$r = \frac{2\sin^4\frac{1}{2}t_1}{\sin^4 1''}\left[\frac{\cos\varphi\cos\rho}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\rho)}\right]^2 \cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\rho).$$

J'ai

$$\sin^2\tfrac{1}{2}t_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sin^4 1''(\varphi-\rho)\tan 1''}\;\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\rho)}{\cos\varphi\cos\rho}.$$

On peut construire une table à double entrée donnant pour chaque valeur de φ et de ρ celle du nombre t_1. (Table VII A de Chauvenet), on aura alors.

$$b = \frac{\sin^2\frac{1}{2}t_2}{\sin^2\frac{1}{2}t_1}$$

ou approximativement :

$$t = t_1\sqrt{b}.$$

La quantité t ainsi calculée sera la limite de l'angle horaire pour que l'erreur commise soit moindre que b.

Cherchons maintenant l'erreur commise en s'arrêtant au second terme de R, pour cela, il nous faut avoir le développement qui précède poussé au 3ème ordre.

On a :

$$\frac{\delta t}{\delta\Delta^3} = \frac{\cos h + 3\cos^3 h\tan^2 h}{\cos^3 h} = \frac{\cos^2 h + 3\sin^2 h}{\cos^4 h}.$$

Par suite, si l'on nomme c la valeur absolue du 3ème terme de R, on aura

$$c = \frac{8}{6}\frac{\cos^3\varphi\cos^3\rho}{\cos^6 h_0}\frac{\sin^6\frac{1}{2}t}{\sin^6 1''} = \frac{4}{3}\frac{\sin^6\frac{1}{2}t}{\sin^6 1''}\left[\frac{\cos\varphi\cos\rho}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\rho)}\right]^3\left(4+3\cot^2\tfrac{1}{2}(\varphi-\rho)\right).$$

Si l'on pose :

$$1 = \frac{4}{3}\frac{\sin^6\frac{1}{2}t_2}{\sin^6 1''}\left[\frac{\cos\varphi\cos\rho}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\rho)}\right]^3\left(4+3\cot^2\tfrac{1}{2}(\varphi-\rho)\right)$$

on aura :

$$\sin^2\tfrac{1}{2}t_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{\sin^2 1''}{4+3\cot^2\frac{1}{2}(\varphi-\rho)}}\;\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\rho)}{\cos\varphi\cos\rho}.$$

on aura comme précédemment

$$t = t_1\sqrt[6]{c}.$$

La table VII B de Chauvenet donne t_2 de la même façon que A donne t_1.

Cas où l'on a observé plusieurs hauteurs. — Dans la pratique, on observe toujours plusieurs hauteurs successives de même astre, soit z_i, t_i la distance zénithale et l'angle horaire au moment de $i$ème observation, posons :

$$m_i = 2\sin^2\tfrac{1}{2}t_i \qquad n_i = 2\sin^4\tfrac{1}{2}t_i$$

on aura alors :

$$\varphi = \delta + z_i - m_i \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} + n_i \left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]^2 \cot(\varphi-\delta)$$

En appelant donc z_0 et m_0 n_0 les moyennes de z_i, des m_i et des n_i on aura:

$$\varphi = \delta + z_0 - m_0 \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} + n_0 \left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]^2 \cot(\varphi-\delta).$$

Dans le cas où la déclinaison de l'astre est variable, comme dans le cas du Soleil, on pourra prendre dans R δ_0 au lieu de δ_i et l'on aura:

$$\varphi = \delta_0 + z_0 - m_0 \frac{\cos\varphi\cos\delta_0}{\sin(\varphi-\delta_0)} + n_0 \left[\frac{\cos\varphi\cos\delta_0}{\sin(\varphi-\delta_0)}\right]^2 \cot(\varphi-\delta_0)$$

δ_0 désignant la moyenne des déclinaisons.

On peut calculer δ_0 très-rapidement en observant que pendant la série d'observations, on peut regarder la variation de δ comme constante. On aura alors:

$$\delta_i = \delta'_0 + \mu(\tau_i - \tau_0)$$

μ désignant la variation de δ pour l'unité de temps, τ_i l'époque du $i^{ième}$ observation τ_0 l'époque moyenne, et δ'_0 la déclinaison à l'époque τ_0. On en tire:

$$\delta_0 = \delta'_0.$$

Méthode de Gauss pour la réduction des hauteurs du Soleil. – Quand on veut réduire une à une chaque observation du Soleil, il faudrait par la formule précédente calculer une à une la valeur de chaque δ par interpolation. On peut éviter cela à l'aide d'une méthode due à Gauss et qui consiste à compter les angles horaires non plus à partir du midi vrai mais à partir de l'instant où la hauteur du Soleil est maximum.

Appelons comme précédemment μ la variation horaire de la déclinaison du Soleil et δ_1 la déclinaison à midi vrai. On aura alors:

$$\varphi = \delta_1 + z + \mu t - 2\sin^2\tfrac{1}{2}t \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t \left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]^2 \cot(\varphi-\delta).$$

Posons:

$$\varphi = x + z + \mu t - 2\sin^2\tfrac{1}{2}t(1+x)\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t(1+x)\left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]^2 \cot(\varphi-\delta).$$

on devra avoir:

$$\mu t + 2\left\{\sin^2\tfrac{1}{2}t(1+x) - \sin^2\tfrac{1}{2}t\left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]\right\} - x\left\{1 + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t(1+x) + \sin^2\tfrac{1}{2}t\left[\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right]^2 \cot(\varphi-\delta)\right\} = 0.$$

Pour simplifier l'écriture posons:

$$\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} = A$$

On aura :

$$\varphi = \delta_1 + 2 + \mu t - 2\sin^2\tfrac{1}{2}t.\ A + 2\cos^2\tfrac{1}{2}t.\ A^2\cot(\varphi-\delta).$$

Donc :

$$\varphi = \delta_1 + 2 + 2\sin^2\tfrac{1}{2}x - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(t+x).\ A + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t\ A^2\cot(\varphi-\delta).$$

On devra avoir :

$$\mu t - 2\sin^2\tfrac{1}{2}t.\ A = 2\sin\tfrac{1}{2}x^{A} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(t+x).\ A$$

ou bien :

$$2A\left(\sin^2\tfrac{1}{2}(t+x) - \sin^2\tfrac{1}{2}t - \sin\tfrac{1}{2}x\right) = -\mu t.$$

On a en général

$$\sin^2 a - \sin^2 b = 2(\sin a - \sin b)(\sin a + \sin b)$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\ 2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$

ou $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a-b)\sin(a+b)$

Donc :

$$\sin^2\tfrac{1}{2}(t+x) - \sin^2\tfrac{1}{2}t - \sin^2\tfrac{1}{2}x = \sin\tfrac{1}{2}x\sin(t+\tfrac{1}{2}x) - \sin^2\tfrac{1}{2}x$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}x\left\{\sin(t+\tfrac{1}{2}x) - \sin\tfrac{1}{2}x\right\} = 2\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}t\cos\tfrac{1}{2}(t+x).$$

On devra donc avoir :

$$4A\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}t\cos\tfrac{1}{2}(t+x) = -\mu t.$$

D'où

$$2\sin\tfrac{1}{2}x = -\frac{\mu}{4}\cdot\frac{t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(t+x)}\sqrt[15^{\circ}3600\,\text{sid}]{1}$$

La quantité μ est toujours très petite ; son max. est $\frac{1}{3600}$ environ. On peut donc prendre 1° $2\sin\frac{1}{2}x = x$, 2° $\frac{t}{\sin\frac{1}{2}t}\sqrt[15^{\circ}3600\,\text{sid}]{1} = 1$, 3° $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(t+x)} = 1$. D'où :

$$x = -\frac{\mu}{A}\sqrt[15^{\circ}3600\,\text{sid}]{1} = -\mu\,\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}\sqrt[15^{\circ}3600\,\text{sid}]{1}$$

Si l'on veut exprimer x en secondes de temps, il faudra diviser μ par 15 et le multiplier par 86400. D'où :

$$x = -\frac{\mu}{15^{\circ}3600\sin 1''}\,\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

On peut écrire

$$x = -\frac{\mu}{15^{\circ}3600\sin 1''}(\tan\varphi - \tan\delta)$$

et si on compare cette formule avec la $1^{\text{ère}}$ éq.

$$t = \frac{1}{3600\sin 1''}\frac{t}{\sin t}(\tan\varphi - \tan\delta)$$

qui donne l'époque de la plus grande hauteur du soleil, on voit (complément au Chapitre I) que x n'est autre chose que l'angle horaire du soleil à cette époque pris avec un signe contraire. Donc $t+x$ n'est autre

que l'angle horaire du soleil compté à partir du vertical de la hauteur du soleil devient maximum.

Posons pour abréger

$$t_1 = t + x$$

alors en prenant t_1 au lieu de t dans le terme du second ordre on aura

$$\varphi = \delta + Z - A.2\sin\tfrac{1}{2}t_1 + A^2\sin(\varphi-\delta)2\sin^2\tfrac{t_1}{2} + A.2\sin^2\tfrac{1}{2}x$$

avec :

$$t_1 = t - \frac{A}{\sin^2 1'' \cos\varphi\cos\delta\sin Z}\cdot\frac{t}{A}$$

$$A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\cos(\varphi-\delta)}.$$

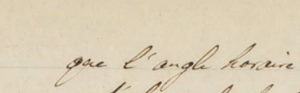
Le terme $A.2\sin^2\frac{1}{2}x$ est presque toujours insensible ; mais on le gardera parce que son calcul est très-aisé.

III. Par une observation extra-méridienne de l'étoile polaire. - L'étoile α Petite Ourse étant très-près du pôle, sa hauteur sera un peu de l'hémisphère boréal et très-près d'être égale à la latitude du lieu. Il faut donc nous poser :

$$\varphi = h + R$$

R sera une petite quantité.

Nous allons développer R en fonction de la distance polaire p de l'étoile. Pour cela par l'étoile S menons un arc de grand cercle SQ perpendiculaire au méridien et prenons pour un instant a l'arc SQ ; et posons :



$$PQ = \pm x \qquad QZ = 90° - h - y$$

et nous prendrons devant x le signe + ou le signe - suivant que Q sera entre P & Z ou en dehors de P par rapport à Z. Nous aurons alors dans tous les cas :

$$\sin x = \sin p \cos\alpha.$$

$$\varphi = 90° - x - (90° - h - y)$$
$$= h - x + y.$$

Par suite :

$$R = y - x.$$

Maintenant on a dans tous les cas :

(1) $\qquad \sin x = \sin p \cos\alpha$

(2) $\tan u = \sin\rho \tan t$

(3) $\tan(x+y) = \frac{\tan x}{\cos u}$.

Développons d'abord x en négligeant la puissance $5^{ième}$ de ρ. On a alors d'après (1):

$$x + \tfrac{1}{3}x^3 = \rho + \tfrac{1}{3}\rho^3 \sin^2 t$$

ou bien:

$$x = \rho\sin t + \tfrac{1}{3}\rho^3 \sin^2 t - \tfrac{1}{3}x^3$$

On peut remplacer dans le 2^{e} membre x par $\rho\sin t$, ce qui donne:

$$x = \rho\sin t + \tfrac{1}{3}\rho^3 \sin^3 t.$$

On a ensuite d'après (2):

$$u - \tfrac{1}{6}u^3 = (\rho - \tfrac{1}{6}\rho^3)\sin t$$

ou bien:

$$u = \rho\sin t - \tfrac{1}{6}\rho^3 \sin t \cos^2 t.$$

Enfin l'éq. (3) peut s'écrire

$$\tan x \cos y + \cos x \sin y = \frac{\tan x}{\cos u}.$$

ou $$\tan x - 2\tan x \sin^2 \tfrac{1}{2}y + \cos x \sin y = \frac{\tan x}{\cos u}.$$

D'où l'on tire:

$$\sin y = \frac{1-\cos u}{\cos u}\tan x + 2\sin^2\tfrac{1}{2}y \tan x.$$

Mais on a:

$$\frac{1-\cos u}{\cos u} = \frac{1-(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24})}{1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}} = \left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{24}\right)\left(1-\frac{u^2}{2}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{24}\right)\left(1+\frac{u^2}{2}\right) = \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{24} + \frac{u^4}{4} = \frac{u^2}{2} + \frac{5u^4}{24}$$

D'où l'on tire en remplaçant u par sa valeur:

$$\frac{1-\cos u}{\cos u}\sin y = \tfrac{1}{2}\rho^2 \sin^2 t - \tfrac{1}{6}\rho^4 \sin^2 t \cos^2 t + \tfrac{5}{24}\rho^4 \sin^4 t$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho^2 \sin^2 t - \tfrac{1}{24}\rho^4 \sin^2 t (4\cos^2 t - 5\sin^2 t)$$

Donc en remplaçant $\sin y$ par y, ce que l'on peut faire puisque y est du 2^{e} ordre et par suite y^3 du $5^{ième}$:

$$y = \tfrac{1}{2}\rho^2 \sin^2 t \tan x - \tfrac{1}{24}\rho^4 \sin^2 t (4\cos^2 t - 5\sin^2 t)\tan x + \tfrac{1}{2}y^2 \tan x.$$

ou en remplaçant dans $\frac{1}{2}y^2$, y par sa valeur approchée:

$$y = \tfrac{1}{2}\rho^2 \sin^2 t \tan x - \tfrac{1}{24}\rho^4 \sin^2 t (4\cos^2 t - 5\sin^2 t)\tan x + \tfrac{1}{8}\rho^4 \sin^4 t \tan x.$$

On aura donc enfin:

$$\varphi = \tfrac{\pi}{2} - \rho\cos t + \tfrac{1}{2}\rho^2 \cos^2 t \tan x - \tfrac{1}{3}\rho^3 \cos t \sin^2 t$$

$$- \tfrac{1}{24}\rho^4 \cos^2 t (4\cos^2 t - 5\sin^2 t)\tan x + \tfrac{1}{8}\rho^4 \cos^4 t \tan^3 x.$$

Etudions maintenant l'importance des termes du $4^{ième}$ et du $5^{ième}$ ordre.

L'étoile polaire est actuellement à une distance du pôle moindre que 1°5' ; nous prendrons donc $\beta = 90'$. $= 5400''$. Remarquons que si l'on veut exprimer $\varphi - h$ et β en secondes, il faut multiplier les termes du 2ème ordre par $\sin 1''$ ou $\tan 1''$ et ceux du 3ème par $\sin^2 1''$. On a donc, pour le dernier terme.

$$\frac{1}{8}\beta^2 \tan\varphi \sin^2 1'' = \frac{5400^2}{8} \tan\varphi \sin^2 1''.$$
$$= 0''.0121 \tan\varphi.$$

Ce terme est toujours moindre que $0''.0121$ pour $\varphi - h$ pour φ et l'on constate qu'il est.

moindre que $0''.1$ si $h < 68°40'$
moindre que $1''$ si $h < 77°4'$.

On peut donc négliger le terme dont il s'agit dans la plupart des cas pratiques.

L'arc dernier terme atteint, pour une hauteur donnée, son maximum en même temps que

$$f(t) = \cos^2 t(4\cos t - 5\cos^2 t)$$
$$= \cos^2 t(4 - 9\cos^2 t)$$

en posant $\cos t = x$:

$$f(x) = x(4 - 9x)$$

D'où

$$f'(x) = 4 - 9x - 9x = 4 - 18x = 2(2 - 9x).$$

Le maximum de $f(x)$ correspond à $x = \frac{2}{9}$. ou $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (ou $t = 28°$ environ), et le maximum du terme considéré est :

$$\frac{1}{24}\beta^2 \cdot \frac{2}{9}(4 - 2)\tan\varphi \text{ ou } \frac{1}{24} 5400^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{4}{9} \tan\varphi.$$

Ce terme n'atteint $0''.1$ que si h est inférieur à $89°$. Il est donc tout à fait insensible.

Reste à calculer le terme du 3ème ordre, en posant $x = \cos t$, il atteint son maximum en même temps que

$$f(x) = x(1 - x^2)$$

D'où $\qquad f'(x) = 1 - x^2 - 2x^2 = 1 - 3x^2$

La valeur maximum est donc :

$$\frac{1}{6}\beta^3 \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \text{ ou } \frac{1}{3} 5400^3 \sin^3 1'' \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Le maximum est donc égal à $0''.46$.

Concluons de cette discussion que si l'on veut avoir la latitude à une seconde près, il suffit de prendre:

$$\varphi = h - p\cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \sin^1{}'' \tan h \cdot t^2 .$$

Pour réduire cette formule en table, prenons une valeur moyenne p_0 de la distance polaire de l'étoile, par exemple le complément de la déclinaison δ moyenne au commencement de l'année, et posons:

$$p = p_0 + \Delta p .$$

Soient de même α_0 et $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ la valeur moyenne et la valeur actuelle de l'ascension droite de l'étoile On aura:

$$t = \Theta - \alpha = \Theta - \alpha_0 - \Delta\alpha .$$

En négligeant le carré de $\Delta\alpha$, qui est toujours très petit, on aura

$$p\cos t = (p_0 + \Delta p)\left[\cos(\Theta - \alpha_0) + \Delta\alpha \sin^1{}'' \sin(\Theta - \alpha_0)\right]$$

$$= p_0 \cos(\Theta - \alpha_0) + \Delta p \cos(\Theta - \alpha_0) + p_0 \Delta\alpha \sin^1{}'' \sin(\Theta - \alpha_0)$$

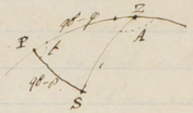
Dans les limites de notre approximation, on peut négliger le dernier terme de cette expression. On peut aussi remplacer dans le dernier terme de φ, p par p_0 et t par $\Theta - \alpha_0$. Donc

$$\varphi = h - p_0 \cos(\Theta - \alpha_0) + \tfrac{1}{2} p_0^2 \sin^1{}'' \tan h \cdot (\Theta - \alpha_0)^2 \cdot \sin^1{}'' - \Delta p \cos(\Theta - \alpha_0) .$$

Dans le Nautical Almanac, on trouve trois tables dont la 1re donne la 1re correction $-p_0 \cos(\Theta - \alpha_0)$ avec le temps sidéral Θ comme argument. La 2e table est à double entrée et donne la 2e correction avec Θ et h comme argument. Enfin la 3ième donne la dernière correction avec Θ et la date du jour de l'observation comme argument, car Δp varie de jour en jour.

La connaissance des temps fournit, pour les besoins de la navigation, une table spéciale qui donne les valeurs de l'argument $\Theta - \alpha_0$, qu'elle désigne par la lettre δ, en fonction de la date du jour et du temps solaire vrai de l'observation. Trois tables qui se suivent donnent ensuite $\varphi - h$.

IV. Par l'Observation du passage d'un astre par un vertical donné. — Soit A l'azimut d'un vertical donné, et t l'angle horaire d'un astre au moment où il passe par ce vertical. Alors dans le triangle ZPS, on connaît



Dans ces deux angles P et Z et le côté PS opposé à l'un d'eux, il faut déterminer le côté PZ et par suite la latitude du lieu d'observation.

En appliquant l'équation des cotangentes

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A$$

on a : (1) $\cot \sin\varphi - \operatorname{tg}^2 \cos\varphi = \sin t \cot A$

équation qui donne φ en fonction des quantités connues.

En différentiant cette éq., on trouve :

$$(\cot \cos\varphi + \operatorname{tg}^2 \sin\varphi)\, d\varphi = (\cos t \sin\varphi + \cot \cos A)\, dt - \frac{\sin t}{\sin^2 A}\, dA + \frac{\cos\varphi}{\cos^2 \delta}\, d\delta.$$

Mais l'on tire de la même éq. aux cotangentes, on a :

$$\cot \cos\varphi \cos t + \sin\varphi \sin t = \cos A.$$

$$\sin\varphi \cos t \sin A + \cot \sin A = \cos\Pi$$

Donc : $\cot \cos\varphi + \operatorname{tg}^2 \sin\varphi = \frac{\cos A}{\cos t \sin A}$

$$\cos t \sin\varphi + \cot \sin A = \frac{\cos\Pi}{\sin A}.$$

Par suite :

$$\frac{\sin A}{\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{\cos\Pi}{\sin A}\, dt - \frac{\sin t \cos t}{\sin A}\, dA + \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}\, d\delta$$

ou bien :

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi \cos\Pi}{\sin A \sin A}\, dt - \frac{\sin t \cos t \cos\varphi}{\sin A \sin A \cos A}\, dA + \frac{\cos\varphi}{\sin A \cos\delta}\, d\delta.$$

en se rappelant que

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin\Pi}{\cos\varphi} = \frac{\sin A}{\cos\delta}.$$

J'ai

$$\sin t \cos\delta = \sin A \cos t \qquad \frac{\cos\delta}{\cos\varphi} = \frac{\sin\Pi}{\sin A}$$

on aura

(2) $$d\varphi = \frac{\cos\varphi \cos\Pi}{\sin A \sin A}\, dt - \frac{1}{\operatorname{tg} t \sin A}\, dA + \frac{\cos\varphi}{\cos\delta \sin A}\, (\text{ou } \frac{\sin\Pi}{\sin A \sin t})\, d\delta.$$

Cette équation montre que le cas le plus favorable est celui où A est le plus près possible d'être = 90° ou 270° et où t est le plus grand possible, c'est-à-dire que la 2ème observation doit se faire le plus près possible du premier vertical et de l'ouest.

Si ces deux conditions sont remplies, il est facile de voir que non seulement le coefficient de dA mais encore celui de dt s'annule ; en effet, on a :

$$\cos\varphi \cos\Pi = \sin\varphi \cos A + \cos\varphi \sin A \cos A.$$

Donc $\cos\varphi \cos\Pi = 0$ si $\cos A = \cos A = 0$.

Quant au coefficient de dδ, il est évidemment égal à l'unité; par suite une petite erreur dans P se reporte entièrement sur φ.

Remarque. — L'observation du passage d'une étoile au premier vertical, en vue de déterminer soit la latitude du lieu à l'aide d'une étoile de déclinaison connue, soit de la détermination de la déclinaison d'une étoile inconnue, est très-utile dans un observatoire fixe. Nous y reviendrons dans l'astronomie pratique; nous ne donnerons alors dans le détail nécessaire.

Cas où l'on a observé deux étoiles. — On aura alors deux équations telles que:

$$\cot\tfrac{1}{2}(t+t)\sin\varphi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\cos\varphi = \sin t \cot A \qquad + \sin t'$$
$$\cot\tfrac{1}{2}(t'+t)\sin\varphi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\cos\varphi = \sin t' \cot A'. \qquad - \sin t.$$

En multipliant la 1re éq. par + sin t' et la 2e par − sin t et ajoutant, on obtient:

$$\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)\sin\varphi + (\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}t\sin t - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}t'\sin t')\cos\varphi = \sin t \sin t' \frac{\sin(A-A')}{\sin A \sin A'}.$$

ou en remplaçant $\frac{\sin t}{\sin A}$, $\frac{\sin t'}{\sin A'}$ par $\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}$, $\frac{\cos\delta'}{\cos\delta}$ et en chassant les dénominateurs,

$$\cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)\sin\varphi + (\cos\delta\cos\delta'\sin t\sin\tfrac{1}{2}t - \cos\delta\cos\delta'\sin t'\sin\tfrac{1}{2}t')\cos\varphi$$
$$= \cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(A'-A).$$

Posons maintenant:

$$m\sin z = \sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(t'-t) \qquad -\cos\tfrac{1}{2}(t+t)\cos\tfrac{1}{2}(t'-t)$$
$$m\cos z = \sin(\delta'-\delta)\cos\tfrac{1}{2}(t'-t) \qquad \sin\tfrac{1}{2}(t+t)\sin\tfrac{1}{2}(t'-t)$$

on aura alors:

$$m\sin\left[\tfrac{1}{2}(t+t)-z\right] = \sin\delta\cos\delta\sin t - \cos^2\delta\cos^2\tfrac{1}{2}t\sin t'$$
$$- m\sin\left[\tfrac{1}{2}(t'-t)-z\right] = +\cos^2\delta'\sin^2\tfrac{1}{2}t'\sin(t'-t)$$

et l'éq. précédente devient:

$$m\sin\left[\tfrac{1}{2}(t+t)-z\right]\cos\varphi - m\sin\left[\tfrac{1}{2}(t'-t)-z\right]\cot\delta\sin\varphi = \cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(A'-A).$$

Cette équation est de la même forme que l'éq. (1) et détermine φ de la même façon.

Dans la pratique, on fait toujours en sorte que A = A ou 180° + A; alors: $\sin\frac{1}{2}(A'-A)=0$ et l'éq. devient:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(t+t)-z\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(t'-t)-z\right]}\operatorname{tg}\delta.$$

équation qui ne contient plus l'azimut A.

Dans le cas où l'on a observé une même étoile, on a $\delta' = \delta$ et pour suite $z = 90°$. Alors:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}(t+t')}{\cos\frac{1}{2}(t-t')} \operatorname{tg}\delta.$$

Pour voir quel est le meilleur cas, prenons les éq. différentielles:

$$\sin z \sin A\, dq = \cos\delta \cos\pi\, dt - \cos t\, d\delta A + \sin\pi\, d\delta \qquad -\cos t$$
$$\sin z' \sin A'\, dq = \cos\delta' \cos\pi'\, dt - \cos t'\, d\delta A' + \sin\pi'\, d\delta' \qquad \cos t.$$

On en tire:

$$(\sin t' \cos t \sin A' - \sin t \cos t' \sin A)\, dq = \cos\delta' \cos t' \cos\pi'\, dt' - \cos\delta \cos t \cos\pi\, dt$$
$$- \cos t \cos t'\, d(A'-A) + \cos t \sin\pi'\, d\delta' - \cos t' \sin\pi\, d\delta.$$

Si l'on a: $A' - A = 180°$, cette éq. devient

$$-\sin(t'+t) \sin A\, dq = \ldots$$

Soit T & T' les heures d'observation d'après la chronomètre réduits au même instant & à l'aide de la marche supposé connue, et ΔT la correction du chronomètre à cet instant. On aura alors:

$$t = T + \Delta T - \alpha \qquad t' = T' + \Delta T - \alpha$$

et si l'on suppose l'ascension droite α sans erreur, alors:

$$dt = dT + d\Delta T \qquad dt' = dT' + d\Delta T.$$

et l'on aura, en remarquant que:

$$\sin z \cos A = \cos\delta \cos\pi = \sin\varphi \cos t \mp \cos\varphi \sin t \cos A \qquad \cos t$$
$$\cos z \cos\pi = \sin\varphi \cos t \mp \cos\varphi \sin t \cos A. \qquad -\cos t$$

$$\sin(t+t') \sin A\, dq = \sin(t+t') \cos\varphi \cos A\, d\Delta T$$
$$+ \cos t \cos t' \left[\sin t\, d(A'-A) - \sin\varphi\, d(T'-T) \right] + \cos\varphi \cos A \left(\sin t \cos t'\, dT + \sin t' \cos t\, dT' \right)$$
$$+ \cos t' \sin\pi\, d\delta - \cos t \sin\pi'\, d\delta'.$$

On voit qu'il y a tout avantage à prendre $A = 90°$ alors, $\sin A = 1$ et le coefficient de $d\Delta T$ disparaît.

Dans le cas où l'on a observé la même étoile au premier vertical, la 1ère fois à l'est et la 2e fois à l'ouest, on a: ~~$\sin A = -1$~~

$$\sin A = -1 \qquad t = t' \qquad \pi = -\pi'.$$

et par suite:

$$dq = \tfrac{1}{2} \cos t \left[d(A'-A) + \sin\varphi\, d(T'-T) \right] \mp \frac{\sin\pi}{\cos\varphi}\, d\delta.$$

Mais dans ce cas on a:

$$\sin t = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \qquad \sin\pi = \frac{-\cos\varphi}{\cos\delta}$$

par suite :

$$dq = \frac{1}{2}\cot z\left[d(AA') + \sin q\, d(CC')\right] + \frac{\sin z \sin C}{\sin q}\, dC$$

et l'on voit que le coefficient de dC est égal à 1.

V. Par la méthode de Prestel. — Pour une étoile donnée observée à un lieu donné, nous avons entre la variation de sa hauteur h et B celle de son angle horaire t, la relation

$$\frac{dh}{dt} = -\cos q \sin A$$

On en déduit, en supprimant t supposé connu :

$$\cos q = -\frac{1}{15}\frac{dh}{dt}\frac{1}{\sin A}$$

Si donc on a observé $\frac{dh}{dt}$ à l'aide d'un instrument de hauteur et d'un bon chronomètre, on pourra en déduire la latitude du lieu q, pourvu qu'on connaisse l'azimut A.

Prestel choisit le moment où l'astre passe par le premier vertical, alors $\sin A$ étant très voisin de 1 et variant très-lentement, on peut prendre $\sin A = 1$.

Dans cette méthode, q étant déterminé par nos cotes, on aura la valeur $\cos z$ d'autant plus de précision qu'on aura affaire à une latitude plus élevée. Cette méthode sera par exemple utile dans une expédition polaire.

III. Détermination de l'azimut.

Le problème que nous abordons maintenant peut être énoncé ainsi:

En un lieu géog. de la surface de la Terre, on a installé un instrument d'azimuts. On veut connaître l'azimut A. d'un point visé à la lunette lorsque la position de celle-ci répond à une certaine lecture (déterminée) du cercle.

Cette question comprend les deux suivantes:

1° Trouver la position du méridien.

Soit z_0 la lecture du cercle lorsque la lunette pointe vers le Sud. Alors l'azimut de la lunette lorsque la lecture du cercle est z sera évidemment:

$$A = \pm(z - z_0)$$

suivant que la lecture va en croissant du Sud vers l'Ouest ou vers l'Est. Comme on connaît A et z on connaîtra z_0 et par suite la position du méridien.

2° Trouver l'azimut d'un point géog.

On visera le point considéré et l'on lira la position du cercle, soit z' la lecture & A' l'azimut cherché. On aura:

$$A' - A = \pm(z' - z).$$

suivant que la lecture va en croissant ou en vers l'Ouest ou vers l'Est.

On peut résoudre notre problème de plusieurs manières:

1. Par une seule observation. – Reprenons l'équation auxiliaire du chapitre précédent:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} t \cot A = \cos t \operatorname{tg} \varphi - \sin p \cos q$$

et l'équation différentielle correspondante:

$$d\varphi = \frac{\cos p \cos \Pi}{\cos^2 \varphi \sin A}\, dt - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi \sin A}\, dA + \frac{\cos q}{\cos^2 \varphi \sin A}\left(\sin \varphi \frac{\sin \Pi}{\sin h} - \cos A\right) d\varphi$$

que nous écrirons:

$$(2) \qquad dA = \frac{\cos p \cos \Pi}{\cos h}\, dt - \operatorname{tg} \varphi \sin A\, d\varphi - \frac{\cos q \sin A}{\cos^2 \varphi \sin h}\left(\sin \varphi \frac{\sin \Pi}{\sin h} - \cos A\right) d\varphi.$$

L'éq. (1) fera connaître A quand on aura les valeurs de p, q & t. – On observera donc le passage d'un astre connu derrière le fil vertical de la lunette quand

celle-ci répond à une lecture bien mesurée de la carte, et l'on calculera A au moyen de la formule (1) avec la valeur de φ que nous supposerons connue.

Discutons maintenant l'éq. (2).

1° Dans un observatoire fixe, il y a avantage à rendre insensibles les influences de dφ et dδ. On prend alors A=0° ou 180° et par suite π=0 ou 180°; alors le coefficient de dφ et dδ sont nuls et il vient:

$$dA = \pm \frac{\cos\varphi}{\cos\delta} dt.$$

et si l'on prend une circumpolaire cos δ étant petit, dA est presque insensible.

On combine généralement les observations des passages supérieur et inférieur d'une même circumpolaire et l'on en déduit l'azimut de l'instrument. Nous y reviendrons avec détails dans l'astronomie pratique.

2° Dans une observation ordinaire, c'est la valeur de φ en elle-même qui est incertaine. Il y a alors avantage à prendre le plus petit que possible de façon à rendre les coefficients de dφ et dδ aussi petits que possibles. Il n'y a pas de limites inférieures imposées à la valeur de A que celle qui résultent de la considération de la réfraction latérale qui peut rendre l'observation fautive. Dans le tableau modèle

3° On peut rendre les mêmes coefficients des mêmes termes très-petits, & beaucoup mieux que dans le cas du moyen précédent, en observant une circumpolaire (la polaire surtout) au moment de sa plus grande digression. Alors, π étant égal à 90° le coefficient de dδ est nul, & A étant voisin de 180°, celui de dφ est très-petit.

Remarquez bien

Que si l'on a répété plusieurs fois l'observation.

Soient $t_1, t_2 \ldots t_n$ les angles horaires de l'astre aux moments des observations successives et $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_n$ les lectures correspondantes; soit t_m le moyenne des ~~n~~ t angles

horaire, z_m la moyenne des lectures et z'_m la lecture qui correspondrait à l'angle horaire t_m. Comme les lectures diffèrent des résultats d'une quantité constante, on aura:

$$z_i = z'_m + \left(\frac{dA}{dt}\right)_0 (t_i - t_m) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_0 (t_i - t_m)^2.$$

$\left(\frac{dA}{dt}\right)_0$ et $\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_0$ étant les valeurs des dérivées correspondant à $t = t_m$. En prenant la moyenne, il vient:

$$z_m = z'_m + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_0 \frac{1}{n}\Sigma (t_i - t_m)^2.$$

Calculons $\frac{d^2A}{dt^2}$. On a d'abord:

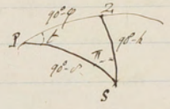
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos\varphi \cos\Pi}{\cos h}$$

d'où en différentiant de nouveau:

$$\frac{1}{\cos^2 h}\frac{d^2A}{dt^2} = \text{[illegible]} - \frac{\sin\Pi}{\cos h}\frac{d\Pi}{dt} + \frac{\sin h \cos\Pi}{\cos^2 h}\frac{dh}{dt}.$$

Or en différentiant l'éq:

$$\cos h \cos\Pi = \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t$$



on a

$$\cos h \sin\Pi \frac{d\Pi}{dt} + \sin h \cos\Pi \frac{dh}{dt} = -\cos\varphi \sin\delta \sin t.$$

ou

$$\sin\Pi \frac{d\Pi}{dt} = -\sin A \tan h \cos\Pi \frac{dh}{dt} - \frac{\cos\varphi \sin\delta \sin t}{\cos h \sin\Pi}.$$

Donc, en substituant:

$$\frac{\cos h}{\cos\delta}\frac{dA}{dt} = 2\sin h \cos\Pi \frac{dh}{dt} + \cos\varphi \sin\delta \sin t.$$

Or on a

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\varphi \cos\delta \sin A$$

$$\sin t = \frac{\cos h}{\cos\delta}\sin A$$

Donc:

$$\cos h \frac{d^2A}{dt^2} = \left(-2\sin h \cos\Pi \cos\delta + \sin\delta \cos h\right)\cos\varphi \sin A$$

Mais on a:

$$2\sin\delta \cos h - 2\cos\delta \sin h \cos\Pi = -2\cos\varphi \cos A.$$

Donc enfin

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\frac{\cos\varphi \sin A}{\cos h}\left(\sin\delta \cos h + 2\cos\varphi \cos A\right).$$

$$= -\frac{\cos\varphi \sin A}{\cos h} - \frac{\cos^2\varphi}{\cos h}\sin 2A.$$

ou en remplaçant $\frac{1}{\cos h}$ par sa valeur $\frac{\sin A}{\cos\varphi \sin t}$ et posant:

$$a = \frac{\cos\varphi \sin^2 A}{\cos^2 \sin t} \qquad b = \frac{\cos^2\varphi \sin^2 A}{\cos\varphi \sin^2 t}\sin 2A$$

on aura

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_0 = -a - b$$

On a sensiblement

$$\frac{1}{2}(t_i - t_m)^2 = 2\sin^2\frac{1}{2}(t_i - t_m) = m_i \quad \text{notre not. habit.}$$

alors, en posant

$$m_m = \frac{1}{n} \sum m$$

il vient

$$z_m = z'_m + a m_m - b m_m$$

d'où

$$z'_m = z_m + a m_m + b m_m.$$

C'est cette lecture corrigée qu'il faudra comparer avec l'azimut calculé pour l'angle horaire t_m.

II. Par la méthode des hauteurs correspondantes.-

On observe un astre avant et après sa culmination et aux deux moments où il a la même hauteur, comme il a alors évidemment le même azimut en valeur absolue, la moy. des lectures obtenues donnera la lecture correspondante au méridien.

Si l'on a observé le Soleil, dont la déclinaison a varié dans l'intervalle de la 1re observation à la seconde, il faut ajouter à cette moy. une petite correction. Appelons $-A$ l'azimut au moment de la 1re obs. que nous supposons fait avant midi, z_1 la lecture correspondante, z_0 la lecture au méridien et z'_1 la lecture après midi. On aura,

$$-A = \pm (z_1 - z_0) \qquad A + \Delta A = \pm (z'_1 - z_0)$$

d'où

$$\frac{1}{2} \Delta A = \pm \left\{ \frac{1}{2} (z_1 + z'_1) - z_0 \right\}$$

ou bien :

$$z_0 = \frac{1}{2} (z_1 + z'_1) \mp \frac{1}{2} \Delta A.$$

Or on a en différentiant l'éq.

$$\cos P = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A$$

en observant que h est indépendant de A

$$\cos P \Delta P = \cos \varphi \cos h \sin A \, dA$$

d'où

$$\pm \frac{1}{2} \Delta A = \frac{1}{2} \frac{\cos P \Delta P}{\cos \varphi \cos h \sin A} = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{\cos \varphi \cos \delta \sin t}$$

Pour calculer cette correction, il faut donc connaître φ et t, au moins approximativement.

III. Par les observations faites aux deux moments de plus grande digression de la polaire.- On calcule d'abord une

valeur approchée de l'époque de la plus grande digression à la polaire par la formule:

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-q)}{\sin(p+q)}}$$

et à cette époque, on fait l'étoile à la lunette jusqu'à ce que son azimut ne varie plus; on lit alors le vernier. On fait la même observation de l'autre côté du méridien quand la polaire atteint le nouveau & la plus grande digression. En prenant la moyenne des deux lectures, on aura la lecture correspondante au méridien quand la lunette pointe vers le Nord.

Remarque. — Cette méthode que nous venons d'exposer aura l'avantage d'être applicable quand on ne connaît pas la latitude avec exactitude. Mais elle aura cet inconvénient qu'elle suppose l'instrument assez stable pour qu'il ne change pas sensiblement de la 1ère obs. à la 2e; ce qui n'a généralement pas lieu.

IV. Par l'observation extra-méridienne de la polaire. — Par une latitude modifiée, on peut déterminer très-rapidement l'azimut d'un instrument par l'observation extra-méridienne de la polaire. En effet reprenons l'éq. aux cotangentes que nous écrivons:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}\beta \sec q \sin t}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg} q \cos t}.$$

en posant

$$a = 180° - A$$

En négligeant β^5, il vient:

$$a + \tfrac{1}{3}a^3 = (\beta \sec q \sin t + \tfrac{1}{2}\beta^2 \sec q \sin t)\{(1 - (\beta + \tfrac{1}{3}\beta^3)\operatorname{tg} q \cos t\}^{-1}.$$

$$= (\beta \sec q \sin t + \tfrac{1}{2}\beta^2 \sec q \sin t)\{1 + (\beta + \tfrac{1}{3}\beta^3)\operatorname{tg} q \cos t + \tfrac{1}{2}\beta^2 \operatorname{tg}^2 q \cos^2 t + \tfrac{1}{2}\beta^3 \operatorname{tg}^3 q \cos^3 t\}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\beta^3 \operatorname{tg}^3 q \cos^3 t\}$$

ou bien

$$a = \beta \sec q \sin t + \tfrac{1}{2}\beta^2 \frac{\sin 2q}{\cos^2 q} \sin 2t + \beta^3 \frac{\sin^2 q}{\cos^2 q} \sin^2 t + \beta^3 \frac{\sin^2 q}{\cos^4 q} \sin^2 t \cos^2 t$$

$$+ \tfrac{1}{2}\beta^3 \frac{\sin^2 q}{\cos^2 q} \sin 2t (1 + 3\operatorname{tg}^2 q \cos^2 t) + \tfrac{1}{3}\beta^3 \frac{\sin q}{\cos^3 q} \sin t$$

$$+ \tfrac{1}{8}\beta^4 \frac{\sin 4q}{\cos^4 q} \sin 2t - \tfrac{1}{3}\beta^3 \sin 3q \sin 3t - \tfrac{1}{2}\beta^4 \frac{\sin 2q}{\cos^4 q} \sin 2t \sec q \sec 2q.$$

en ne conservant que l'ensemble des termes d'ordre plus élevé on ne conservant seulement les termes de $\sin t$ & $\sin 2t$ ordonnés contenant $\frac{1}{\cos^3 q}$ en facteur:

$$a = \beta \sec q \sin t + \tfrac{1}{2}\beta^2 \frac{\sin 2q}{\cos^3 q} \sin 2t + R$$

Les termes les plus importants de R sont:

$$l = \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{2}{\cos\varphi}}\left(\frac{3+2\varphi}{\cos\varphi}\cos t - \frac{2\sin t}{\cos\varphi}\right)\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{2}{\cos\varphi}}\frac{2\varphi}{\cos\varphi}\sin 2t\left(\frac{2}{\cos\varphi}\cos t - \sin t\right)$$

ou bien :

$$l = \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{2}{\cos\varphi}}\frac{\sin t}{\cos\varphi}\left\{\left(\frac{3+2\varphi}{\cos\varphi}+1\right)\cos t - 1\right\} + \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{2}{\cos\varphi}}\frac{\sin 2t}{\cos\varphi}\left\{\left(\frac{2\varphi}{\cos\varphi}+1\right)\cos t - 1\right\}$$

Si l'on se contente d'un dixième de minute, on constate que t n'a aucune influence sensible, dans le premier terme.

On peut construire à l'aide de la formule précédente une table donnant l'élément de la polaire pour une certaine valeur ρ_0 de ρ. Pour une autre valeur $\rho_0 + \Delta\rho$, on ajoutera une correction de la forme :

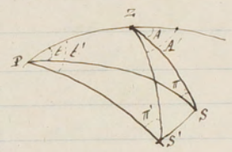
$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\cos t.$$

ce qui suffira dans la pratique.

On trouve une de ces tables dans le C. des temps qui sert à orienter rapidement un instrument altazimutal dans le plan du méridien.

IV. Détermination simultanée du temps, de la latitude et de l'azimut.

I. *Détermination du temps et de la latitude au moyen de deux observations de hauteur.* – A une certaine époque, on a observé la hauteur h d'une certaine étoile, et l'on a noté le temps avec un chronomètre dont la marche est connue, au bout d'un intervalle de temps t égal au temps sidéral compté fourni par le chronomètre, on a observé la hauteur h' d'une seconde étoile. Il s'agit de calculer les angles horaires t et t' aux moments respectifs de leurs observations ainsi que la latitude φ du lieu d'observation.



Soient S le lieu de la 1re étoile au moment de la 1re observation et S' celui de la seconde étoile au moment de la 2e. Remarquons que dans l'un et dans l'autre des deux triangles PZS et PZS', il suffit de connaître l'angle parallactique pour avoir immédiatement les deux côtés PS et PS', la latitude et l'angle horaire de l'étoile mais aussi l'azimut de l'étoile. Pour avoir ces angles parallactiques, nous résoudrons successivement les deux triangles PSS' et ZSS'. Posons pour abréger

$$D = SS' \qquad s = PSS' \qquad s' = PS'S.$$

Comme on a : (différence des angles horaires célestes de la marche du chronomètre)

$$SPS' = \tau \qquad PS' = p^\circ - \delta' \qquad PS = p^\circ - \delta$$

les formules de Delambre nous donnent :

$$\sin\tfrac{1}{2}D \sin\tfrac{1}{2}(s'-s) = \cos\tfrac{1}{2}\tau \sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}D \sin\tfrac{1}{2}(s'+s) = \sin\tfrac{1}{2}\tau \cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}D \cos\tfrac{1}{2}(s'-s) = \cos\tfrac{1}{2}\tau \cos\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}D \cos\tfrac{1}{2}(s'+s) = \sin\tfrac{1}{2}\tau \sin\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta).$$

équations qui déterminent D, s et s'.

En posant maintenant

$$2p = Z + Z' + D$$

on aura dans le triangle ZSS' :

$$\operatorname{tg}\frac{v+\pi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sin(p-D)\sin(p-Z)}{\sin p \sin(p-Z')}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{v'-\pi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sin(p-D)\sin(p-Z')}{\sin p \sin(p-Z)}}.$$

On prendra le signe + ou le signe - de façon à donner à π un signe convenable à la position.

Une fois π ou π' connu, on calculera A, L, φ ou A', L', φ par le système d'équations traitant ou par un système analogue relatifs au second triangle.

$$\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)\sin\tfrac{1}{2}(A+L) = \sin\tfrac{1}{2}\pi \sin\tfrac{1}{2}(b+b')$$
$$\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)\cos\tfrac{1}{2}(A+L) = \cos\tfrac{1}{2}\pi \sin\tfrac{1}{2}(b-b')$$
$$\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)\sin\tfrac{1}{2}(A-L) = \sin\tfrac{1}{2}\pi \sin\tfrac{1}{2}(b+b')$$
$$\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)\cos\tfrac{1}{2}(A-L) = \cos\tfrac{1}{2}\pi \cos\tfrac{1}{2}(b-b').$$

Remarque. – Cette méthode généralisant l'emploi de chaque étoile, si l'on se sert d'un instrument altazimutal pour faire les observations et qu'on lise le cercle horizontal en même temps que le cercle vertical, on pourra déterminer ainsi l'azimut de la lunette au moment de chaque observation, ce qui est un grand avantage dans un voyage sur terre.

Equations différentielles. – Supposons la détermination de l'étoile rigoureusement connue et cherchons seulement l'influence de l'erreur commise sur chaque observation de hauteur. On peut supposer les deux erreurs de temps ~~confondues~~ On a entre les deux angles horaires t et t' la relation $t' = t + \tau$.

et l'on peut supposer τ tout à fait exempt d'erreur à condition de reporter une erreur commise sur τ sur la détermination de l'une ou l'autre des deux hauteurs.

On aura alors : $dt' = dt$.

et par suite :

$$dh = -\cos A\, d\varphi - \sin A \cos\varphi\, dt \qquad \cos A' - \sin A'$$
$$dh' = -\cos A'\, d\varphi - \sin A' \cos\varphi\, dt. \qquad -\cos A \quad \sin A.$$

On en tire :

$$\cos\varphi\, dt = \frac{\cos A'}{\sin(A'-A)}\, dh - \frac{\cos A}{\sin(A'-A)}\, dh'$$
$$d\varphi = -\frac{\sin A'}{\sin(A'-A)}\, dh - \frac{\sin A}{\sin(A'-A)}\, dh'.$$

Ces équations montrent que le cas le plus favorable est celui où A-A est le plus près possible de être égale à 90°; les deux observations pourront être faites soit à 45° du sud, soit l'une près du premier vertical et l'autre près du méridien.

Si l'on a exactement A-A = 90°, on aura:

$$\cos\delta\, dt = \cos A'\, dh - \cos A\, dh'$$

$$dq = -\sin A'\, dh - \sin A\, dh'$$

Ces éq. montrent que l'influence de la hauteur observée dans le premier vertical est nulle sur t et entière sur q; tandis que pour la hauteur observée dans le méridien, c'est exactement le contraire.

Cas où l'on a observé la même étoile fixe.

On a dans ce cas $\delta = \delta'$ et les éq. précédentes deviennent:

$$\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}\tau \cos\delta$$

$$\cos\tfrac{1}{2}D \sin\gamma = \cos\tfrac{1}{2}\tau$$

$$\cos\tfrac{1}{2}D \cos\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\tau \sin\delta.$$

et l'on achèvera le calcul à l'aide des autres formules qui restent les mêmes.

Cas du Soleil. Quand on a observé deux fois le Soleil, en nommant δ_0 la déclinaison du Soleil à l'époque moyenne des deux observations, on a:

$$\delta = \delta_0 - \tfrac{1}{2}\mu\tau \qquad \delta' = \delta_0 + \tfrac{1}{2}\mu\tau.$$

μ étant la variation de δ dans l'unité de temps.

On aura donc:

$$\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \delta_0 \qquad \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \tfrac{1}{2}\mu\tau.$$

En négligeant le carré de $\mu\tau$, on aura alors:

$$\delta' - \delta = \mu\tau \frac{\cos\frac{1}{2}\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau \sin 1''}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}\tau \cos\delta_0$$

$$\cos\tfrac{1}{2}D \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \cos\tfrac{1}{2}\tau$$

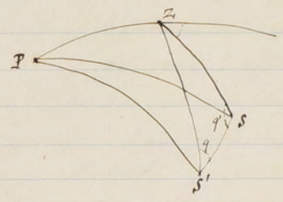
$$\cos\tfrac{1}{2}D \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \sin\tfrac{1}{2}\tau \sin\delta_0.$$

formules différentes des précédentes, dans la 1re qui est en outre très simple.

Le calcul de A, t, q se fera ensuite comme dans le cas général.

II. Déterminations du temps, de la latitude et de l'azimut par l'observation des différences de hauteur et d'azimuth de deux étoiles. - Le problème est celui-ci. On observe deux étoiles connues à deux époques séparés d'un intervalle de temps connu τ; on détermine les différences $h'-h$ et $A'-A$ de leurs hauteurs et de leurs azimuts aux moments respectifs des observations et l'on se propose de trouver les valeurs de h, h', t, A' ainsi que q.

A l'aide des équations du $\S$ précédent, calculons d'abord ces trois quantités. Posons maintenant:



$SS'Z = q$ $\quad S'SZ = q'$

Dans le triangle ZSS', nous aurons d'après les formules de Delambre:

$$\sin\tfrac{1}{2}(q+q') = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A'-A)\cos\tfrac{1}{2}(h'-h)}{\cos\tfrac{1}{2}D}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(q'-q) = -\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A'-A)\sin\tfrac{1}{2}(h'-h)}{\sin\tfrac{1}{2}D}$$

équations qui donnent q et q'. On aura ensuite:

$$\pi = q - s \qquad \pi' = s' - q'.$$

On aura ensuite par une analogie de Néper.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h'+h) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(q'+q)}{\cos\tfrac{1}{2}(q'-q)}\cot\tfrac{1}{2}D.$$

ce qui détermine h et h' puisque l'on connaît $h'-h$.

On calculera ensuite soit A, t, φ, soit A', t', φ comme dans le paragraphe précédent.

III. Par l'observation de trois hauteurs égales. - Méthode de Gauss. - On observe successivement le temps du chronomètre au moment où trois étoiles ont la même hauteur; on suppose la marche du chronomètre connue, ce qui fournit les intervalles de temps τ et τ' écoulés depuis la 1re observation jusqu'aux 2e et 3e observations respectivement. On demande de déterminer la latitude du lieu et les temps d'observations.

Soient t t' t'' les angles horaires des trois étoiles au moment respectif de leurs observations ; T T' T'' les temps des chronomètres et ΔT la correction du chronomètre. On aura

$$t = T + \Delta T - \alpha \qquad t' = T' + \Delta T + \theta' - \alpha' \qquad t'' = T'' + \Delta T + \theta'' - \alpha''$$

Posons :

$$\lambda = t' - t = \tau - (\alpha' - \alpha) \qquad \lambda' = t'' - t = \tau' - (\alpha'' - \alpha)$$

Nous aurons les trois équations

$$(1) \qquad \tan h = \tan\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

$$(2) \qquad \tan h = \tan\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(t+\lambda)$$

$$(3) \qquad \tan h = \tan\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' \cos(t+\lambda').$$

Retranchons l'éq (1) de l'éq (2) ; nous aurons :

$$0 = \tan\varphi(\sin\delta' - \sin\delta) - \cos\varphi \cos t(\cos t + \cos\delta' \cos(t+\lambda)$$

ou bien en remplaçant

$$\cos t \text{ par } 2(\cos^2\tfrac{t}{2} - 1) - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \quad \text{et } \delta' \text{ par } \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) + \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

il vient :

$$0 = 2\cos\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$
$$- \cos\varphi \cos t \left(\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) + \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\right]$$
$$+ \cos\varphi \cos(t+\lambda)\left(\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) - \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\right)].$$

ou encore :

$$0 = \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$
$$- \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\sin\tfrac{1}{2}\lambda \sin(t + \tfrac{1}{2}\lambda)$$
$$\mp \cos\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\tfrac{1}{2}\lambda \cos(t + \tfrac{1}{2}\lambda)$$

d'où

$$\tan\varphi = \sin\tfrac{1}{2}\lambda \sin(t + \tfrac{1}{2}\lambda)\cot\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) + \cos\tfrac{1}{2}\lambda \cos(t + \tfrac{1}{2}\lambda)\tan\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta).$$

Calculons trois auxiliaires m', M', N' définies par les éq.

$$(4) \quad \begin{cases} m' \sin M' = \sin\tfrac{1}{2}\lambda \cot\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = m' \sin M' \\ m' \cos M' = \cos\tfrac{1}{2}\lambda \tan\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \\ N' = M' + \tfrac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

Nous aurons alors :

$$(5) \qquad \tan\varphi = m' \cos(t + N').$$

En posant de même :

$$(6) \quad \begin{cases} m'' \sin M'' = \sin\tfrac{1}{2}\lambda' \cot\tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta) \\ m'' \cos M'' = \cos\tfrac{1}{2}\lambda' \tan\tfrac{1}{2}(\delta'' + \delta) \\ N'' = M'' + \tfrac{1}{2}\lambda' \end{cases}$$

Nous avons d'après la fg. (4) et (3):

$$(5)\quad \operatorname{tg}\varphi = m'' \cos(t+N'').$$

En comparant (5) et (1), on en conclut:

$$m'\cos(t+N') = m''\cos(t+N'')$$

équation qui ne contient plus que t inconnue.

Pour résoudre commodément cette éq. introduisons, au lieu des angles, un angle indéterminé H et écrivons cette éq.:

$$m'\cos[(t+H)+(N'-H)] = m''\cos[(t+H)+(N''-H)]$$

en la développant:

$$\operatorname{tg}(t+H) = \frac{m'\cos(N'-H) - m''\cos(N''-H)}{m'\sin(N'-H) - m''\sin(N''-H)}$$

Prenons maintenant

$$H = \tfrac{1}{2}(N'+N'')$$

il vient alors:

$$N'-H = \tfrac{1}{2}(N'-N'') \qquad N''-H = -\tfrac{1}{2}(N'-N'')$$

et par suite:

$$\operatorname{tg}[t+\tfrac{1}{2}(N'+N'')] = \frac{m'-m''}{m'+m''}\cot\tfrac{1}{2}(N'-N'').$$

Pour rendre le calcul encore plus commode posons:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{m''}{m'}$$

alors:

$$\frac{m'-m''}{m'+m''} = \frac{1-\operatorname{tg}\varphi'}{1+\operatorname{tg}\varphi'} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi')$$

et par suite

$$\operatorname{tg}[t+\tfrac{1}{2}(N'+N'')] = \operatorname{tg}(45^\circ-\varphi')\cot\tfrac{1}{2}(N'-N'').$$

Une fois que l'on connaît t, l'fg (5) ou l'fg. (6) donnera la latitude φ.

Equations différentielles. - Supposons les coordonnées des étoiles rigoureusement connues. On aura alors:

$$dt = d\Pi + d\Delta\Pi \qquad dt' = d\Pi' + d\Delta\Pi \qquad dt'' = d\Pi'' + d\Delta\Pi.$$

et par suite, en reportant les erreurs de hauteur ou les erreurs de Π, Π', Π'',

$$dt = -\cos A\, d\varphi - \cos\varphi \sin A\, d\Pi - \cos\varphi \sin A\, d\Delta\Pi$$
$$dt = -\cos A'\, d\varphi - \cos\varphi \sin A'\, d\Pi' - \cos\varphi \sin A'\, d\Delta\Pi.$$
$$dt = -\cos A''\, d\varphi - \cos\varphi \sin A''\, d\Pi'' - \cos\varphi \sin A''\, d\Delta\Pi.$$

La 1re - la 2e donnent par soustraction:

$$0 = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+A')\sin\tfrac{1}{2}(A-A')\,d\varphi - 2\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A+A')\sin\tfrac{1}{2}(A-A')\,d\Delta\Pi. \quad \left|\cos\tfrac{1}{2}(A+A') = \sin\tfrac{1}{2}(A+A')\right.$$
$$- \cos\varphi \sin A\, d\Pi + \cos\varphi \sin A'\, d\Pi'$$

De même la 1re et la 2e donnent.

$$0 = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+A'')\sin\tfrac{1}{2}(A-A')\,d\varphi - 2\sin\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A+A'')\sin\tfrac{1}{2}(A-A')\,d\Delta\Pi - \cos\varphi\sin A\,d\Pi + \cos\varphi\sin A''\,d\Pi''$$

En résolvant cette éq. par rapport à $d\varphi$ et $d\Delta\Pi$, il vient:

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi\sin A\sin\frac{1}{2}(A+A')}{2\sin\frac{1}{2}(A-A')\sin\frac{1}{2}(A-A')}\,d\Pi + \frac{\cos\varphi\sin A\cos\frac{1}{2}(A+A')}{2\cos\frac{1}{2}(A-A')\sin\frac{1}{2}(A-A')}\,d\Pi' + \frac{\cos\varphi\sin A''\cos\frac{1}{2}(A''+A')}{2\cos\frac{1}{2}(A''-A)\sin\frac{1}{2}(A''-A)}$$

$$d\Delta\Pi = \frac{\sin A\sin\frac{1}{2}(A+A'')}{2\sin\frac{1}{2}(A''-A')\sin\frac{1}{2}(A-A')}\,d\Pi + \frac{\sin A'\cos\frac{1}{2}(A+A')}{2\cos\frac{1}{2}(A-A')\sin\frac{1}{2}(A-A')}\,d\Pi' + \frac{\sin A\cos\frac{1}{2}(A+A')}{2\cos\frac{1}{2}(A''-A)\sin\frac{1}{2}(A''-A)}$$

On doit donc choisir les étoiles de telle façon que les différences des réunies deux à deux soient aussi grandes que possible. On prendra par exemple

$$A - A' = A' - A'' = A'' - A = \pm 120^\circ$$

ou à peu près.

V. Détermination de la longitude.

Principes généraux. – Nous avons vu que la diff. des longitudes de deux lieux de la surface terrestre est égale à la différence des temps locaux de ces deux lieux correspondant à un même instant physique. Or, nous avons déjà vu comment on peut trouver, à un instant quelconque, le temps local du lieu de l'observation; la difficulté de la détermination consiste donc uniquement à trouver l'heure qu'il est à une station où l'observateur ne se trouve pas actuellement. On a pour cela plusieurs moyens plus ou moins précis; mais le plus usité de tous est aujourd'hui la méthode du signal électrique. Nous en parlerons plus tard dans l'astronomie pratique.

Au lieu d'un signal artificiel, on peut employer le mouvement céleste, c'est-à-dire les phénomènes célestes qui se voient simultanément des deux lieux dont on veut trouver la différence de longitude. Deux observateurs placés respectivement à ces deux stations observent un même phénomène et notent chacun le temps local de l'instant où il s'est produit; et la comparaison des deux résultats de l'observation donne ensuite la différence de longitudes cherchée. Parmi ces phénomènes, on doit citer principalement l'*éclipse de lune* et l'*éclipse des satellites de Jupiter*. Malheureusement, à cause de la pénombre de la Terre et de Jupiter, ces éclipses d'observation de ces éclipses n'est pas susceptible d'une grande précision, et l'on ne s'en sert guère que pour une première approximation.

L'*éclipse de soleil* et l'*occultation des astres par la lune* offrent une précision incomparablement beaucoup plus grande. Nous traiterons ce question dans un chapitre spécial; parce que ces phénomènes présentent un intérêt tout particulier et sont d'une importance considérable dans d'autres questions que celle de la détermination des longitudes.

La Lune peut servir d'une autre manière dans la question de la détermination des longitudes. A cause de la rapidité de son mouvement propre de la Lune, sa position par rapport aux autres astres, à telle ou telle époque peut servir à caractériser cette époque d'une façon assez précise. La Lune a une éphéméride donnant sa position de la Lune à des époques assez rapprochées pour une interpolation commode et correspondantes à un temps connu de son premier méridien; une observation actuelle faite dans un lieu donnant la position de la Lune permettra de connaître par interpolation le temps du premier méridien à l'époque de l'observation. En comparant ce temps au temps local de l'observation, on aura la longitude du lieu de l'observation. Tel est à peu près le principe des deux méthodes appelées l'une l'une méthode de la culmination lunaire et l'autre méthode des distances lunaires.

Nous exposerons ici ces deux méthodes séparément.

I. Méthode des culminations lunaires. — A partir de l'an 1885, la connaissance du temps donne, dans son éphéméride de la Lune, jours tous les jours de l'année l'heure où la Lune est observable, l'ascension droite de la Lune au moment du passage de cet astre au méridien dont les longitudes sont égales à 0h, 1h, 2h ... 23h jusqu'à 23h 1m. On donne aussi en regard de chaque nombre tabulaire la logarithme de la variation pour 1m de longitude de l'asc. droite et de la déclinaison, ainsi que le demi-diamètre et la durée de son passage au méridien. Ces nombres, comme nous allons voir, permettent de résoudre très-rapidement le problème de la méthode des culminations.

Un lieu dont on veut connaître la longitude, on détermine, à l'aide d'un instrument méridien, le temps sidéral local au moment où le bord éclairé de la Lune passe par le méridien. On a ainsi l'asc. droite du bord de la Lune à ce moment. Avec cette

ascension droite, on cherche par interpolation dans l'éphéméride le temps du passage du demi-diamètre à travers le méridien. On ajoute ce temps à l'asc. droite du bord ou on en retranche suivant que c'est le 1er bord ou le 2e bord que l'on a observé. On a ainsi l'ascension droite du centre de la lune. On cherche ensuite la longitude du lieu de l'observation exactement comme lorsqu'on cherche le nombre correspondant à un logarithme donné. Pour faire commodément l'interpolation, on se sert de logarithme de la var. de l'asc. droite pour une minute de longitude, variation qu'on interpole pour une longitude moy. entre la longitude cherchée & la longitude cherchée.

Nous allons expliquer la marche à suivre pour faire les interpolations.

Exemple sur un exemple — Supposons que le 14 nov. 1886, on observe à un certain lieu le passage du 2e bord de la lune à $5^h 57^m 2^s,50$ temps sidéral. Voici un extrait de l'éphéméride.

1886. Nov. 6	long.	R. C	log. var. 1m	pass. du demi-diam.
	16^h	$5^h 57^m 21^s,09$	0,39301	$69^s,41$
	17^h	56. 49,47.	342	45
	18^h	59. 17,98	380	48.

Dans une première approximation, on prendra

pass. du demi-diam. = $69^s,45 = 1^m 9^s,45$

asc. droite du centre = $5^h 55^m 53^s,05$

asc. droit du mer 16^h = $5^h 57. 21,09$

Différence. = $1^m 31,96 = 91^s,96$

Dans une première approximation, on prendra

log. vrai. pour 1^m = 0, 39301

On aura ainsi

longitude cherchée = $16^h + 91^s,96 \times 60 \times \frac{1}{(0,39301)} = 16^h 37^m 12^s,24$.

Cette première valeur approchée permettra d'interpoler plus exactement. On aura ainsi le tableau suivant

$69^s,45 - 69,41 = 0,04$ $\quad 0,04 \times \frac{37^m,2}{60^m} = 0,02$.

pass. du demi-diam. = $69^s,41 + 0^s,02 = 1^m 9^s,43$.

asc. droite du centre = $5^h 55^m 53^s,07$.

La Diff. doit donc être prise = 91,98.

Log. varia. pour 1m en mult. 16h = 0,39301

.....17h = 0,39342.

Diff. pour 1h de longitude = 0,00041.

Log. varia. pour la long. moy. entre 15h et 16h 37m 12s

$= 0{,}39301 + 8\frac{0{,}00041}{60} \times 8^m\frac{37{,}2}{2} = 0{,}39314.$

$91{,}98 \times 60 \times \frac{1}{(0{,}39314)} = 37^m\,12^s{,}06.$

Longitude définitive = 16h 37m 12s,06

Usage des étoiles de la culmination lunaire. - Le "Nautical Almanac" ainsi que les autres éphémérides donne pour chaque jour où la lune est observable l'ascension droite de quelques étoiles choisies situées à peu près sur le parallèle de la lune et différent peu de celle de la lune. En observant ces étoiles en même temps que la lune, on obtient avec plus de précision qu'autrement, l'ascension droite du bord de la lune, parce que l'une cause d'erreur qui affecte l'étoile et la lune de la même façon sera sur la lune, disparaît dans la différence des ascensions droites.

Méthode des Observations correspondantes. - L'éphéméride de la lune peut être en erreur de quelques fois un moins considérable. Pour s'affranchir de ces erreurs, on suit la méthode des observations correspondantes. Pour cet objet, la plupart des observatoires fixes, notamment ceux de Greenwich et de Paris observent la lune toutes les fois que cela est possible et publient leurs observations dans leurs annales. L'observateur voyageur y cherche alors des observations de la même date que la sienne et les compare directement.

Cette méthode offre plus d'exactitude que la précédente, mais il n'est pas toujours possible de trouver dans un public des observations de même date que toutes que le voyageur a faites. Alors pour corriger l'éphéméride, il faut faire concourir toutes les observations faites à plusieurs observatoires pendant la lunaison considérée. Nous reviendrons sur cette question dans la construction des éphémérides.

II. Méthodes des distances lunaires. – Le nautical almanac, la Connaissance des temps & d'autres recueils de même genre donnent pour chaque jour de la lune pour 3 heures la distance angulaire de son centre de la lune soit au centre du Soleil, soit au centre des planètes, soit à certaines étoiles brillantes situées au voisinage de l'orbite lunaire. Ces éphémérides donnent cette distance de trois en trois heures du temps moy. de Greenwich ou de Paris, cette valeur étant celle qu'on observerait au centre de la lune.

D'un autre côté, on a bien soin au vent trouver la longitude, on observe avec le Sextant, la distance d'un bord de la lune à l'un des astres inscrits dans l'éphéméride. On a deux astres, comme nous allons le montrer, la distance de deux astres vers le centre de la Terre. On la compare aux nombres de la Table et l'on calcule par interpolation l'heure du premier méridien correspondante à l'instant de l'observation. La comparaison de cette heure avec l'heure locale fait ensuite connaître la longitude cherchée.

Tel est le principe de la méthode des distances lunaires.

Les calculs nécessaires pour arriver au résultat définitif peuvent se partager en trois parties. 1° la réduction préparatoire. 2° la réduction de la distance observée à la distance géocentrique. 3° la comparaison avec l'éphéméride.

1° Réduction préparatoire. – Pour fixer les idées, supposons qu'on ait observé la distance des bords de la lune et du Soleil. Il s'agit d'abord d'en déduire la distance apparente des centres des deux astres.

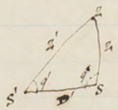
A l'aide d'une valeur approchée de la longitude, que l'on connaît toujours, prenons dans les éphémérides les valeurs actuelles des demi-diamètres géocentriques s et s' de la lune et du Soleil. S'il n'y avait ni parallaxe, ni réfraction il suffirait d'ajouter augmenter ou de diminuer la distance observée de la somme s+s' pour avoir la distance des deux centres. Mais d'abord, nous avons vu que pour la lune, la parallaxe altère d'une façon sensible la

Longueur

valeur du demi-diamètre apparent. Inversement de vraie, quand les hauteurs des deux astres sont petites, la réfraction altère aussi le diamètre apparent de quantités différentes pour les directions différentes. Il faut donc corriger s et s' avant de s'en servir.

Cet objet, il faut connaître, aux moins approximativement, les hauteurs apparentes de la Lune et du Soleil. On les obtient directement, toutes les fois que cela est possible, à l'aide d'observations de hauteur faites un peu avant et un peu après l'observation de la distance. Si ces observations n'avaient pas été faites, on calculera à l'aide de la longitude approchée et du temps local de l'observation, les hauteurs vraies du centre de la Lune et du Soleil et on déduira les hauteurs apparentes. Il faut aussi calculer l'altitude de la Lune, si l'on veut tenir compte, dans la suite, de l'aplatissement de la Terre.

Cela posé, la correction de s due à la parallaxe, dépend à la fois de s et de la hauteur apparente. On a construit une table IX (table XII de Chauvenet) permettant de la trouver rapidement. Reste à trouver les corrections de s et s' dues à la réfraction. — Soient Z le zénith, S et S' la Lune et le Soleil. D'après ce que nous avons vu dans le chapitre de la réfraction, les corrections à ajouter seront:



$$-r\lambda(1+b\lambda^2\cos^2 q), \quad -r'\lambda(1+b\lambda'^2\cos^2 q')$$

Z, Z' étant les distances zénithales apparentes et q, q' les angles $ZS'S$ et ZSS'. Or si l'on appelle D' la distance apparente SS', on a dans le triangle ZSS', en posant:

$$\lambda\theta = \tfrac{1}{2}(Z+Z'+D')$$

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}q = \frac{\sin(\theta-Z)\sin(\theta-D')}{\sin\theta\sin(\theta-Z')} \qquad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}q' = \frac{\sin(\theta-Z')\sin(\theta-D')}{\sin\theta\sin(\theta-Z)}$$

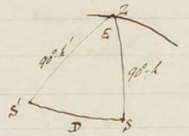
et l'on peut procéder avec une approximation suffisante:

$$D' = \text{dist. obs. des bords} \pm r \pm r'.$$

On aura ainsi tout ce qu'il faut pour corriger la distance observée des bords à la distance apparente des deux astres.

2° *Réduction au centre de la Terre.* — Il nous faut maintenant déduire de la distance apparente D' la distance telle qu'elle serait vue du centre de la Terre. Pour cela, on possède diverses méthodes plus ou moins rigoureuses. Mais dans l'impossibilité où nous sommes de les exposer toutes, nous nous contenterons de donner ici seulement celle donnée par Bravais dans son astronomie théorique.

Soit D la distance cherchée; H, h, h' les hauteurs apparentes de la Lune et du Soleil, Δ, l, l' les (en corrigeant d'abord h, h', ε de la réfraction et par.) de la Lune et par les formules que nous avons données dans le chapitre des parallaxes, calculons les hauteurs géocentriques l et l' de la Lune et du Soleil. Soit S et S' les lieux géocentriques de la Lune et du Soleil.



On aura dans le triangle ZSS', en appelant E la différence des azimuts des deux astres:

$$\cos D = \sin l \sin l' + \cos l \cos l' \cos E$$

ou bien

$$\cos D = \cos(l - l') - 2 \cos l \cos l' \sin^2 \tfrac{1}{2} E.$$

Supposons d'abord que les azimuts apparents soient les mêmes que les azimuts géocentriques, ce qui n'est pas loin de la vérité. On aura alors:

$$\cos D_1^2 = \cos(l_1 - l_1') - 2 \cos l_1 \cos l_1' \sin^2 \tfrac{1}{2} E,$$

en éliminant $\sin^2 \frac{1}{2} E$, il vient alors:

$$\cos D - \cos(l - l') = \frac{\cos l \cos l'}{\cos l_1 \cos l_1'} \{\cos D_1^2 - \cos(l_1 - l_1')\}.$$

Posons:

$$\frac{\cos l \cos l'}{\cos l_1 \cos l_1'} = \frac{1}{C}$$

$$l - l' = \pm L \qquad l_1 - l_1' = \pm L_1$$

L et L_1 étant deux angles positifs.

Nous allons d'abord montrer que le nombre C est toujours plus grand que 1 sauf pour les cas exceptionnels. En effet, pour la hauteur de la Lune, la parallaxe l'emportant de beaucoup sur la réfraction, on a toujours $l_1 > h_1$, et par suite $\frac{\cos l}{\cos l_1}$ et l'on constate que ce rapport diminue à mesure que la hauteur augmente. Il n'est voisin de 1 que pour de petites hauteurs.

En faisant la valeur de C en constate que dans la plupart des cas, ce nombre est inférieur à 2. Il n'est supérieur à 2 que lorsque la hauteur de la lune est très-grande et l'autre astre est très-petite, et dans ce cas $h-h'$ et D_2'' sont très petits. On peut donc poser:

$$\cos d_2 = \frac{1}{C}\cos d_1 \qquad \cos D_2 = \frac{1}{C}\cos D_2$$

La 2de éq. précédente devient ainsi:

$$\cos D - \cos d = \cos D_2 - \cos d_2$$

ou bien

$$\cos D - \cos D_2 = \cos d - \cos d_2.$$

ou bien encore:

$$\sin\tfrac{1}{2}(D-D_2)\sin\tfrac{1}{2}(D+D_2) = \sin\tfrac{1}{2}(d-d_2)\sin\tfrac{1}{2}(d+d_2)$$

ou en prenant $\frac{1}{2}(d-d_2)\sin 1''$ au lieu de $\sin\frac{1}{2}(d-d_2)$ et posant $\frac{1}{2}(D-D_2)\sin 1''$ au lieu de $\sin\frac{1}{2}(D-D_2)$

$$D-D_2 = (d-d_2)\frac{\sin\frac{1}{2}(d+d_2)}{\sin\frac{1}{2}(D+D_2)}$$

Posons:

$$x = (d-d_2)\frac{\sin\frac{1}{2}(d+d_2)}{\sin\frac{1}{2}(D+D_2)}$$

on aura alors simplement

$$D = D_2 + x.$$

L'expression de x contient l'inconnue D. Mais dans une première approximation, on peut prendre:

$$x = (d-d_2)\frac{\sin\frac{1}{2}(d+d_2)}{\sin\frac{1}{2}(D+D_2)}$$

et après avoir calculé la valeur de D à l'aide de cette valeur de x, on recommencera le calcul si cela est nécessaire.

Reste à calculer l'influence de la parallaxe en azimut.

En appellant ΔA la parallaxe en azimut (azimut vrai - azimut app.), on aurait dû prendre dans l'éq. $\cos D \cos(\varepsilon + \Delta A)$ au lieu de $\cos\varepsilon$. La correction qu'il faut appliquer à D est donc définie par:

$$-\sin D\,\Delta D = -\cos\varphi\cos\delta\sin\varepsilon\,\Delta A$$

Or on a

$$\Delta A = -\rho\sin(\varphi-\varphi')\frac{\sin p\sin A}{\cos\delta\sin z}$$

Donc:

$$\Delta D = -\frac{\rho\sin(\varphi-\varphi')\cos\varphi\cos\delta\sin\varepsilon\sin A}{\sin D\sin z}.$$

3° Comparaison avec l'éphéméride. — Il ne reste plus qu'à trouver le temps du premier méridien, soit de Greenwich, qui correspond à la distance linéaire réduite D. Choisissons dans le Nautical pour la date de l'observation deux distances consécutives qui comprennent la distance obtenue; soient t_0 et t_0+3^h les temps qui correspondent à ces deux distances. Le temps cherché s'obtiendra en ajoutant à t_0 une quantité τ moindre que 3^h; il s'agit de trouver τ.

Si nous nous bornons aux différences secondes, nous aurons:

$$D = D_0 + \frac{\tau}{3^h}\Delta D_0 + \frac{1}{2}\frac{\tau}{3^h}\left(\frac{\tau}{3^h}-1\right)\Delta^2 D_0$$

D'où

$$\tau = (D-D_0)\times\frac{3^h}{\Delta D_0} + \frac{1}{2}\tau\left(1-\frac{\tau}{3^h}\right)\frac{\Delta^2 D_0}{\Delta D_0}$$

L'éphéméride donne à côté de chaque nombre tabulaire le logarithme du $\frac{\Delta D_0}{3^h}$ ou

$$L = \log\frac{\Delta D_0}{3^h}.$$

Il suffit donc d'avoir sous la main le rectangle L des log. de $D-D_0$ pour avoir la première partie de τ. Appelons τ_0 cette première partie et posons:

$$\tau = \tau_0 + \Delta\tau_0.$$

On a sensiblement:

$$\Delta\tau_0 = \frac{1}{2}\tau_0\left(1-\frac{\tau_0}{3^h}\right)\frac{\Delta^2 D_0}{\Delta D_0}$$

Mais on a

$$\frac{\Delta^2 D_0}{\Delta D_0} = \frac{\Delta D_1 - \Delta D_0}{\Delta D_0} = \frac{\Delta D_1}{\Delta D_0} - 1 = f - 1$$

en posant

$$f = \frac{\Delta D_1}{\Delta D_0}.$$

Or on a

$$\log f = \log\frac{\Delta D_1}{\Delta D_0} = \log\left(\frac{\Delta D_1}{3^h} \div \frac{\Delta D_0}{3^h}\right) = \log\frac{\Delta D_1}{3^h} - \log\frac{\Delta D_0}{3^h} = \Delta L_1$$

D'où

$$f = \text{antilog}\,\Delta L_1 \quad \text{et par suite}$$

$$\Delta\tau_0 = \frac{1}{2}\tau_0\left(1-\frac{\tau_0}{3^h}\right)(\text{antilog}\,\Delta L_1 - 1)$$

ΔL_1 étant la différence première de L.

Une table spéciale qui se trouve à la fin du Nautical, on trouve la valeur de $\Delta\tau_0$ avec τ_0 et

$\Delta\tau$ comme argument. Cette table peut servir pour tous les calculs des distances lunaires.

Cependant que la connaissance des temps donne une seconde table auxiliaire qui permet de tirer τ de la différence troisième.

Théorie des Éclipses

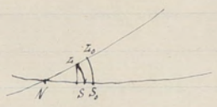
Introduction.

On comprend sous le nom général d'éclipses certains phénomènes célestes qui consistent dans la disparition apparente momentanée de la totalité ou d'une partie de certains corps célestes, soit que ces corps perdent réellement leur clarté, soit que d'autres corps s'interposent entre eux et l'observateur et les lui cachent totalement ou partiellement. Dans la première catégorie, se trouvent l'éclipse de lune qui se produit quand la lune pénètre dans l'ombre portée de la Terre; les éclipses des satellites de Jupiter se produisant quand ces satellites pénètrent dans l'ombre de Jupiter. Dans la seconde catégorie, on distingue l'éclipse de Soleil, totale ou partielle, produite par la lune qui s'interpose entre le Soleil et nous; l'occultation des étoiles et des planètes qui n'est autre qu'une éclipse de ces astres produite par la lune; enfin le passage de Mercure et de Vénus sur le disque solaire, phénomène qui n'est autre qu'une éclipse de Soleil produite soit par Mercure, soit par Vénus.

Nous étudierons d'abord avec détail l'éclipse de Soleil proprement dite; car nous verrons dans la suite, que la théorie des autres espèces d'éclipses s'en déduit très-simplement.

I. Généralités sur l'Eclipse de Soleil.

I. Conditions de possibilité d'une éclipse. - Pour que il y ait une éclipse de Soleil, il faut que la distance angulaire minimum du centre du Soleil et de la Lune vue d'un point de la surface terrestre soit plus petite que la somme des demi-diamètres apparents des deux astres. Ceci ne peut se produire que si la Lune est au voisinage de l'un de ces nœuds et que sa longitude diffère peu de celle du Soleil. Soient NS l'écliptique et N$_1$ le plan de l'orbite lunaire. Soit S et Σ les positions du Soleil et de la Lune, et soit Σ la distance angul. ZS des deux astres. Soient l et λ la longitude et la latitude de la Lune et l' λ' celles du Soleil. On a:



$$\cos\Sigma = \cos\lambda\cos(l-l')$$

on suppose nous tenons au voisinage du nœud:

$$\Sigma^2 = (l'-l)^2 + \lambda^2.$$

Mais en appelant αb et I la longitude du nœud de la Lune et l'inclinaison de son orbite, on a

$$\operatorname{tg}\lambda = \sin(l-\alpha b)\operatorname{tg} I.$$

ou plus simplement

$$\lambda = (l-\alpha b)\operatorname{tg} I$$

On a donc:

$$\Sigma^2 = (l'-l)^2 + (l-\alpha b)^2\operatorname{tg}^2 I \qquad (1)$$

Soit l_0 la longitude commune des deux astres au moment de la conjonction, et soient m et m' les variations de ces longitudes pour l'unité de temps. On aura sensiblement:

$$l = l_0 + mt \qquad l' = l_0 + m't$$

le temps t étant compté à partir du moment de la conjonction

D'où $$\Sigma^2 = (m-m')^2t^2 + (l_0 - \alpha b + mt)^2\operatorname{tg}^2 I.$$

Pour que Σ soit minimum, il faut que:

$$(m-m')^2 t + m(l_0 - \alpha b + mt)\operatorname{tg}^2 I = 0$$

D'où

$$t = -\frac{m(l_0-\alpha b)\operatorname{tg}^2 I}{(m-m')^2 + m^2\operatorname{tg}^2 I}.$$

En portant cette expression dans celle de Σ, il vient:

$$\Sigma^2 = \frac{m^2(c_0-cb)^2 \operatorname{tg}^2 I + (m-m')^2 (c_0-cb)^2 \operatorname{tg}^2 I}{\{(m-m')^2 + m^2 \operatorname{tg}^2 I\}^2}.$$

ou bien

$$\Sigma^2 = \frac{(m-m')^2 (c_0-cb)^2 \operatorname{tg}^2 I}{(m-m')^2 + m^2 \operatorname{tg}^2 I}.$$

Mais en appelant λ_0 la latitude de la lune au moment de la conjonction, on a:

$$(c_0 - cb) \operatorname{tg} I = \lambda_0$$

En posant donc: $\frac{m}{m'} = k$ et $\frac{k-1}{k} \operatorname{tg} I = \operatorname{tg} I'$

on aura donc enfin:

$$\Sigma^2 = \frac{\lambda_0^2}{1 + \operatorname{tg}^2 I'} = \lambda_0^2 \cos^2 I',$$

d'où en valeur absolue:

$$\Sigma = \lambda_0 \cos I'$$

Si nous supposons que toutes nos grandeurs soient relatives aux bords géocentriques des deux astres, le vrai rayon de Σ sera $\lambda_0 \cos I' - (\rho - \rho')$, ρ et ρ' étant les parallaxes de la lune et du Soleil, en appelant s et s' les demi-diamètres apparents de ces astres, la condition d'éclipse sera:

$$\lambda_0 \cos I' - (\rho - \rho') < s + s'$$

ou bien:

$$\lambda_0 < \frac{1}{\cos I'} (\rho - \rho' + s + s').$$

En prenant pour le second membre sa valeur maxima et sa valeur minima, on trouve que

si $\lambda_0 > 1°\,34'\,58''$ l'éclipse est impossible.

si $\lambda_0 < 1°\,23'\,10''$ l'éclipse est certaine.

Entre ces deux limites, il y a incertitude: et il faudra décider en prenant les valeurs actuelles de λ, β, ρ', s et s'.

II. *Direction de l'axe du cône d'ombre.* — Supposons maintenant qu'on ait constaté qu'il peut y avoir éclipse de Soleil pour quelques lieux de la surface de la Terre. — Nous allons alors donner ce que l'on appelle les *équations fondamentales* de l'éclipse de Soleil. Nous suivrons pour cela la méthode de Bessel modifiée en peu par Chauvenet.

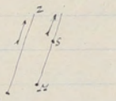
Imaginons deux cônes circonscrits, l'un extérieurement et l'autre intérieurement à la lune et au Soleil. Le premier

* Ceci se produit pour correspond à un lieu qui voit le ⊙ de la ☾ dans un même vertical ★ le ⊙ au-dessous de la ☾.

De ces cônes l'un s'appelle le cône d'ombre et le second le cône de pénombre des deux astres. Ces deux cônes ont leur axe commun qui n'est autre chose que la ligne des centres des deux astres et ils sont tous les deux de révolution.

Cela posé, un observateur verra les disques des deux astres en contact l'un avec l'autre, soit extérieurement, soit intérieurement, quand il se trouvera précisément sur la surface de l'un des deux cônes; et ceci arrivera quand la distance de cet observateur à l'axe des cônes sera égal au rayon de l'un de ces cônes dans la section droite faite par un plan passant par l'observateur. L'équation qui exprime cette égalité est ce qu'on appelle équation fondamentale de l'éclipse. Pour la former commodément, nous allons d'abord déterminer la direction de l'axe du cône d'ombre par rapport aux axes de coord. géoc. équatoriales.

Par le centre de la Terre, menons la parallèle OZ à la droite qui va du centre de la Lune au centre dans du Soleil.



Soient α et δ l'ascension droite & la décl. de l'extrémité z de cette droite dans la sphère céleste. Nous allons chercher α et δ.

Appelons x, y, z l'ascension droite, la déclinaison et la distance au centre de la Terre du centre de la Lune; x', y', z' les mêmes coord. pour le centre du Soleil, soit G la distance des deux centres. Nous aurons évidemment:

$$(1)\quad \begin{cases} G\cos\delta\cos\alpha = z'\cos\delta'\cos\alpha' - z\cos\beta\cos\alpha \\ G\cos\delta\sin\alpha = z'\cos\delta'\sin\alpha' - z\cos\beta\sin\alpha \\ G\sin\delta = z'\sin\delta' - z\sin\beta \end{cases}$$

ou bien:

$$(2)\quad \begin{cases} G\cos\delta\cos(\alpha-\alpha') = z'\cos\delta' - z\cos\beta\cos(\alpha-\alpha') \\ G\cos\delta\sin(\alpha-\alpha') = -z\cos\beta\sin(\alpha-\alpha'). \end{cases}$$

D'où

$$\operatorname{tg}(\alpha-\alpha') = -\frac{z\cos\beta\sin(\alpha-\alpha')}{z'\cos\delta' - z\cos\beta\cos(\alpha-\alpha')}.$$

Posons:

$$\frac{z}{z'} = b.$$

Comme ce rapport est fort petit (1400 à peu près) et que

Dans le cas où il y a éclipse, $\alpha - \alpha'$ est un petit arc qui ne dépasse pas 2°. Donc on peut négliger sans erreur sensible $b(\alpha-\alpha')^2 \sin^n$, $b(\alpha-\alpha')^3 \sin^n$ et il vient :

$$\alpha - \alpha' = -\frac{b}{1-b} \sin\beta \sec\beta' (\alpha - \alpha').$$

On aura ensuite avec le même degré d'approximation :

$$G \cos t = x' \cos\beta' - x \cos\beta$$

qui, combinée avec la première éq. (1) donne :

$$(3) \quad \begin{cases} G \sin(t-\beta') = -x \sin(\beta - \beta') \\ G \cos(t-\beta') = x' - x \cos(\beta - \beta') \end{cases}$$

J'ai

$$\operatorname{tg}(t-\beta') = -\frac{x \sin(\beta-\beta')}{x' - x\cos(\beta-\beta')}$$

ou bien :

$$t - \beta' = -\frac{b}{1-b}(\beta - \beta').$$

Nous avons encore à calculer le rapport

$$g = \frac{G}{x'}$$

On a d'abord par éq. (3) :

$$g^2 = b^2 \sin^2\beta + [1 - b\cos(\beta-\beta')]^2 = 1 - 2b\cos(\beta-\beta') + b^2.$$

Ou approximativement :

$$g = 1 - b\cos(\beta - \beta').$$

Il nous reste à calculer commodément le rapport b à l'aide des données des éphémérides. Pour cela, évaluons en demi-temps x et x' à l'aide du demi-grand axe de l'orbite terrestre pris comme unité, le membre x' ainsi défini est donné par des logarithmes dans l'éphéméride du Soleil. Si l'on appelle pour un moment ρ_0 le rayon équatorial de la Terre et qu'on désigne par ϖ la parallaxe horizontale équatoriale de la Terre (rapport à l'unité précédente), on aura :

$$x = \frac{\rho_0}{\sin\varpi}.$$

Mais en appelant ϖ_0 la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil quand il se trouve à la moyenne distance de la Terre, on a :

$$\rho_0 = 1 \times \sin\varpi_0 \qquad \text{Donc :} \quad x = \frac{\sin\varpi_0}{\sin\varpi}.$$

On aura donc :

$$b = \frac{\sin\varpi_0}{x' \sin\varpi}.$$

Résumons nos formules dans le tableau suivant :

$$a-\alpha' = -\frac{b}{1-b}\cos^2\sec^2\beta'(\alpha-\alpha')$$

$$\delta-\delta' = -\frac{b}{1-b}(\delta-\delta'). \qquad g = 1-b\cos^2(\delta-\delta').$$

formules que l'on peut remplacer toutes par:

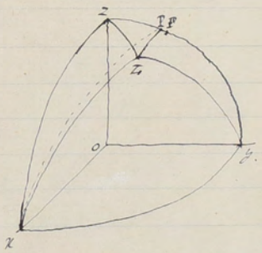
$$a = \alpha' - b(\alpha-\alpha') \quad \delta = \delta' - b(\delta-\delta') \quad g = 1-b.$$

III. Distance du lieu d'observation à l'axe du cône d'ombre. — Par le centre de la Terre, menons un plan perpendiculaire à la droite oz. Ce plan est ce que nous appellerons le plan méridional de référence. Si nous prenons deux axes rectang. ox, oy dans le plan de référence et que nous appelions d'une côté x, y, z les coord. du centre de la lune par rapport aux axes ox, oy, oz et de l'autre ξ, η, ζ celles d'un lieu g.g de la surface de la Terre par rapport aux mêmes axes, la distance Δ de ce lieu à l'axe du cône d'ombre sera donnée par l'éq.

$$\Delta^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

puisque l'axe de ce cône étant parallèle à oz, les x et les y de tous les points de cet axe sont les mêmes.

Il nous faut donc calculer d'abord x, y et ξ, η, mais comme dans la suite nous aurons aussi besoin de z et de ζ, nous calculerons toutes les 6 coord. considérées.



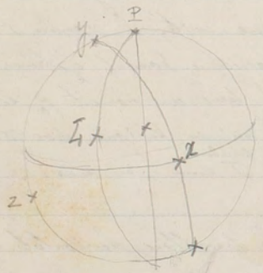
Pour faire un choix convenable des axes ox, oy, menons le cercle de déclinaison du point z jusqu'au pôle Nord P et prolongeons-le au-delà. Nous prendrons pour le point y le point où ce grand cercle coupe le grand cercle déterminé par le plan principal. Nous prendrons pour le point x le point où l'équateur céleste coupe le même grand cercle et pour signe de l'arc. Cet arc est égale à $\alpha+90°$.

Soit $\overline{xz}$ le lieu géocentrique de la lune. On aura dans les triangles xPz, yPz et zPz:

$$\frac{x}{I} = \cos\delta\sin(\alpha-a)$$

$$\frac{y}{I} = \sin\delta\cos\delta - \cos^2\delta\sin\delta\cos(\alpha-a)$$

$$\frac{z}{I} = \sin^2\delta + \cos^2\delta\cos(\alpha-a)$$



Si nous prenons pour unité de longueur le rayon équatorial de la Terre. Nous aurons alors:

$$\Sigma = \frac{1}{\sin\varpi}$$

et en remplaçant $\cos(\alpha-a)$ par $\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-a) - \sin^2\frac{1}{2}(\alpha-a)$ et 1 par $\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-a) + \sin^2\frac{1}{2}(\alpha-a)$, il vient:

$$x = \frac{1}{\sin\varpi}\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a)$$

$$y = \frac{1}{\sin\varpi}\sin(\delta-\Delta)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a) + \frac{\cos\varpi}{\sin\varpi}\sin(\delta+\Delta)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a)$$

$$z = \frac{1}{\sin\varpi}\cos(\delta-\Delta)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a) - \frac{1}{\sin\varpi}\cos(\delta+\Delta)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a).$$

Cherchons maintenant ξ, η, ζ. Soient ρ le rayon vecteur aboutissant au lieu de observation considéré et réduit en partie du rayon équatorial, φ' la latitude réduite de ce lieu et Θ le temps sidéral correspondant local de ce lieu au moment que nous considérons. On aura alors:

$$\xi = \rho\cos\varphi'\sin(\Theta-a)$$

$$\eta = \rho\sin\varphi'\cos\Delta - \rho\cos\varphi'\sin\Delta\cos(\Theta-a)$$

$$\zeta = \rho\sin\varphi'\sin\Delta + \rho\cos\varphi'\cos\Delta\cos(\Theta-a)$$

L'angle $\Theta-a$ n'est autre chose que l'angle horaire du point z vu du lieu considéré. Si donc on appelle μ l'angle horaire du même point vu de Greenwich et que l'on désigne par $\frac{\lambda}{\varpi}$ la longitude du lieu considéré, on aura

$$\Theta - a = \mu + \frac{\lambda}{\varpi},$$

avec

$$\mu = \Theta_0 - a$$

Θ_0 étant le temps sidéral de Greenwich au moment considéré.

IV. Largeur des cônes d'ombre et de pénombre. — Appelons χ le demi-ouverture du cône d'ombre ou de pénombre, c la distance du sommet de ce cône au plan principal de référence. La distance z du lieu d'observation que nous avons considéré précédemment à l'axe du cône aura évidemment pour valeur:

$$Z = \pm(c-\zeta)\tan\chi.$$

Soit r le rayon de la section droite de ce cône faite par un plan passant par le lieu d'observation que nous avons considéré précédemment. On aura évidemment

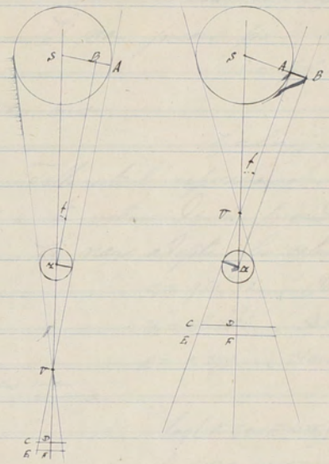
$$r = \pm(c-\zeta)\tan\chi.$$

Pour le cône de pénombre, on a toujours $c > \zeta$; mais

pour le cône d'ombre c sera plus petit que 1 quand il y aura éclipse ~~totale~~ annulaire. Pour donner plus de généralité à notre formule, convenons de regarder la longueur z du cône comme négative pour le dernier cas, nous aurons alors toujours:

$$\overline{T\Sigma} = (c-1)\,tg\,f.$$

Il nous faut calculer c et f. Pour cela, soient Σ et S les centres de la lune et du Soleil, T le sommet du cône d'ombre ou de pénombre. CD le rayon fictif mené par le plan du bas d'obs. et EF celui de la section faite par le plan principal.



On a d'abord

$$c = z \pm \overline{T\Sigma}$$

suivant qu'il s'agit du cône d'ombre ou du cône de pénombre.

On a ensuite:

$$\sin f = \frac{SA \mp AB}{S\Sigma}.$$

- pour l'ombre, + pour la pénombre.

Evaluons d'abord $\sin f$. Appelons pour cela δ_0 le demi-diamètre ~~du~~ apparent du Soleil à la distance moyenne de la Terre, et R le rapport du rayon linéaire de la lune à celui de la Terre. En prenant pour unité de longueur le demi-axe majeur de l'orbite terrestre, on a

$$SA = \text{rayon du Soleil} = \sin\delta_0$$

$$AB = \text{rayon de la lune} = R.\sin\delta_0.$$

et

$$S\Sigma = S \times \frac{S\Sigma}{ST} = S' \times \frac{G}{ST} = S'g.$$

On aura donc:

$$\sin f = \frac{\sin\delta_0 \mp R\sin\delta_0}{S'g}$$

On a maintenant en ~~vertu~~ vertu de ce qui a été dit à notre unité de longueur:

$$T\Sigma = \frac{\text{ray. de la Lune}}{\sin f} = \frac{R}{\sin f}.$$

Donc.

$$c = z \mp \frac{R}{\sin f}.$$

En portant la valeur de c dans l'expression de $\bar{z}$, on a:

$$\bar{z} = (z \mp \frac{R}{\cos f}) \operatorname{tg} f - s \operatorname{tg} f.$$
$$= z \operatorname{tg} f \mp R \sin f - s \operatorname{tg} f.$$

Si l'on y fait $s = 0$, on aura la longueur l du cône dans la section faite par le plan fondamental, de sorte que

$$l = z \operatorname{tg} f \mp R \sin f$$

et par suite

$$\bar{z} = l - s \operatorname{tg} f.$$

Si nous posons pour abréger

$$i = \operatorname{tg} f$$

nous aurons:

$$\bar{z} = l - is.$$

Telle est l'expression cherchée de $\bar{z}$, expression dans laquelle s a la valeur donnée précédemment.

Si nous adoptons les valeurs suivantes:

$\varpi_0 = 961'',82$. (Obs. faites à Greenw. de 1836 à 1847).
$\varpi_0 = 8'',8848$ (adopté par Newcomb)
$R = 0,273$. (Hansen).

nous aurons:

$$\log(\sin\varpi_0 + R\sin(\varpi_0)) = \bar{3},66975$$
$$\log(\sin\varpi_0 - R\sin(\varpi_0)) = \bar{3},66669.$$

Si nous prenons pour g la valeur $1 - \frac{1}{400} = \frac{399}{400}$ et pour f' sa valeur minimum $= 0,01677$, on trouve

$$\log g = \bar{1},99956456$$

et par suite la valeur maximum de $\log \operatorname{tg} f$ est: $\bar{3},67819$ et par suite celle de $\log i = \log \operatorname{tg} f = \bar{3},67819$.

On voit ainsi que i est un nombre très-petit.

V. Equation fondamentale de l'éclipse. — En écrivant que la distance du lieu d'observation à l'axe du cône est égale au rayon du cône z, c'est-à-dire que l'observateur voit les bords du lieu exactement au contact, on a l'équation

$$\Delta = \pm \bar{z}$$

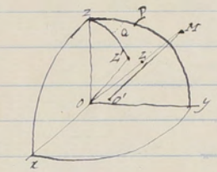
ou bien

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (l - i\zeta)^2.$$

C'est la relation qui doit exister entre les trois coord.

ξ, η, ζ pour qu'au moment considéré l'observateur voit les disques du Soleil et de la Lune en contact l'un avec l'autre. C'est là ce qu'on appelle l'équation fondamentale de l'éclipse.

Il est plus commode d'écrire cette équation dans une autre forme en introduisant un certain angle lié aux coord. x, y, z. Pour cela joignons dans la position de l'axe de l'observateur O' au centre de la Lune et par le centre de la sphère céleste o menons une parallèle à la direction $O'Z$; cette droite perce la sphère céleste en un point $\bar{z}$ qui sera le lieu apparent de la Lune, tandis que z en est le lieu géocentrique. Désignons par Q l'angle que fait l'arc $z\bar{z}$ avec l'arc zy, angle compté positivement de zy vers zx. Cet angle n'étant autre chose que l'angle que fait avec oy la projection du vecteur $O'Z$ sur le plan yox, on aura évidemment:



$$\Delta \sin Q = x - \xi.$$

$$\Delta \cos Q = y - \eta.$$

En exprimant que Δ est égal à z ou $\zeta - \zeta'$, on aura:

$$(\zeta - \zeta') \tan Q = x - \xi$$

$$(\zeta - \zeta') \cos Q = y - \eta$$

Deux équations qui tiennent lieu de l'éq. précédente puisque l'on retrouve celle-ci en éliminant l'angle Q.

L'angle Q n'est autre chose que l'angle de position du centre apparent de la Lune par rapport au point z, cet angle étant compté du Nord vers l'Est. Mais quand cet angle satisfait aux éq. précédentes c'est-à-dire lorsqu'il y a contact des deux disques, il arrive d'abord on peut confondre approximativement le point z avec le centre du Soleil, ce qui revient à négliger une fraction de la parallaxe du Soleil; ensuite le point de contact des deux disques étant sur la ligne des centres, a le même angle de position que le centre de la Lune. Donc, au moment

on aura contact, il n'y ait autre chose que l'angle de position du point de contact des deux lignes par rapport au centre du Soleil. Il est vrai que ~~quand~~ l'~~éclipse~~ pour la fin ou le commencement de l'éclipse totale le centre de la Lune et le point de contact se trouvent de part & d'autre du centre du Soleil. Mais en vertu de la règle conventionnel de b à π, la même chose arrivera encore comme dans les autres cas.

VII. Construction d'une table. - Pour résoudre toutes les questions que nous allons nous proposer sur l'éclipse de Soleil, il importe de calculer d'avance les valeurs de toutes les quantités que nous avons considérées & qui ne dépendent pas de la position de l'observateur, pour les époques équidistantes comprenant toute la durée de l'éclipse générale et de réduire toute en valeurs en table.

Pour cela, on prendra dans l'éphéméride de la Lune, pour des ~~époques~~ temps entiers de Greenwich, par ex. formant une période de 5^h à 6^h et comprenant l'époque de la conjonction en ascension droite, les quantités α, δ et π. On prendra de même dans l'éphéméride du Soleil les valeurs des quantités α', δ' et $\log r'$ pour les mêmes époques. On calculera alors b, a et g par

$$b = \frac{\sin\pi_0}{r'\sin\pi_0} \begin{cases} a = \alpha - \frac{1}{1-b}\cos\delta'(\alpha-\alpha') \\ \delta = \delta' - \frac{b}{1-b}(\delta-\delta') \\ g = 1 - b\cos(\delta+\delta') \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \alpha - b(\alpha-\alpha') \\ \delta = \delta' - b(\delta-\delta') \\ g = 1-b. \end{cases}$$

On calculera ensuite x, y et z par les formules:

$$x = \frac{1}{\sin\pi_0}\cos\delta\sin(\alpha-a) \qquad \text{dans lesquelles } \mu = \odot - a$$

$$y = \frac{1}{\sin\pi_0}\sin(\delta-d)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a) + \frac{1}{\sin\pi_0}\sin(\delta+d)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a)$$

$$z = \frac{1}{\sin\pi_0}\cos(\delta-d)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a) - \frac{1}{\sin\pi_0}\cos(\delta+d)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-a).$$

On passera ensuite au calcul successif de f, l & i par:

$$\sin f = \frac{\sin\frac{1}{2}\sigma \mp K\sin\pi_0}{r'g} = \frac{\text{Const}}{r'g} \quad \begin{matrix} \text{pour} \\ \text{pen.} \end{matrix}$$

$$l = 2\operatorname{tg} f \mp K\sec f \quad \begin{matrix} \text{ann.} \\ \text{pen.} \end{matrix}$$

$$i = \operatorname{tg} f.$$

On aura ainsi besoin des valeurs de quelques-unes de

ces quantités on les calculera par interpolation comme nous l'avons expliqué dans un des précédents chapitres.

VII. *Contour de l'ombre projetée sur la surface de la Terre.* — A une époque quelconque donnée, le cône d'ombre ou le cône de pénombre rencontre la surface de la Terre suivant une certaine courbe qui est le lieu des points de cette surface d'où l'on voit à cette époque les disques du Soleil et de la Lune se toucher l'un l'autre. Cherchons quelle doit être la relation entre la longitude et la latitude d'un point pour qu'il appartienne à cette courbe. — Soient λ et φ ses deux coord. On a d'abord

$$(1)\quad \begin{cases} \rho \sin\varphi' = \varkappa(1-e^2)\sin\varphi\sec\chi & -\cos\varphi \;\Big|\; \sin\varphi \\ \rho\cos\varphi' = \varkappa\cos\varphi\sec\chi & \sin\varphi \;\Big|\; \cos\varphi \end{cases}$$

ou, ce qui est au fond la même chose:

$$(1')\quad \begin{cases} \rho\sin(\varphi-\varphi') = \tfrac{1}{2}\varkappa e^2\sin 2\varphi\sec\chi \\ \rho\cos(\varphi-\varphi') = \varkappa\cos\chi \end{cases}$$

formules dans lesquelles on a

$$\tan\chi = e\sin\varphi$$

e étant l'excentricité de l'ellipse méridienne terrestre.

Maintenant si nous posons pour abréger

$$\theta = \Theta - \alpha = \mu + L = \Theta_1 - \alpha + L$$

nous devons avoir, pour que le point φ, λ soit sur la surface du cône considéré:

$$(2)\quad \begin{cases} \rho\cos(\lambda-\zeta)\sin\theta = x-\xi \\ (\lambda-\zeta')\cos\theta = y-\eta \end{cases}$$

dans lesquelles on a:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \rho\cos\varphi'\sin\theta \\ \eta = \rho\sin\varphi'\cos\delta - \rho\cos\varphi'\sin\delta\cos\theta \\ \zeta = \rho\sin\varphi'\sin\delta + \rho\cos\varphi'\cos\delta\cos\theta \end{cases}$$

Ces cinq équations (2) et (3) contiennent, outre les quantités indépendantes de φ et λ, les 6 inconnues $\varphi, \lambda, \theta, \xi, \eta, \zeta$. Elles se réduisent donc à une éq. unique entre φ et λ et qu'on pourra appeler équation du contour de l'ombre projetée sur la surface de la Terre.

Pour construire cette courbe par points, procédons pour

paramètre variable la quantité Ω à laquelle nous donnons successivement de différentes valeurs. Il s'agit d'en déduire les valeurs correspondantes de φ et λ. Pour faire ce calcul commodément, posons avec Chaundet:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \cos\varphi\sec\chi.$$

D'où

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{1-e^2}\sin\varphi\sec\chi.$$

On aura alors d'après les éq. (1)

$$\rho\cos\varphi' = \cos\varphi_1$$
$$\rho\sin\varphi' = \sqrt{1-e^2}\sin\varphi_1$$

et les éq. (3) deviendront:

$$(4)\quad \begin{cases} \xi = \cos\varphi_1\sin\delta \\ \eta = \sqrt{1-e^2}\sin\varphi_1\cos\delta - \cos\varphi_1\sin\delta\cos\theta \\ \zeta = \sqrt{1-e^2}\sin\varphi_1\sin\delta + \cos\varphi_1\cos\delta\cos\theta. \end{cases}$$

Déterminons 4 quantités ρ_1 ρ_2 δ_1 δ_2 telles qu'on ait:

$$\begin{cases} \rho_1\sin\delta_1 = \sin\delta \\ \rho_1\cos\delta_1 = \sqrt{1-e^2}\cos\delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_2\sin\delta_2 = \sqrt{1-e^2}\sin\delta \\ \rho_2\cos\delta_2 = \cos\delta \end{cases}$$

et prenons ρ_1 ρ_2 positifs. On peut écrire en équations:

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tg}\delta \qquad \operatorname{tg}\delta_2 = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\delta$$
$$\rho_1 = \sqrt{1-e^2\cos^2\delta} \qquad \rho_2 = \sqrt{1-e^2\sin^2\delta}$$

En posant:

$$\frac{\sqrt{1-e^2}-1}{\sqrt{1-e^2}+1} \rightsquigarrow n_2 =$$

$$n = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}-1}{\sqrt{1-e^2}+1}$$

on aura d'abord:

$$\delta_1 = \delta + \frac{n}{1+n^2}\sin 2\delta + \frac{n^2}{2}\sin 4\delta + \cdots$$
$$\delta_2 = \delta - \frac{n}{1+n^2}\sin 2\delta + \frac{n^2}{2}\sin 4\delta - \cdots$$

En posant encore:

$$\sqrt{1-e^2} = f \qquad \frac{1-f}{1+f} = n$$

on aura comme dans la théorie des parallaxes, qu'on a:

$$\rho_1 = \frac{1+f}{2}\sqrt{1-2\frac{1-f}{1+f}\cos 2\delta + \left(\frac{1-f}{1+f}\right)^2}$$
$$\rho_2 = \frac{1+f}{2}\sqrt{1+2\frac{1-f}{1+f}\cos 2\delta + \left(\frac{1-f}{1+f}\right)^2}.$$

on en tire en développant:

$$\log\rho_1 = \log\frac{1+f}{2} - M n\cos 2\delta - \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{2}\cos 4\delta - \cdots$$
$$\log\rho_2 = \log\frac{1+f}{2} + M n\cos 2\delta - \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{2}\cos 4\delta + \cdots$$

$n = \sin\alpha$ $n = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

$\frac{1+f}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$. $\log\frac{1+f}{2} = 2\log\cos\frac{\alpha}{2}$

On peut ainsi calculer rapidement les 4 quantités $f_1 f_2 d_1 d_2$ pour toutes les valeurs de l'argument de la table de l'éclipse. Remarquons que les diff. $d_1 - d_2$, $d_2 - d_3$, $1 - f_1$, $1 - f_2$ sont toutes trois petites du 2e ordre inclusivement par rapport à c^2.

Cela posé, les eq. (4) peuvent s'écrire :

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \cos\varphi \sin\theta \\ \eta = f_1 \sin\varphi \cos d_1 - f_1 \cos\varphi \sin d_1 \cos\theta \\ \zeta = f_2 \sin\varphi \sin d_2 + f_2 \cos\varphi \cos d_2 \cos\theta. \end{cases}$$

Posons maintenant deux inconnues auxiliaires η_1 et ζ_1 telles que l'on ait :

$$(6)\quad \begin{aligned} \eta_1 &= \sin\varphi \cos d_1 - \cos\varphi \sin d_1 \cos\theta \qquad \cos d_2 = \sin d_1 \\ \zeta_1 &= \sin\varphi \sin d_1 + \cos\varphi \cos d_1 \cos\theta \qquad \sin d_1 \cos d_1 \end{aligned}$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$\eta_1 = \frac{\eta}{f_1} \qquad \zeta_1 = \pm\sqrt{1 - \xi^2 - \eta_1^2}$$

ou bien

$$(6')\quad f_1 \eta_1 = \eta \qquad \xi^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1.$$

On aura d'après les éq (6),

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \sin d_1 \qquad \sin d_2 \\ \cos\varphi \cos\theta &= -\eta_1 \sin d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \qquad \cos d_2. \end{aligned}$$

En les substituant dans l'expression de ζ, il vient :

$$\zeta = f_2 \zeta_1 \cos(d_1 - d_2) - f_2 \eta_1 \sin(d_1 - d_2).$$

Si l'on néglige c^2, on a $d_1 - d_2 = 0$ et $f_2 = 1$. Donc ζ et ζ_1 diffèrent très peu l'un de l'autre et la diff. est du 2e ordre de c^2. D'ailleurs la quantité i est aussi très petite ; donc dans une première approximation, on peut prendre $i\zeta = i\zeta_1$ dans les éq. (2) qui deviennent :

$$(8)\quad \begin{cases} (l - i\zeta_1) \sin\Omega = x - \xi \\ (l - i\zeta_1) \cos\Omega = y - f\eta_1 \end{cases}$$

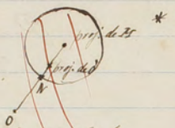
Ces deux éq. jointes à la 2e éq. (4) déterminent ξ, η_1, ζ_1 en fonction de θ. On remontera de là aux quantités φ et Ω par les éq.

$$(9)\quad \begin{cases} \cos\varphi \sin\Omega = \xi \\ \cos\varphi \cos\Omega = -\eta_1 \sin d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ \sin\varphi = \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \sin d_1 \end{cases}$$

et de là aux quantités φ et Ω par les éq :

$$(10)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{tg}\varphi_1 \qquad \Omega = \Omega - \mu.$$

$0° < b < 90°$



En se reportant à la figure de la page 257 on voit que $x - l\sin\Omega$, $y - l\cos\Omega$ sont les coord. du point N.

Posons pour un instant

$$\left.\begin{aligned} m &= x - l\sin\Omega \\ n &= \frac{y}{\zeta_1} - \frac{l}{\zeta_1}\cos\Omega \end{aligned}\right\} \quad \text{on a alors} \quad \begin{aligned} \xi &= i\zeta_1 \sin\Omega + m \\ \eta_1 &= \frac{i\zeta_1}{\zeta_1}\cos\Omega + n. \end{aligned}$$

On peut faire, en négligeant toujours $i\zeta^2$, $\phi\frac{i\zeta_1}{\zeta_1} = i\zeta_1$, donc:

$$\zeta_1^2 + 2i\zeta_1(m\sin\Omega + n\cos\Omega) + m^2 + n^2 - 1 = 0.$$

d'où

$$\zeta_1 = -i(m\sin\Omega + n\cos\Omega) \pm \sqrt{i^2(m\sin\Omega + n\cos\Omega)^2 + 1 - m^2 - n^2}$$

ou approximativement

$$\zeta_1 = -i(m\sin\Omega + n\cos\Omega) \pm \sqrt{1 - m^2 - n^2}$$

On peut ~~faire~~ développer, dans le cas de la possibilité

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta\sin f &= m = x - l\sin\Omega \\ \sin\beta\cos f &= n = \frac{y}{\zeta_1} - \frac{l}{\zeta_1}\cos\Omega \end{aligned}\right. \qquad 90° > \frac{\beta}{*} > 0.$$

alors:

$$\zeta_1 = -i\,m\sin\beta\cos(\Omega - f) \pm \cos\beta.$$

qui résultent des définitions de ξ et η et β.

Pour répondre aux trois cg. précédentes, remarquons que nous pouvons poser:

$$(11)\quad \begin{cases} \sin\beta\sin f = x - l\sin\Omega \\ \sin\beta\cos f = \frac{y}{\zeta_1} - \frac{l}{\zeta_1}\cos\Omega. \end{cases} \qquad b \text{ étant} < 90° > 0°.$$

car la quantité $(x - l\sin\Omega)^2 + (\frac{y}{\zeta_1} - \frac{l}{\zeta_1}\cos\Omega)^2$ étant à peu près égale à la distance du centre de la Terre ~~au projecteur~~ à la trace du cône d'ombre sur le plan fondamental, pour que cette quantité soit plus grande que 1, il faudrait que la Terre ne rencontrât pas du tout la surface du cône.

On aura alors:

$$(12)\quad \begin{cases} \xi = i\zeta_1\sin\Omega + \sin\beta\sin f \\ \eta_1 = \frac{i\zeta_1}{\zeta_1}\cos\Omega + \sin\beta\cos f \end{cases}$$

En substituant dans la dernière éq. (7), il vient:

$$(i\zeta_1\sin\Omega + \sin\beta\sin f)^2 + (\frac{i\zeta_1}{\zeta_1}\cos\Omega + \sin\beta\cos f)^2 + \zeta_1^2 = 1.$$

Ou en prenant $\frac{i}{\zeta_1} = i$, ce qui est permis, et développant:

$$(i^2+1)\zeta_1^2 + 2i\zeta_1\sin\beta\cos(\Omega - f) - \cos^2\beta = 0.$$

d'où

$$\zeta_1 = \frac{-i\sin\beta\cos(\Omega - f) \pm \sqrt{i^2\sin^2\beta\cos^2(\Omega - f) + (i^2+1)\cos^2\beta}}{i^2+1}$$

ou en négligeant toujours i^2 au même titre que $i(\zeta - \zeta_1)$:

$$\zeta_1 = -i\sin\beta\cos(\Omega - f) \pm \cos\beta.$$

i étant très-petit, le second membre est généralement positif si l'on prend le signe + et négatif si l'on prend −. Pour voir quel signe il faut prendre, considérons l'éq.

$$\rho_1\zeta_1 = \rho_1\sin\Phi_1\sin f_1 + \rho_1\cos\Phi_1\cos f_1\cos\Omega$$

En substituant pour $\rho_1\sin f_1$, $\rho_1\cos f_1$, $\sin\Phi_1$ & $\cos\Phi_1$ leurs valeurs qui résultent de leurs définitions, il vient:

$$\rho_1\zeta_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}}(\sin\Phi\sin f + \cos\Phi\cos f\cos\Omega)$$

Mais le second terme n'est autre chose que $\cos z$, z étant la distance zénithale du point z vu du point considéré. Donc on a: $\rho_1\zeta_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}}\cos z$. par suite ζ_1 a le signe de $\cos z$. Mais pour que l'éclipse soit visible, il faut que $z < 90°$ et par suite $\cos z > 0$. Donc, si nous nous bornons au cas où l'on peut voir l'éclipse

Résumé de la 1ère approximation :

$$\sin\beta\sin T = x - l\sin Q$$
$$\sin\beta\cos T = \frac{y}{\rho_1} - \frac{l}{\rho_1}\cos Q.$$

$$\varepsilon\sin T'' = i\cos(Q-T).$$

$$\zeta_1 = \cos(\beta+\varepsilon).$$

$$\xi = i\zeta_1\sin Q + \sin\beta\sin T$$
$$\eta = \frac{i\zeta_1}{\rho_1}\cos Q + \sin\beta\cos T.$$

$$\cos\varphi_1\sin\theta = \xi$$
$$\cos\varphi_1\cos\theta = -\eta\sin\delta_1 + \zeta_1\cos\delta_1$$
$$\sin\varphi_1 = \eta_1\cos\delta_1 + \zeta_1\sin\delta_1$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\psi_1 \qquad Q = \theta - \psi.$$

on devra prendre ζ_1 facteur de i par suite :

$$\zeta_1 = \cos\beta - i\sin\beta\cos(Q-T)$$

Posons :

$$\varepsilon\sin T'' = i\sin\beta\cos(Q-T)$$

i étant petit, on pourra poser :

$$\cos\varepsilon = 1 \qquad \varepsilon\sin T'' = \varepsilon\sin T'$$

Par suite on pourra écrire :

$$\zeta_1 = \cos\beta\cos\varepsilon - i\sin\beta\sin\varepsilon$$

ou bien :

$$\zeta_1 = \cos(\beta+\varepsilon).$$

Une fois ζ_1 connu, on aura ξ et η par les éq. (12).
Portant les éq. (9) et (10) donnant successivement φ_1 et φ, r.

Dans cette solution, nous avons négligé le carré de i^2 qui pourrait quelquefois être sensible. Pour avoir nos inconnues à un terme de l'ordre i^2 près, calculons d'abord ζ à un terme de 2e ordre près. Pour cela, il suffit de remplacer dans l'expression de ζ, ζ_1 par sa valeur $\cos(\beta+\varepsilon)$ approché jusqu'au 1er ordre, et négligeant la quantité $(\rho_1 - i\rho\cos T)\sin(\delta_1-\delta_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1}\cos Q\sin(\delta_1-\delta_2)$ qui est du 2e ordre, ainsi que $(\delta_1-\delta_2)^2 \times \sqrt{(\delta_1-\delta_2)^3}$ qui est du 3e ordre, alors

$$\zeta = \rho_2\zeta_1\cos(\beta+\varepsilon) - \rho_2\sin\beta\cos T(\delta_1-\delta_2)\varepsilon\sin T''$$

ou en posant :

$$\varepsilon' = (\delta_1-\delta_2)\cos T \qquad \cos T(\delta_1-\delta_2)\varepsilon\sin T'' = \varepsilon\sin\varepsilon'$$

et prenant $1 = \cos\varepsilon'$

nous aurons :

$$\zeta = \rho_2\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon').$$

En substituant cette valeur dans les éq. fondamentales, on aura à un 3e ordre près :

$$\left[\ell - i\rho_2\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon')\right]\sin Q = x - \xi.$$
$$\left[\ell - i\rho_2\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon')\right]\cos Q = y - \eta$$

~~Si nous leur donnons la forme :~~

~~$$\sin\beta\sin T'' = x - l\sin Q + i\rho_2\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon')$$~~
~~$$\sin\beta\cos T'' = \frac{y}{\rho_1} - \frac{l}{\rho_1}\cos Q + i\frac{\rho_2}{\rho_1}\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon')$$~~

~~on aura une table de grandeur nécessaire~~, où l'on

Résumé de la 2e approximation.

$$\sin\beta\sin\gamma = x - l\sin\Omega$$
$$\sin\beta\cos\gamma = \frac{y}{\xi} - \frac{l}{\xi}\cos\Omega.$$

$$\varepsilon = \frac{i\cos(\Omega - 1)}{\sin 1''}$$

$$\varepsilon' = (d_1 - d_2)\cos\gamma$$

$$\zeta = \sin\beta\sin\gamma + i\frac{l}{\xi}\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon')\sin\Omega$$
$$\eta_1 = \sin\beta\cos\gamma + i\frac{l}{\xi}\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon')\cos\Omega$$

$$\sin\beta'\sin\gamma' = \zeta$$
$$\sin\beta'\cos\gamma' = \eta_1$$
$$\zeta_1 = \cos\beta'$$

On en tire :

$$\zeta = x - l\sin\Omega + i\left(\frac{y}{\xi}\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon') - \frac{l}{\xi}\right)\sin\Omega$$
$$\eta_1 = \frac{y}{\xi}x - \frac{l}{\xi}\cos\Omega + i\frac{y}{\xi}\cos(\beta+\varepsilon+\varepsilon')\cos\Omega.$$

Si l'on procède ensuite :

$$\sin\beta'\sin\gamma' = \zeta$$
$$\sin\beta'\cos\gamma' = \eta_1$$

l'éq. $\zeta^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1$ donnera rigoureusement

$$\zeta_1 = \cos\beta'$$

et le reste du calcul se fera comme précédemment.

Cherchons maintenant comment on pourra décider si à l'époque considérée, l'éclipse est oui ou non de commencer ou de finir pour un lieu d'observation considéré. Pour cela, il suffit de chercher si la quantité $\Delta^2 - \Delta_1^2$ qui est actuellement nulle va en diminuant ou en augmentant. Or on a :

$$\Delta^2 - \Delta_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (l - i\zeta)^2$$

Donc en appelant $2P$ la dérivée de $\Delta^2 - \Delta_1^2$ par rapport au temps, $x'\eta'_2\xi'\eta'\zeta'$ celles de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ et remarquant que la seule variation de i est insensible, nous aurons :

$$P = (x-\xi)(x'-\xi') + (y-\eta)(y'-\eta') + (l-i\zeta)(l-i\zeta')$$

et pour l'époque cherchée :

$$P = (l - i\zeta')\left\{(x-\xi)\sin\Omega + (y-\eta)\cos\Omega - (l - i\zeta')\right\}.$$

En différentiant les valeurs de ξ, η, ζ, on a :

$$\xi' = \rho\cos\varphi'\cos\theta\,\frac{d\Omega}{dt}$$
$$\eta' = -\left(\rho\sin\varphi'\sin\Omega + \rho\cos\varphi'\cos(\Omega+\theta)\right)\frac{d\Omega}{dt} + \rho\cos\varphi'\sin\Omega\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$
$$\zeta' = \left(\rho\sin\varphi'\cos\Omega - \rho\cos\varphi'\sin(\Omega+\theta)\right)\frac{d\Omega}{dt} - \rho\cos\varphi'\cos\Omega\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Mais on a :

$$\rho\cos\varphi'\overset{\cos\theta}{=}\left[-\eta\sin\Omega + \xi\cos\Omega\right]\frac{d\Omega}{dt}.$$

Donc :

$$\xi' = \left(-\eta\sin\Omega + \xi\cos\Omega\right)\frac{d\Omega}{dt}$$
$$\eta' = -\zeta\frac{d\Omega}{dt} + \xi\sin\Omega\,\frac{d\theta}{dt}$$
$$\zeta' = +\eta\frac{d\Omega}{dt} - \xi\cos\Omega\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Posons :

$$\mu' = \frac{d\mu}{dt}\sin 1'' \qquad d' = \frac{dd}{dt}\sin 1''$$

alors $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d(\mu + d)}{dt} = \dfrac{d\mu}{dt}.$

et en supposant $\mu + d$ exprimés en secondes d'arc.

$$\xi' = \mu'(-y\sin t + \xi\cos t)$$
$$y' = \mu'\xi\sin t - d'\zeta.$$
$$\zeta' = -\mu'\xi\cos t + d'y.$$

Mais dans le cas actuel, on a :

$$\xi = x - (l-i\zeta)\tan\varphi \qquad y = y - (l-i\zeta)\cos\varphi$$

Donc enfin :

$$\xi' = \mu'\{-y\sin t + (l-i\zeta)\cos\varphi\sin t + \xi\cos t\} \qquad -\sin\varphi$$
$$y' = \mu'\{x\sin t - (l-i\zeta)\tan\varphi\sin t\} - d'\zeta \qquad -\cos\varphi$$
$$\zeta' = \mu'\{-x\cos t + (l-i\zeta)\tan\varphi\cos t\} + d'\xi\{y - (l-i\zeta)\cos\varphi\} \qquad +i.$$

Remplaçons ces valeurs dans l'expression de P et posons,

$$a' = -b' - i\mu' x\cos t$$
$$b' = -y' + \mu' x\sin t$$
$$c' = x + \mu' y\sin t + i\mu' l\cos t \quad \text{quantité}$$

mais aussi en négligeant i^2 & $i d'$ également petits.

$$P = (l-i\zeta)\{a - b\cos\varphi + c\tan\varphi - \xi(\mu'\sin t\tan\varphi - d'\cos\varphi)\}.$$

Si nous posons en outre

$$c\sin\varepsilon = b' \qquad \mu' x = d'$$
$$c\cos\varepsilon = c' \qquad \mu'\cos t = \mu'\cos t$$

nous aurons :

$$P = (l-i\zeta)\{a + c\sin(\varphi-\varepsilon) - \xi\mu'\tan(\varphi-\varepsilon)\}.$$

expression qui fera connaître très-commodément le signe de P.

Le plus souvent on peut négliger a' et P, alors on aura dans le cas d'une éclipse partielle ou annulaire :

$$c\sin(\varphi-\varepsilon) > \xi\mu'\tan\varphi \quad \text{commencement fin}$$

Pour une éclipse totale, on aura l'inverse.

II. Construction d'une carte de l'éclipse de Soleil.

I. Préliminaire. - Considérons un cas tout particulier où la déclinaison de la Lune et celle du Soleil sont nulles toutes les deux au moment telle. A cette époque, on verra ~~sur un lieu~~ l'axe du cône d'ombre rencontrera un lieu situé sur la ~~surface~~ équateur de la Terre ; appelons λ sa longitude. Nous devrons alors avoir

$$x = \frac{1}{\tan \omega} \sin(\alpha - a) \qquad z = \frac{\sin}{\tan \omega}(\mu + \lambda)$$

et

$$\alpha = z = x.$$

c'est-à-dire :

$$\sin \omega (\mu + \lambda) = \frac{1}{\tan \omega} \sin(\alpha - a).$$

Si le temps changeant, nous supposons que $d\omega'$ reste encore négligeable, l'axe du cône rencontrera un lieu variable dont la longitude λ sera donnée d'une façon générale par l'éq. précédente. En la différentiant, par rapport au temps, on a :

$$\cos(\mu + \lambda)\left(\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\right) = \frac{1}{\tan \omega} \cos(\alpha - a)\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{da}{dt}\right).$$

Or en appelant α le carré de $\sin(\alpha - a)$, on a :

$$\cos(\alpha - a) = \sqrt{1 - x} \qquad \cos(\mu + \lambda) = \frac{\sqrt{\tan^2 \omega - x}}{\tan \omega}$$

Donc :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{\tan^2 \omega - x}}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{da}{dt}\right) - \frac{d\mu}{dt}.$$

Le coefficient du premier terme est minimum pour $x = 0$. Donc on a :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{da}{dt}\right)\frac{1}{\tan \omega} - \frac{d\mu}{dt}.$$

En assimilant a à α' et prenant la valeur minima du premier terme, on trouve que le second membre est toujours positif. Donc il en est de même de $\frac{d\lambda}{dt}$.

D'ailleurs $\frac{d\lambda}{dt}$ ne doit jamais être que très légèrement

Concluons de là que la ~~axe~~ du cône d'ombre va rencontre successivement les points de l'équateur terrestre en commençant par l'ouest et marchant vers l'est.

Le cône de pénombre dont la longueur l ne dépasse jamais ~~après~~ environ la moitié du rayon terrestre, va d'abord toucher la surface de la Terre ; et alors le point de

l'équateur terrestre qui se trouve sur la surface verra l'éclipse commencer juste au moment du lever du Soleil. Ensuite le cône de pénombre viendra à toucher et montrera la surface de la Terre de plus à l'ouest du premier point d'où l'on verra l'éclipse finir au lever du Soleil. Plus loin vers l'ouest on ne verra plus du tout l'éclipse.

Lorsque le cône va suivre la Terre, il se produira encore contact de deux deux points de l'équateur d'où l'on verra pour le premier l'éclipse finir au coucher du Soleil et pour le second l'éclipse commencer au coucher du Soleil. Au-delà on ne pourra plus du tout voir le phénomène de l'éclipse.

Aux environs de l'équateur dans une zone plus ou moins étendue, des phénomènes analogues se produiront avec des circonstances diverses, mais la largeur de cette zone privilégiée sera nécessairement limitée, et au-delà on ne pourra plus jouir du spectacle de l'éclipse.

En résumé, il y aura lieu de considérer sur la surface de la Terre les deux lignes limites de visibilité de l'éclipse, c'est-à-dire le contour qui doit séparer la région où l'éclipse peut se voir de celle où elle est invisible.

Tout ce que nous avons dit s'appliquera en principe dans le cas où les déclinaisons δ et δ' sont différentes de zéro; il n'y aura de changé que les détails de fait, car ces déclinaisons n'atteignent jamais des valeurs considérables. Il y aura toujours des courbes limites des régions de visibilité et de la région d'invisibilité. C'est la construction de ces courbes et d'autres qui s'y rattachent que nous allons nous occuper maintenant.

Nous considérons successivement: 1° le lieu des points d'où l'on voit l'éclipse commencer ou finir quand le Soleil est à l'horizon. 2° le lieu des points d'où l'on

voit le maximum d'éclipse quand le Soleil est à l'horizon. 3e Courbe des limites nord et Sud. 4e Courbe de l'éclipse centrale et courbes limites de l'éclipse totale ou annulaire.

II. Lieux des points d'où l'on voit l'éclipse commencer ou finir quand le Soleil est à l'horizon. A un moment donné, le cône d'ombre ou de pénombre coupe la surface de la Terre suivant une certaine courbe que nous avons appris à construire. Parmi les points de cette courbe, il peut y en avoir un ou plusieurs d'où on peut les voir le Soleil est à l'horizon à l'époque considérée. En joignant cette dernière condition à celle qui exprime que le lieu considéré se trouve sur le cône, on aura autant d'équations qu'il y a de fois deux inconnues dont l'élimination pourra déterminer ce lieu. En le traduisant on aura trouvé un point de la courbe que nous voulons construire.

Le Soleil est à l'horizon quand la distance zénithale z du point S est égale à 90°, c'à d. lorsque

$$\cos z = 0 \qquad \text{ou} \qquad \xi_1 = 0.$$

Pour le but que nous nous proposons, il faut bien négliger i^2, par suite de prendre $i\xi = 0$ comme $i\xi_1 = 0$. Nos équations seront donc.

$$\sin\Omega = x - \xi.$$

$$\cos\Omega = y - \eta \quad , \quad \mu = \rho\,\eta_1.$$

$$\xi^2 + \eta_1^2 = 1$$

Posons:

$$m\sin Z = x \qquad \rho\sin\delta = \xi$$

$$m\cos Z = y \qquad \rho\cos\delta = \eta.$$

Les quantités m, Z seront connues à priori; il nous faut calculer ρ & δ. Mais comme on a

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

et que η diffère peu de η_1, ρ diffère de 1 d'une quantité d'ordre de i. Cette première valeur approchée de ρ nous aidera beaucoup à trouver la valeur exacte et par suite ξ & η.

En substituant les valeurs de x, y, z on aura :

$$\sin\theta = m\sin\varkappa - p\sin t \qquad \text{Cote}$$

$$\cos\theta = m\cos\varkappa - p\cos t . \qquad \text{Cote}$$

D'où

$$\ell^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos(\varkappa - t).$$

ou

$$\ell^2 = m^2 + p^2 - 2mp + 4mp\sin^2\tfrac{1}{2}(\varkappa - t).$$

On en tire

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varkappa - t) = \pm\sqrt{\frac{(\ell+m-p)(\ell-m+p)}{4mp}}.$$

Prenons un angle λ compris entre $0°$ et $180°$ tel que

$$\sin\tfrac{1}{2}\lambda = +\sqrt{\frac{(\ell+m-p)(\ell-m+p)}{4mp}}.$$

on aura alors :

$$\varkappa - t = \pm\lambda \qquad \text{ou} \qquad t = \varkappa \mp \lambda.$$

Si l'on connaît λ, cette éq. donnera pour t deux valeurs qui donneront deux points de la courbe cherchée.

On aura une première valeur approchée de λ en prenant $p = \ell$ ce qui donne

$$\sin\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\frac{(\ell+m-\ell)(\ell-m+\ell)}{4m\ell}}$$

et par suite une valeur approchée de t. Ayant ensuite on peut en déduire les valeurs de x et y.

Posons :

$$x = \varkappa t' \qquad \text{alors} \qquad y = \sqrt{1-x^2} = \cos t'.$$

La définition de p et t donne :

$$p\sin t = \varkappa t' \qquad p\cos t = \rho_1\cos t'$$

D'où

$$\operatorname{tg} t' = \rho_1 \operatorname{tg} t \qquad \rho = \frac{\varkappa t'}{\sin t} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_1\cos t'}{\cos t}.$$

Ces deux dernières éq. détermineront successivement t' et ρ dès qu'on connaîtra t et comme $\varkappa t'$ et $\cos t'$ auront respectivement les signes de $\varkappa t$ et de $\cos t$ il n'y aura aucune ambiguïté et l'on aura par suite x et y bien déterminés.

On prendra donc d'abord les valeurs approchées de t et l'on calculera ρ. ρ. Avec cette valeur approchée de ρ on calculera une valeur plus approchée de λ, d'où l'on déduira une val. plus approchée de t et par suite une [illegible] on arrivera de même à

Une fois x et y connus, on aura ρ et θ par

$$\operatorname{tg}(\theta_0' + \varepsilon') = \rho_1 \operatorname{tg}(t_0 + \varepsilon) \qquad \operatorname{tg}\theta_0' = \rho_1 \operatorname{tg} t_0$$

$$\operatorname{tg}\theta_0' + \frac{\varepsilon'}{\cos^2\theta_0'} = \rho_1\left(\operatorname{tg} t_0 + \frac{\varepsilon}{\cos^2 t_0}\right)$$

$$\varepsilon' = \frac{\rho_1\cos^2\theta_0'}{\cos^2 t_0}\varepsilon. \qquad \varepsilon' = \varepsilon + \text{2e ord.}$$

Or $\rho = \dfrac{\varkappa(t_0'+\varepsilon')}{\varkappa(t_0+\varepsilon)} = \dfrac{\varkappa t_0' + \varepsilon'\cos t_0'}{\varkappa t_0 + \varepsilon\cos t_0} = \dfrac{\varkappa t_0'}{\varkappa t_0}\left(1 + \varepsilon'\cot t_0' - \varepsilon\cot t_0 + \cdots\right)$

Donc $\rho = \dfrac{\varkappa t_0'}{\varkappa t_0} + \text{2e ord.}$

$$\cos\varphi \sin\Delta = \xi t'$$
$$\cos\varphi \cos\Delta = -\cos\beta' \sin\alpha t,$$
$$\sin\varphi = \cos\beta' \cos\alpha t,$$

et ensuite φ et Δ par

$$\Delta = T + \Delta \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\xi\varphi_1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Le temps solaire local du phénomène sera approximativement égal à l'angle horaire Δ, et par suite le soleil sera au point de Δ se lever ou de se coucher suivant que Δ sera négatif ou positif (en comptant entre 12^h et 24^h ou entre 0^h et 12^h).

Pour voir si l'éclipse commence ou finit, il suffit de faire $\zeta = 0$ dans la formule du chapitre I. Alors $\cos\Omega$ est le signe de $\sin(\Omega - \xi)$ qui le suit. Or on a ici:

$$\cos\Omega \sin(\Omega - \xi) = m \sin(H - \xi) - p \sin(T - \xi)$$

on aura donc la règle suivante:

$$m \sin(H - \xi) \gtrless p \sin(T - \xi) \quad \begin{cases} \text{commencement} \\ \text{fin} \end{cases}$$

Pour une éclipse totale, le sens s'inverse.

Limites de possibilité. — Pour que, avec une valeur donnée du temps, on puisse trouver un système de valeurs de φ et Δ satisfaisant à la question actuelle, il faut que le radical qui donne $\cos\Omega$ soit réel. Deux conditions de possibilité on a donc l'une ou l'autre des égalités

$$l + m - p = 0 \quad , \quad l - m + p = 0.$$

ou bien:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x'^2+y'^2} - l \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x'^2+y'^2} + l.$$

Dans [illegible] on voit qu'il s'agit de cônes de pénombre.

La 2e égalité exprime à peu près que le cône de pénombre touche extérieurement la surface de la Terre au point ξ, η. Ce sera donc le commencement ou la fin de l'éclipse pour toute la surface de la Terre en général, le lieu satisfaisant à cette égalité sera donc celui d'où l'on voit [illegible] l'éclipse commencer au lever du Soleil ou celui d'où l'on voit [illegible] l'éclipse finir au coucher du Soleil. La 1re égalité exprime que le cône est tangent intérieurement à la surface terrestre, donc le point correspondant, ou verra [illegible] l'éclipse finir au lever du Soleil, ou bien on verra le premier l'éclipse commencer au coucher du Soleil.

Cherchons d'abord le temps T correspondant à la 2e égalité. On doit avoir

$$(\rho+l)\sin Hz = x$$
$$(\rho+l)\cos Hz = y.$$

Soit T_0 une époque bien déterminée prise aussi près que possible de l'époque T et posons.

$$T = T_0 + \tau.$$

En appelant x_0 et y_0 les valeurs de x et y à l'époque T_0 et x' et y' leurs dérivées à la même époque on aura appro.

$$x = x_0 + x'\tau$$
$$y = y_0 + y'\tau.$$

Si donc l'on pose.

$$m_0 \sin Hz_0 = x_0 \qquad n\sin N = x'$$
$$m_0 \cos Hz_0 = y_0 \qquad n\cos N = y'$$

on aura aussi

$$(\rho+l)\sin Hz = m_0 \sin Hz_0 + \tau n \sin N$$
$$(\rho+l)\cos Hz = m_0 \cos Hz_0 + \tau n \cos N.$$

d'où

$$(\rho+l)^2 = m_0^2 + 2m_0 n \cos(Hz_0 - N)\cdot\tau + n^2\tau^2.$$

Dans le cas où il y a éclipse, on doit avoir:

$$m_0^2\cos^2(Hz_0 - N) - \left[m_0^2 - (\rho+l)^2\right] > 0.$$

c'est à dire

$$(\rho+l)^2 - m_0^2\sin^2(Hz_0 - N) > 0.$$

On peut donc poser:

$$\sin\chi = \frac{m_0 \sin(Hz_0 - N)}{\rho+l}$$

On aura alors pour les deux solutions de l'éq. précédente,

$$\tau = -\frac{m_0}{n}\cos(Hz_0 - N) \pm \frac{\rho+l}{n}\cos\chi.$$

Mais l'angle χ n'étant déterminé que par son sinus, a essentiellement deux valeurs qui ont leurs cosinus de signes contraires. Si donc nous convenons de prendre l'une et l'autre de ces valeurs de χ, nous pourrons écrire simplement, pour représenter les deux solutions:

$$\tau = -\frac{m_0}{n}\cos(Hz_0 - N) + \frac{\rho+l}{n}\cos\chi.$$

Pour obtenir le temps correspondant à la 1re égalité il suffira de changer dans la formule précédente l en $-l$

ce qui donne

$$\sin\chi = \frac{m_0 \cos(\Psi_0 - N)}{p - l}$$

avec

$$\tau = -\frac{m_0}{n}\cos(\Psi_0 - N) + \frac{p-l}{n}\cos\chi.$$

Mais ici l'angle χ peut être imaginaire ; & dans ce cas le cône de jaunisse ne touche jamais intérieurement la surface de la Terre ; il n'y a pas conséquent jamais pénétration du cône dans le sphéroïde terrestre. Dans ce cas on n'a plus que deux limites du temps et une courbe unique. Dans le cas où le contact intérieur existe, on aura deux limites du temps et deux courbes formées distinctes.

Les équations précédentes contiennent p qui n'est pas connu à priori. On a

$$(p+l)\sin(\Psi - N) = m_0 \sin(\Psi_0 - N)$$
$$(p+l)\cos(\Psi - N) = m_0 \cos(\Psi_0 - N) + n\tau.$$

c'a.d.

$$\sin(\Psi - N) = \sin\chi$$
$$\cos(\Psi - N) = \cos\chi$$

on a donc :

$$\Psi - N = \chi \quad \text{ou} \quad \Psi = N + \chi.$$

& comme dans le cas actuel, on a $\lambda = 0$ et $\gamma = \Psi$, on aura

$$\gamma = N + \chi.$$

On prendra donc dans une première approximation τ en fonction de p et l'on calculera par cette éq. une valeur approchée de τ, avec cette valeur on calculera par la première que nous avons indiqué, une valeur plus approchée de p. On recommencera le calcul avec cette nouvelle valeur de p & ainsi de suite.

Après avoir trouvé ainsi une valeur approchée de τ, on prendra $T + \tau$ pour une nouvelle ~~valeur~~ approximation du temps et en recommençant le calcul, on aura une valeur plus exacte du temps cherché T.

Quand on aura trouvé la valeur exacte de t, on en prendra à t' et t'' à la longitude & à la latitude du ~~lieu~~ point de contact du cône avec le sphéroïde terrestre.

III. Lieu des points d'où l'on voit le maximum d'éclipse quand le Soleil est à l'horizon. — Lorsqu'on a une éclipse partielle, le degré d'obscurité augmente à mesure que la distance apparente des deux centres diminue; il devient maximum quand elle en est minimum: c'est alors qu'on dit que l'éclipse est maximum. La condition pour qu'il en soit ainsi à un moment donné, c'est évidemment que l'on ait à ce moment

$$\frac{d(\Delta^2)}{dt} = 0. \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0$$

Or en différentiant les éq.

$$\Delta \sin\theta = x - \xi.$$

$$\Delta \cos\theta = y - \eta$$

on a:

$$\frac{d\Delta}{dt}\sin\theta + \Delta\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = x' - \xi' \qquad \sin\theta$$

$$\frac{d\Delta}{dt}\cos\theta - \Delta\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = y' - \eta' \qquad \cos\theta .$$

d'où

$$\frac{d\Delta}{dt} = (x' - \xi')\sin\theta + (y' - \eta')\cos\theta .$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\Delta}{dt} = l' - i\xi'$$

On doit donc avoir

$$(l' - i\xi') - (x' - \xi')\sin\theta - (y' - \eta')\cos\theta = 0.$$

Si nous appelons $-P'$ le premier membre de cette équation nous avons d'après le Chapitre précédent:

$$P' = a' + e\alpha\sin(\theta - E) - f\beta\sin(\theta - F)$$

Si nous replaçons à l'éq $P' = 0$ pour a écrit:

$$e\alpha\sin(\theta - E) - f\beta\sin\theta = 0$$

En joignant à la condition $P = 0$ la maximum de l'éclipse $\xi_1 = 0$ pour que le soleil soit à l'horizon, on aura:

$$\alpha\sin(\theta - E) = 0$$

d'où $\theta = E$ ou $\theta = E + 180$

On doit avoir:

$$\pm\Delta\sin E = x - \xi.$$

$$\pm\Delta\cos E = y - \eta$$

avec $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Passons comme dans le paragraphe précédent.

$m \sin \lambda = x$ $\quad$ $\rho \sin \varphi = \xi$

$m \cos \lambda = y$ $\quad$ $\rho \cos \varphi = \eta$.

On devra avoir :

$$\pm \Delta \sin \Sigma = m \sin \lambda - \rho \sin \varphi$$

$$\pm \Delta \cos \Sigma = m \cos \lambda - \rho \cos \varphi$$

ce qu'on peut écrire :

$$0 = m \sin (\lambda - \Sigma) - \rho \sin (\varphi - \Sigma)$$

$$\pm \Delta = m \cos (\lambda - \Sigma) - \rho \cos (\varphi - \Sigma).$$

En posant :

$$\varphi - \Sigma = \chi \quad \text{ou} \quad \varphi = \Sigma + \chi$$

on aura donc :

$$\sin \chi = \frac{m \sin (\lambda - \Sigma)}{\rho},$$

$$\pm \Delta = m \cos (\lambda - \Sigma) - \rho \cos \chi.$$

Dans le cas général, on a

$$\rho^2 = \xi^2 + \rho^2 \eta^2 \qquad L = \xi^2 + \eta^2$$

on a donc :

$$1 - \rho^2 = \eta^2 (1 - \rho^2).$$

Comme ρ est $< L$ on a $\rho < 1$, et comme $\rho < 1$, on a $\rho > \rho_1$. Donc les valeurs admises de ρ sont $1 > \rho > \rho_1$ et dans pour le but que nous poursuivons, il suffit de prendre pour ρ la moyenne géométrique $\sqrt{1 \times \rho_1}$, de sa valeur λ par suite $\frac{1}{2} \log \rho_1$ pour $\log \rho$. On aura alors par l'éq. précédente la valeur de χ et par suite celle de φ. Ayant trouvé φ, on calculera comme précédemment λ' par

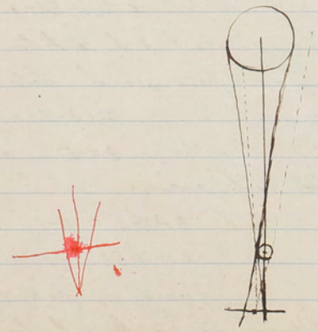
$$\operatorname{tg} \lambda' = \rho_1 \operatorname{tg} \varphi$$

et de là on déduira φ_1, φ et ensuite $\varphi_1 \varphi_2$.

Dans la pratique, il sera commode de construire la courbe actuelle en même temps que les courbes précédentes.

Degré d'obscurité. — On appelle degré d'obscurité d'une éclipse partielle la fraction $\frac{D}{d}$ du diamètre apparent du Soleil qui est couverte par la lune. Si l'on appelle $z + z_1$ les valeurs algébriques des rayons des cônes de pénombre et d'ombre et D le degré d'obscurité, on aura approximativement, comme il est facile de le voir

$$D = \frac{z - \Delta}{z + z_1}.$$



Dans le cas actuel, on a $\zeta_1 = 0$ et partant $\Sigma = L$. On aura donc pour le degré d'obscurité maximum

$$D = \frac{c-1}{c+1}$$

Comme on connaît Δ par la dernière éq. précédente, on pourra calculer D par cette formule.

IV. Courbes des limites Nord et Sud. - C'est le lieu des points d'où l'on voit un triple contact des deux disques solaire et lunaire, sans que ces disques s'empiètent l'un sur l'autre ni avant ni après le moment du contact. C'est aussi l'enveloppe de la base variable du cône de pénombre sur la surface de la Terre.

Pour un point de cette courbe, on doit avoir à un moment donné à la fois

$$\Sigma - 1 = 0 \quad , \quad P' = 0$$

Pour trouver un pareil point, il suffit de trouver la valeur de l'angle φ correspondant satisfaisant aux éq. précédentes; car alors en suivant la méthode exposée dans le dernier paragraphe du chapitre précédent, on pourra en déduire la valeur de φ et Ω correspondantes.

Pour y parvenir, il convient d'employer un procédé d'approximations successives.

La condition $\Omega' = 0$ peut s'écrire approximativement:

$$e \sin(\Omega - E) = f \sin \Omega .$$

Si l'on avait $\zeta = 0$, on aurait

$$\Omega = E \quad \text{ou} \quad E + 180^\circ$$

Si l'on avait maintenant $\zeta = L$, on aurait

$$e \sin(\Omega - E) = f \sin \Omega .$$

Ecrivons cette équation

$$e \sin(\Omega - H + H - E) = f \sin(\Omega - H + H)$$

ou en développant

$$e \sin(\Omega - H) \cos(H - E) + e \cos(\Omega - H) \sin(H - E) = f \sin(\Omega - H) \cos H + f \cos(\Omega - H) \sin H$$

d'où

$$\operatorname{tg}(\Omega - H) = \frac{f \sin H - e \sin(H - E)}{e \cos(H - E) - f \cos H} .$$

Déterminons H par la condition:

$$-H = H - E \quad \text{d'où} \quad H = \tfrac{1}{2} E$$

alors:

$$\operatorname{tg}(Q-\tfrac{1}{2}E) = \frac{c+f}{c-f}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E.$$

Posons

$$\operatorname{tg} v = \frac{f}{c} \qquad 0 < v < 90°$$

alors:

$$\frac{c+f}{c-f} = \frac{1+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} v} = \operatorname{tg}(45° + v)$$

et si nous posons ensuite

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(45°+v)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$

nous aurons avoir:

$$Q = \tfrac{1}{2}E+\gamma \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}E+\gamma+180°$$

La quantité γ étant en réalité comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, il s'ensuit que l'angle Q doit être compris entre la 1ère valeur et la seconde. Et comme γ est beaucoup plus petit que e, l'angle v est petit et par suite γ est peu de $\frac{1}{2}E$. On a donc ainsi deux limites assez rapprochées de l'angle Q et l'on devra essayer une valeur de Q comprise entre ces deux limites.

Pour les besoins de la pratique, il suffit une position approchée de chaque point de la courbe cherchée, et pour cela, il n'est pas nécessaire d'avoir la valeur de Q avec beaucoup d'exactitude; il suffira de prendre:

$$\sin(Q-E) = f_1 \sin Q$$

ou bien

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(Q-\tfrac{1}{2}E) = \frac{c+f_1}{c-f_1}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E$$

Il suffira même de prendre pour f_1 la valeur

$$f_1 = \cos\beta$$

β étant calculé par les formules

$$\sin\beta \sin t = x - l\sin Q$$

$$\sin\beta \cos t = y_0 - z_0 \cos Q$$

dans lesquelles on remplacera pour Q sa valeur approchée.

Ayant trouvé ainsi une valeur approchée de Q, on passera au calcul plus exact de la position du point cherché.

Il conviendra de poser

$$\operatorname{tg} v' = \frac{f}{c}\cos\beta$$

d'où

$$\operatorname{tg}(\Omega - \tfrac{1}{2}\Sigma) = \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Sigma .$$

Limites des temps. - Parmi les points de la courbe considérée, il n'y a que ceux pour lesquels ζ_1 est >0 d'où l'on puisse voir l'éclipse. Il est donc complètement inutile de construire des autres points. Pour limiter les points utiles, on aura $\zeta_1 = 0$ en même temps que $\xi_1 - \Delta = 0$ et $\Delta' = 0$. La supposition de $\zeta_1 = 0$ réduit les deux dernières équations.

$$\sin(\Omega - E) = 0$$
$$l \sin\Omega = x - \xi .$$
$$l \cos\Omega = y - \eta .$$

ou en éliminant Ω

$$\pm l \sin E = x - \xi .$$
$$\pm l \cos E = y - \eta .$$

On a par définition :

$$\sin E = \frac{\Delta'}{\delta} \qquad \cos E = \frac{\zeta'}{\delta} .$$

Prenons une époque T_0 aussi voisine que possible de l'époque considérée, et soit $T = T_0 + \tau$ l'époque cherchée. Appelons b_0 et ζ_0 ; b'' c'' les valeurs initiales de b' c' et leurs variations par unité de temps. En négligeant la variation des demi-diamètres, on aura

$$\sin E = \frac{b_0}{\delta} + \frac{b''}{\delta}\tau \qquad \cos E = \frac{c_0}{\delta} + \frac{c''}{\delta}\tau$$

ou

$$\sin E = \sin E_0 + \frac{b''}{\delta}\tau \qquad \cos E = \cos E_0 + \frac{c''}{\delta}\tau .$$

Posons en outre

$$x = x_0'' + x'\tau \qquad y = y_0 + y'\tau .$$

Quant à ξ et η, en négligeant la petite différence qui existe entre η et η_1, on aura

$$\xi^2 + \eta^2 = L$$

on peut donc poser

$$\xi = \sin t \qquad \eta = \cos t$$

On aura donc :

$$\pm l \sin E_0 \pm l\frac{b''}{\delta}\tau = x_0 + x'\tau - \sin t$$
$$\pm l \cos E_0 \pm l\frac{c''}{\delta}\tau = y_0 + y'\tau - \cos t .$$

Posons : $m \sin M = x_0 \mp l \sin E_0$ $\qquad n \sin N = x' \mp l\frac{b''}{\delta}$
$m \cos M = y_0 \mp l \cos E_0$ $\qquad n \cos N = y' \mp l\frac{c''}{\delta}$

Mais on a aussi

$$\sin f = m \sin N + \tau . n \sin N$$
$$\cos f = m \cos N + \tau n \cos N$$

D'où

$$\sin (f - N) = m \sin (N - N)$$
$$\cos (f - N) = m \cos (N - N) + n\tau .$$

En posant donc

$$f = N + \chi$$

on aura

$$\sin \chi = m \sin (N - N)$$
$$\tau = - \frac{m \cos (N - N)}{n} - \frac{\cos \chi}{n} .$$

Ayant calculé τ on pourra déterminer φ et λ les point limite.

V. Courbe de l'éclipse centrale. - On dit qu'une éclipse de totale ou annulaire est centrale lorsque le centre apparent de la Lune coïncide avec celui du Soleil. Pour qu'à un moment donné il en soit ainsi pour un point de la surface terrestre il faut qu'en ce point à cet instant $\Delta = 0$ par le point de coord. de ce point satisfasse à la condition $\Delta = 0$ c'à d aux équations

$$x - \xi = 0 \qquad y - \eta = 0 .$$

En transposant, comme nous l'avons fait dans le premier chapitre, les équations en ξ, η, ζ, nous avons

$$\cos \varphi \sin \vartheta = \frac{\xi}{\rho} .$$
$$\sin \varphi \cos \vartheta = - \eta_1 \sin t_1 + \zeta_1 \cos t_1$$
$$\sin \varphi_1 = \eta_1 \cos t_1 + \zeta_1 \sin t_1$$

avec $\eta = \rho \eta_1 \qquad \xi^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1 .$

Si nous posons

$$\eta_1 = \frac{y}{\rho} \quad \text{ou} \quad y = \rho \eta_1$$

nous aurons d'abord:

$$\xi = x \qquad \eta_1 = \zeta_1$$

~~Nous pouvons poser~~

~~$\sin \varphi \sin \vartheta = x$~~

~~$\sin \varphi \cos \vartheta = y_1$~~

~~alors~~ ~~$\sin \varphi_1 = \lambda \sin \beta$~~

Si l'on pose:

$$\sin\beta \sin\lambda = x \qquad 0 < \beta < 90° \qquad 0 < \beta < 90°$$
$$\sin\beta \cos\lambda = y_1$$

on devra avoir

$$\xi_1 = \pm \cos\beta.$$

Mais, comme on doit avoir $\xi_1 > 0$, on prendra:

$$\xi_1 = \cos\beta.$$

Ensuite on aura

$$\xi_1 = \sqrt{1-y_1^2-\eta_1^2} = \sqrt{1-x^2-y_1^2} = \sqrt{(1-x-y_1)(1+x+y_1)}$$

où il faut prendre le signe +.

En posant donc:

$$c\sin C = y_1$$
$$c\cos C = \sqrt{(1-x-y_1)(1+x+y_1)} \quad \sqrt{1-x^2-y_1^2}.$$

les éq. précédentes donnent:

$$\cos\varphi \sin\theta = x$$
$$\cos\varphi \cos\theta = c\cos(C+\xi_1)$$
$$\sin\varphi = c\sin(C+\xi_1)$$

et permettent pour les coord. du point cherché

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{ty}{\sqrt{1-t^2}} \qquad z = \frac{1}{4}\varphi + \theta.$$

Point où l'éclipse centrale a lieu à midi. —

Parmi les points de la courbe précédente, c'est celui où l'on a $\frac{dz}{dt} = 0$ au moment considéré. On doit donc avoir $x = 0$ et par suite

$$c\sin C = y_1$$
$$c\cos C = \sqrt{1-y_1^2}$$

d'où

$$c = 1 \qquad \operatorname{tg} C = \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}}. \qquad -90° < C < +90°.$$

Pour chercher ce point, on calculera d'abord le temps correspondant à $x = 0$ par interpolation. Puis on prendra la valeur de y_1 qui correspond à cette époque; enfin on calculera φ_1 et θ par les formules:

$$\theta = 0 \qquad \varphi_1 = C + \xi_1$$

et par suite on aura

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(C+\xi_1)}{\sqrt{1-t^2}} \qquad z = \theta + \varphi.$$

Limites des temps. — Aux extrémités de la partie utile de la courbe de l'éclipse centrale, on doit avoir $\xi_1 = 0$ et par suite

$$x^2 + y_1^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y_1^2 = 1.$$

On peut donc poser

$$\sin\lambda = x \qquad \cos\lambda = y_1$$

Si l'on appelle (x), (y_1) les valeurs de x y au une époque déterminée T_0 les ~~mêmes~~ dérivées de ces quantités x' y_1'

à la même époque, on aura pour l'époque donnée
$T = T_0 + \tau$.

$$\sin f = (x) + x'\tau$$
$$\cos f = (y) + y'_1\tau.$$

En posant

$$m\sin M = (x) \qquad n\sin N = x'$$
$$m\cos M = (y_1) \qquad n\cos N = y'_1$$

on devra donc avoir :

$$\sin f = m\sin M + n\tau\sin N$$
$$\cos f = m\cos M + n\tau\cos N.$$

ou bien

$$\sin(f-N) = m\sin(M-N)$$
$$\cos(f-N) = m\cos(M-N) + n\tau.$$

D'où en posant

$$\sin\gamma = m\sin(M-N)$$

on aura $\qquad \gamma = N + \chi$

$$\tau = -\frac{m\cos(M-N)}{n} + \frac{\cos\chi}{n}.$$

Il y aura deux valeurs pour τ comme dans toutes les questions du même genre.

Quant aux valeurs de c C on a ici

$$c\sin C = \frac{\cos i}{\sin i} \qquad c\cos C = 0$$

D'où $\qquad c = \cot i \qquad C = 90°$ Car on est libre de prendre pour c la valeur du cot.

On aura donc ici :

$$\cos\varphi_1 \sin\theta = \sin t$$
$$\cos\varphi_1 \cos\theta = -\cos t \sin\Delta_1$$
$$\sin\varphi_1 = \cos t \cos i_1$$

On aura toujours $\varphi + L$ comme dans le cas général.

VII. Courbes limites de l'éclipse totale ou annulaire.

Pour construire cette courbe, on pourrait, à la rigueur, suivre la même marche que dans le paragraphe IV en prenant pour l la largeur du cône d'ombre au lieu de celle du cône de pénombre. Mais il est plus commode et plus exact de déduire chaque point de la courbe qui nous occupe de chaque point de celle de l'éclipse centrale. En effet, soient à un moment donné $\xi\eta$,

les coord. (modifiées) du point qui suit l'ellipse centrale, et soient $\xi + \Delta\xi$ et $\eta + \Delta\eta$ les valeurs des mêmes quantités pour le point qui, au même instant, subit un simple contact des deux lignes, sans que ces dernières soient ni avant ni après. Pour le point $\xi + \Delta\xi$, $\eta + \Delta\eta$, on devra avoir

$$Z - \lambda = 0 \qquad \& \quad Z' = 0$$

Z étant la longueur du cône d'ombre.

La première équation peut s'écrire.

$$(l - i\xi_1)\sin\theta = x - \xi - \Delta\xi.$$

$$(l - i\xi_1)\cos\theta = (y - \eta - \Delta\eta)\frac{1}{\rho_1}$$

en prenant $i\xi_1$ au lieu de $i\xi_0$ ce qui revient à négliger i^2. — Or on a d'après les définitions de ξ, η

$$x - \xi = 0 \qquad y_1 - \eta_1 = 0$$

On aura donc:

$$\Delta\xi = -(l - i\xi_1)\sin\theta$$

$$\Delta\eta = -\rho_1(l - i\xi_1)\cos\theta.$$

La quantité $l - i\xi_1$ étant la longueur du cône d'ombre est toujours très-petite, on peut donc prendre de dans les seconds membres une valeur approchée de θ. On pourra en outre supposer que le ξ_1 du point de la courbe considéré ait la même valeur que pour le point correspondant de la courbe de l'ellipse centrale. En appelant ξ_1 cette valeur et en posant

$$tg\theta' = \frac{\theta}{\theta}\xi_1$$

on aura d'après l'éq. $\varphi' = 0$

$$tg\left(\theta - \tfrac{1}{2}\xi\right) = tg\left(45° + \nu\right)\tfrac{1}{2}\xi.$$

En portant cette valeur approchée de θ ainsi que celle de ξ_1 dans les éq. précédentes, on aura des valeurs suffisamment approchées de $\Delta\xi, \Delta\eta$.

Voyons maintenant ~~les valeurs~~ quelle sont les quantités $\Delta\varphi$ et Δz qu'il faut ajouter aux coord. du point de l'ellipse centrale pour avoir celle du point de la courbe actuelle. Comme $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ sont très-petits, on pourra traiter ces quantités ainsi que $\Delta\varphi$ et Δz comme des différentielles.

Par conséquent en différentiant les éq. générales :

$$\cos\varphi \sin\theta = \xi.$$

$$\cos\varphi \cos\theta = -\eta \sin\zeta + \xi_1 \cos\zeta \qquad \sin\zeta$$

$$\sin\varphi = \eta \cos\zeta + \xi_1 \sin\zeta \qquad \cos\zeta$$

par rapport aux coord. du lieu, mais auparavant en remarquant que l'on a $d\theta = +d\lambda$.

$$\cos\varphi \cos\theta\, d\lambda - \sin\varphi \sin\theta\, d\varphi = d\xi. \qquad \left| -\eta_1 (\cos\theta \sin\zeta + \cos\varphi \cos\zeta) - \xi_1 \sin\zeta \right.$$

$$\cos\varphi \sin\theta\, d\lambda + \sin\varphi \cos\theta\, d\varphi = d\eta_1 \sin\zeta - d\zeta_1 \cos\zeta \qquad + \sin\zeta$$

$$\cos\varphi\, d\varphi = d\eta_1 \cos\zeta + d\zeta_1 \sin\zeta \qquad \cos\zeta$$

Des deux dernières éq. on tire d'abord :

$$\cos\varphi \sin\theta \overset{\pi}{\cos\zeta} \frac{d\lambda}{\pi} + (\sin\varphi \cos\theta \sin\zeta + \cos\varphi \cos\zeta)\, d\varphi = d\eta_1 \overset{(\sin\varphi \sin\theta)}{\cos}.$$

En résolvant cette éq. et la 1ère éq. précédente par rapport à $d\lambda$ et à $d\varphi$, et se rappelant que $\sin\varphi \sin\zeta + \cos\varphi \cos\zeta \cos\theta = \xi_1$, on a :

$$\xi_1 d\lambda = d\xi (\sin\varphi \sin\zeta \cos\theta + \cos\varphi \cos\zeta) + d\eta \sin\varphi \sin\theta.$$

$$\xi_1 d\varphi = -d\xi \sin\zeta \sin\theta + d\eta \cos\theta.$$

Remplaçons pour $d\xi$ et $d\eta$ leurs valeurs précédentes et négligeons dans $d\eta$ la différence $1-\rho$, alors il vient :

$$d\lambda = -\frac{\xi - \xi_1}{\xi_1} (\sin\zeta \cos\theta \sin\zeta + \cos\theta) \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} \theta - \frac{(\xi-\xi_1)^2}{\xi_1} \cos\zeta \sin\zeta$$

$$d\varphi = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_1} (\sin\zeta \sin\theta \sin\zeta \cos\theta + \cos\theta \cos\zeta).$$

Posons :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\xi - \xi_1}{\xi_1 \sin 1'} = \dfrac{\xi}{\xi_1 \sin 1'} - \dfrac{1}{\sin 1'}. \\ k \sin H = \cos\zeta \\ k \cos H = \sin\zeta \cos\zeta. \end{cases}$$

On aura alors en remarquant que $d\varphi$ et $d\varphi_1$ ne diffèrent pas sensiblement l'un de l'autre et en exprimant $d\varphi$ et $d\lambda$ en minutes d'arc :

$$\begin{cases} d\lambda = -\lambda \{ k \cos(\theta - H) \sec\varphi + \cos\zeta \sin\zeta \}. \\ d\varphi = \lambda k \sin(\theta - H) \end{cases}$$

Remarquons que les deux valeurs de ζ données par l'éq. précédente diffèrent entre eux de 180°, et comme $d\lambda$ et $d\varphi$ sont linéaires et homogènes en $\sin\zeta$ et $\cos\zeta$, on aura pour ces quantités deux systèmes de valeurs égales et de signes contraires.

III. Prédiction d'une éclipse de Soleil. Détermination de la longitude.

I. Prédiction des principales phases d'une éclipse de Soleil pour un lieu donné de la surface terrestre. — Ce que nous appelons principales phases d'une éclipse, c'est 1° le commencement et la fin de l'eclipse en général, 2° le commencement et la fin de l'éclipse totale ou annulaire s'il y en a. 3° le maximum de l'eclipse.

Occupons-nous d'abord des trois premières espèces de phases. A l'époque T d'une de ces phases, on doit avoir,

$$(L-i')\sin\lambda = x-\xi.$$
$$(L-i')\cos\lambda = y-\eta$$

L étant la largeur du cône de pénombre ou d'ombre. Soit

$$T = T_1 + \tau$$

Soient x, y, ξ, η, i' les valeurs de ces quantités à l'époque T_1 et x', y', ξ', η', i' leurs variations dans l'unité de temps. En négligeant la variation de i' (L-i') dans les 24 heures, les équations deviendront

$$(L-i')\sin\lambda = x + x'\tau - (\xi + \xi'\tau)$$
$$(L-i')\cos\lambda = y + y'\tau - (\eta + \eta'\tau).$$

ou en posant comme d'habitude $\zeta = L - i'$.

$$\zeta\sin\lambda = x - \xi + (x' - \xi')\tau$$
$$\zeta\cos\lambda = y - \eta + (y' - \eta')\tau.$$

Posons.

$$m\sin M = x - \xi \qquad n\sin N = x' - \xi'$$
$$m\cos M = y - \eta \qquad n\cos N = y' - \eta'.$$

Alors.

$$\zeta\sin\lambda = m\sin M + n\tau\sin N$$
$$\zeta\cos\lambda = m\cos M + n\tau\cos N$$

d'où

$$\zeta\sin(\lambda - N) = m\sin(M - N)$$
$$\zeta\cos(\lambda - N) = m\cos(M - N) + n\tau.$$

En posant donc.

$$\zeta\gamma = \frac{m\sin(M-N)}{\zeta}$$

On aura

$$Q - N = \gamma \qquad \text{ou} \qquad Q = N + \gamma$$

$$\tau = -\frac{n\cos(\gamma - N)}{n'} + \frac{\pi \cos\gamma}{n'}.$$

Ces équations feront connaître γ et τ quand on aura commencé par N. Il nous reste à calculer auxiliairement ξ, η, ξ', η'. Nous avons :

$$\xi = \rho\sin\varphi' \sin\theta$$
$$\eta = \rho\sin\varphi'\cos\theta - \rho\cos\varphi' \sin\Omega\cos i$$
$$\zeta = \rho\sin\varphi'\cos\theta + \rho\cos\varphi'\cos\Omega\cos i.$$

et

$$\xi' = \mu'(-y\sin\Omega + x\cos\Omega)$$
$$\eta' = \mu' z\sin i - k'\xi.$$

En posant

$$A\sin B = \rho\sin\varphi'$$
$$A\cos B = \rho\cos\varphi'\cos\theta.$$

on aura :

$$\xi = \rho\cos\varphi'\sin\theta.$$
$$\eta = A\sin(B - \Omega)$$
$$\zeta = A\cos(B - \Omega)$$

Ensuite en négligeant la quantité insensible $d\gamma$.

$$\xi' = \mu'\rho\cos\varphi'\cos\theta = \mu' A\cos B$$
$$\eta' = \mu' z\sin i.$$

On peut ainsi calculer $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta'$ et par suite τ.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que $\Delta\alpha$ n'est ici qu'une première approximation. On doit donc recommencer le calcul en prenant pour Ω la valeur approchée de τ.

Cherchons maintenant l'époque du maximum de l'éclipse. C'est l'instant où l'on a $\tau - \Delta =$ maximum. Or, puisque nous négligeons la variation de π, nous pouvons prendre tout bonnement la condition $\Delta =$ minim.

En adoptant la même notation que précédemment, on a.

$$\Delta\sin\delta = m\sin\mathfrak{M} + n\sin N.$$
$$\Delta\cos\delta = m\cos\mathfrak{M} + n\cos N$$

ou bien en posant $m\sin\mathfrak{M} = \gamma$

$$\gamma = \delta - N$$

$$A\sin\chi = m\sin(N-N)$$
$$A\cos\chi = m\cos(N-N) + n\tau.$$

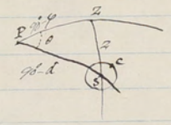
J'ai

$$A^2 = m^2\sin^2(N-N) + [m\cos(N-N) + n\tau]^2$$

Le premier terme étant constant, A^2 sera min. quand le second terme sera nul; ce qui donne.

$$\tau = -\frac{m\cos(N-N)}{n}$$

Angle de position du point de contact. - Nous avons déjà dit que l'angle Q est l'angle de position du point de contact par rapport au centre du Soleil, angle compté depuis le Nord vers l'Est. Cet angle est celui dont on a besoin quand on observe avec un équatorial. Mais quand on observe avec un instrument muni d'altazimutalement, il importe de connaître aussi l'angle de position compté depuis le Zénith de la ligne du Soleil.



Soient, Z, Z le pôle Nord et le Zénith, S le centre du Soleil, C le point de contact. L'angle Q, c'est l'angle ZSA PSC et l'angle P que il nous faut c'est l'angle ZSC. Or en appelant π l'angle parallactique du point S, il est facile de voir que l'on a dans tous les cas, que π soit positif ou négatif:

$$P = Q - \pi.$$

Or en prenant pour le point S le point Z on tire du triangle sphérique céleste, on a:

$$\sin Z\sin\pi = \cos\varphi\sin D$$
$$\sin Z\cos\pi = \sin\varphi\cos d - \cos\varphi\sin d\cos D.$$

Mais les seconds membres sont approximativement égaux à ξ et η respectivement; on aura donc:

$$\sin Z\sin\pi = \xi + \xi'\tau.$$
$$\sin Z\cos\pi = \eta + \eta'\tau.$$

On aura par ces formules non-seulement π mais encore Z. Ensuite on aura

$$P = Q - \pi = N + \chi - \pi.$$

Passons maintenant au calcul du degré d'obscurité.

Degré d'obscurité maximum. — Nous avons dit que le degré d'obscurité a pour valeur :

$$D = \frac{Z - A}{Z + Z_1}$$

Or on a :

$$Z = 2\,\text{tgf} + R\sec f - \tfrac{1}{2}\,\text{tgf}$$
$$Z_1 = 2\,\text{tgf}_0 - R\sec f_1 - \tfrac{1}{2}\,\text{tgf}_0$$

avec

$$\text{tgf} = \frac{x - x_0}{r\,g} + \frac{R\sin\Pi_0}{r\,g}$$
$$\text{tgf}_1 = \frac{x - x_0}{r\,g} - \frac{R\sin\Pi_0}{r\,g}$$

En négligeant la différence de tgf et tgf_1 on aura :

$$Z + Z_1 = 2(Z - R\sec f).$$

ou en négligeant la diff. $\sec f - 1$ qui est du 2e ordre

$$Z + Z_1 = 2(Z - R).$$

On aura donc approximativement :

$$D = \frac{Z - A}{2(Z + - R)}.$$

Nous avons posé précédemment

$$\sin\chi = \frac{m\sin(Z - N)}{z}$$

et dans le cas du maximum de l'éclipse on a

$$A = \pm\, m\sin(Z - N)$$

on aura donc :

$$D = \frac{\text{ou } z(1 \mp \sin\chi)}{2(Z - R)}.$$

On peut même prendre $z = 1$, alors en posant :

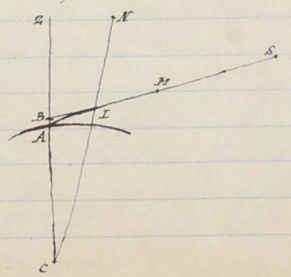
$$\varepsilon = \frac{1}{2(Z - R)}$$

on aura :

$$D = \varepsilon(1 \mp \sin\chi)$$

en prenant — ou + suivant que χ est + ou —.

Corrections de parallaxe dues à la réfraction et à l'altitude du lieu d'observation de l'horizon. — 1° Soient S et Z le point du bord solaire et zénith qui à un instant semblent être en contact. Comme les rayons lumineux partant de S et Z, se réfractent à partir du point I où ils pénètrent l'atmosphère et arrivent en A



suivant une courbe ; si l'atmosphère n'existait pas les deux points ne coïncideraient pas en contact.
Or si nous prolongeons la droite HI jusqu'à sa rencontre en B avec la normale CA, on voit du point B au même instant le contact des deux points s'il n'y avait pas d'atmosphère. Donc le moment du contact actuel pour le point A est le même que le moment théorique du contact en B. Pour calculer ~~la~~ une phase actuelle pour le point A, il suffit donc d'augmenter le rayon vecteur du point A de la quantité AB que nous appellerons z. Or en appelant r la longueur CI, i l'angle HIN, i' l'angle IBZ, on a :

$$(\rho + z)\,n\,2\pi Z' = r\,n\,i.$$

Or d'après la formule fondamentale de la réfraction on a, en appelant μ l'indice de réfraction au point I,

$$\mu r\,n\,i = \text{const.}$$

Donc en appelant μ_0 l'indice au point A et en remarquant que pour $\frac{\mu r}{I}$ on a $\mu = 1$:

$$r\,n\,i = \rho\mu_0\,n\,i'$$

Donc :

$$(\rho + z)\,n\,2\pi Z' = \mu_0\rho\,n\,i'\,2\pi$$

D'où

$$1 + \frac{z}{\rho} = \frac{\mu_0\, n\, i'}{n\, 2\pi}$$

On peut prendre pour μ_0 sa valeur moyenne et pour i' la distance zénithale vraie. On a ainsi construit une table donnant le logarithme de $(1 + \frac{z}{\rho})$ en fonction de i'. On devra ajouter ce logarithme au logarithme de ρ et par suite à ceux de δ, δ_1 et δ_2.

2° Quand le lieu d'observation est élevé de s au-dessus du niveau de la mer, il faudra ajouter au même quantité une correction analogue $\log(1 + \frac{s}{\rho})$ ou approximativement $n\frac{s}{\rho}$ où n désigne le module des logarithmes à base décimale.

En prenant pour ρ sa valeur moyenne et prenant le mètre pour l'unité de longueur, on aura pour

l'expression numérique de cette correction :

$$0{,}00000064\,\Delta\lambda.$$

Les deux corrections précédentes devront s'appliquer aussi pour la détermination de la longitude.

II. Détermination de la longitude par l'observation d'une éclipse. — On en tire de la sorte toujours dont on connaît une valeur approchée de la longitude, on observe une phase bien déterminée d'une éclipse de Soleil en un instant dont on détermine le temps moyen local. On se demande d'en déduire la correction à apporter à la longitude approchée pour obtenir la longitude exacte.

Soit λ et $\lambda+\Delta\lambda$ la longitude approchée et la longitude exacte ; t le temps local moyen de Paris. Alors le temps moyen T de Greenwich correspondant à l'instant considéré sera

$$T = t - \lambda - \Delta\lambda.$$

Posons :

$$T_0 = t - \lambda.$$

alors :

$$T = T_0 - \Delta\lambda.$$

En appelant x, y, z et x', y', z' les valeurs de ces quantités pour l'époque T_0, on aura aussi :

$$\Delta\cos\Omega = x_0 - x - (x' - x')\Delta\lambda$$

$$\Delta\cos\Omega = y_0 - y - (y' - y')\Delta\lambda.$$

En posant comme d'habitude

$$m\sin M = x_0 - x \qquad n\sin N = x' - x'$$

$$m\cos M = y_0 - y \qquad n\cos N = y' - y'.$$

nous aurons :

$$\Delta\sin\Omega = m\sin M - n\sin N.\Delta\lambda$$

$$\Delta\cos\Omega = m\cos M - n\cos N.\Delta\lambda.$$

D'où

$$\Delta\sin(\Omega - N) = m\sin(M - N)$$

$$\Delta\cos(\Omega - N) = m\cos(M - N) - n\Delta\lambda.$$

En posant

$$\Omega - N = \chi$$

on aura donc :

$$\Delta\sin\chi = \frac{m\sin(M - N)}{A}.$$

$$\Delta\tilde{z} = + \frac{m}{n}\frac{\sin(N-N)}{\sin 1''} - \frac{z'\cos x}{n}.$$

On prendra le dernier terme + ou − suivant que c'est la fin ou le commencement de l'éclipse qu'on a observée.

On peut donner à cette dernière formule une autre forme en remplaçant z par $\frac{m\sin(N-N)}{\sin 1''}$; alors :

$$\Delta\tilde{z} = \frac{m}{n}\frac{1}{\sin 1''}\left\{z'\cos(N-N) - \cos x\sin(N-N)\right\}.$$

ou bien :

$$\Delta\tilde{z} = \frac{m\sin(x-N+N)}{n\sin 1''}.$$

Cette dernière forme est plus commode, excepté lorsque l'angle x est voisin de 0° ou de 180°.

Remarquons que dans le calcul de m et N, $\frac{z'}{n}$ et $\frac{1}{n}$ peuvent le plus souvent être négligés parce que $\Delta\tilde{z}$ est suffisamment petit.

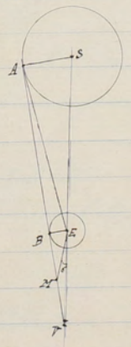
IV. De l'Eclipse de Lune.-

I. Condition de possibilité d'une éclipse de Lune.-

Une éclipse de Lune ne produit toutes les fois que le disque apparent de la Lune et le contour apparent de l'ombre portée de la Terre s'empiètent l'un sur l'autre. Or l'axe du cône d'ombre de la Terre a sensiblement le même mouvement que le rayon vecteur du Soleil. Donc en se reportant à ce que nous avons dit dans le chapitre I, on aura pour le minimum Σ de la distance angulaire des centres de la Lune et de l'axe du cône d'ombre terrestre :

$$\Sigma = \lambda_0 \cos I'$$

λ_0 étant ici la latitude de la Lune au moment de son opposition avec le Soleil et I' ayant la même signification que dans le chapitre cité. Pour que il y ait éclipse de Lune, il faut et il suffit que cette quantité Σ soit plus petite que la demi-bissectrice apparente de la section du cône d'ombre fait de π à la distance de la Lune, cette section étant supposée vue du centre de la Terre.



Soient S, E les centres du Soleil et de la Terre, AB une génératrice du cône d'ombre, π la position de la Lune.

On a d'abord :

$$\sigma = \pi E x = E\hat{A}B - E\hat{T}B.$$

Or on peut supposer sensiblement que la tangente menée de π à la sphère solaire la touche au même point que la tangente EA. On aura donc :

$$E\hat{T}S = \hat{\pi} SEA - EAB.$$

Donc :

$$\sigma = E\hat{x}B - SEA + EAB.$$

ou bien $$\sigma = \varpi - \varpi' + \varpi'$$

La condition de possibilité est donc :

$$\lambda_0 \cos I' < \varpi - \varpi' + \varpi' + \gamma.$$

Mais l'observation démontre que la présence de l'atmosphère

terrestre a le même effet sur l'éclipse de lune que si le cône d'ombre de la terre était plus grand de $\frac{1}{50}$ de sa valeur théorique. Il nous faut donc prendre

$$\rho_0 \cos\varepsilon' < \frac{51}{50}(\pi - \sigma + \pi_1) + \sigma.$$

En prenant les valeurs extrêmes, on constate que si

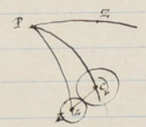
$$\rho_0 > 63'53''$$

l'éclipse est impossible ; et qu'elle est certaine si l'on a

$$\rho_0 < 52'4''$$

Entre ces deux limites, l'éclipse sera douteuse et il faudra examiner avec les valeurs actuelles des quantités qui entrent dans l'inégalité précédente.

II. Equations de l'éclipse de lune. — On pourrait faire une théorie de l'éclipse de lune en la regardant comme une éclipse de soleil produite par la Terre pour un observateur placé sur la lune. Mais il est beaucoup plus facile de traiter la question directement.



Soit L C le point où la droite ST, ou le cône d'ombre terrestre perce la sphère céleste menée du centre de la terre comme centre. Soit L' le lieu géocentrique de la lune.

Appelons Δ la distance angulaire des points L et C au moment d'une phase déterminée de l'éclipse de lune par exemple au moment du premier contact extérieur.

En remarquant que l'ascension droite du point C est égale à $\alpha' \pm 180°$ et sa déclinaison $= -\delta'$, on aura, en appelant Ω l'angle PCL' :

$$\sin\Delta \sin\Omega = \cos\delta \sin(\alpha' \pm 180 - \alpha)$$

$$\sin\Delta \cos\Omega = \sin\delta \cos\delta' + \cos\delta \sin\delta' \cos(\alpha' \pm 180 - \alpha).$$

Mais on a :

$$CL' = \pm(\alpha' \pm 180 - \alpha) = \mp(\alpha - \alpha' \mp 180).$$

Donc en comptant l'angle Ω du Nord vers l'Est de 0 à 360° on aura dans tous les cas :

$$\sin\Delta \sin\Omega = \cos\delta \sin(\alpha - \alpha')$$

$$\sin\Delta \cos\Omega = \sin\delta \cos\delta' - \cos\delta \sin\delta' \cos(\alpha - \alpha').$$

Maintenant il est facile de voir que l'on a :

$\Delta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}(\varpi + \varepsilon + \overline{\varpi}') + \varepsilon$ pour les contacts ext. avec la pénombre.

$\Delta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}(\varpi - \varepsilon + \overline{\varpi}) + \varepsilon$ pour les contacts ext. avec l'ombre

$\Delta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}(\varpi + \varepsilon + \overline{\varpi}') - \varepsilon$ pour les contacts int. avec la pénombre

$\Delta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}(\varpi - \varepsilon + \overline{\varpi}') - \varepsilon$ pour les contacts int. avec l'ombre.

Dans tous les cas on peut prendre approximativement pour ϖ la valeur pour la latitude 45°

La quantité Δ étant fort petite, les éq. précédentes pourront s'écrire sans erreur sensible, en appelant α l'arc. dont la tangente $= \Delta \cos\delta$ et ayant $\zeta = \alpha \pm 180°$.

$$\Delta \overset{\text{sin}\delta}{=} (\alpha - \alpha_1)\cos\delta$$

$$\Delta \cos\delta = \sin(\alpha + \delta) - \sin 2\delta \sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha_1)$$

on en posant

$$\varepsilon = \frac{\sin 2\delta \sin^2\frac{1}{2}(\alpha - \alpha_1)}{\sin 1''}$$

$$x = (\alpha - \alpha_1)\cos\delta$$

$$y = \alpha + \delta - \varepsilon$$

on aura enfin

$$\Delta \sin\Omega = x$$

$$\Delta \cos\Omega = y.$$

III. *Prédictions des phases de l'éclipse de lune.* — Soient x_0 y_0 x' y' les valeurs des x et y obtenues pour un instant déterminé T_0 et soit $T = T_0 + \tau$ l'époque d'une phase demandée. On aura:

$$\Delta \sin\Omega = x_0 + x'\tau$$

$$\Delta \cos\Omega = y_0 + y'\tau$$

En posant

$$m \sin N = x_0 \qquad n \sin N = x'$$

$$m \cos N = y_0 \qquad n \cos N = y'.$$

On aura alors les formules:

$$\sin(\Omega - N) = \frac{m \sin(\Omega - N)}{n}$$

$$\Omega = N + \chi$$

$$\tau = -\frac{m\cos(\Omega - N)}{n} + \frac{\Delta \cos\chi}{n}.$$

qui permettent de déterminer Ω et τ.

L'angle de position du point de contact sera égal à Ω pour le point extérieur et à $\Omega \pm 180°$ pour le point intérieur sensiblement π

$$\theta = \Omega \pm 180° = N + \chi \pm 180°$$

L'instant du maximum d'éclipse sera avec.

$$D_1 = \frac{m \cos(Z-N)}{n}$$

et le minimum de la distance que j'appelle Δ_1 sera

$$\Delta_1 = \pm m \sin(Z-N).$$

Le degré d'obscurité sera évidemment:

$$D = \frac{\Delta - \Delta_1}{2s}.$$

s étant la largeur du cône d'ombre.

Si l'on veut avoir l'angle de position compté à partir du sommet de la ligne linéaire, il faudra calculer l'angle parallactique et le faire à l'aide du procédé ordinaire.

V. Occultation des étoiles fixes.

I. Préliminaires. — La théorie des occultations des étoiles fixes par la lune se déduit de celle de l'éclipse de Soleil en substituant aux coordonnées du Soleil celles de l'étoile occultée et en réduisant à zéro la parallaxe du Soleil. Il en résulte d'abord que la quantité b est nulle et que le angle α est δ se réduisant à α' et δ'. Ensuite le cône de pénombre disparaît et le cône d'ombre se réduit à un cylindre d'ombre dont la section droite a pour rayon la constante k. Pour les coordonnées x, y, z, x', y' leurs valeurs ne se simplifient pas beaucoup. On les obtiendra en remplaçant partout α par α' et δ par δ'. Entre autre, la valeur de x au moment de la conjonction en ascension droite sera égale à $k\sec\omega$.

Comme il y a chaque année un grand nombre d'étoiles occultées, il est impossible de construire une carte pour chaque occultation. On se contente d'indiquer dans les almanacs les lieux ~~latitudes~~ limites des latitudes pour lesquelles l'occultation est visible : on les appelle latitudes limites. Nous supposerons d'abord connu comment on peut déterminer ces latitudes limites et nous passerons ensuite à la prédiction et à la détermination de la longitude.

II. Latitudes limites. — Pour un point situé sur la courbe des limites nord et sud de l'occultation, la valeur minimum de la distance Δ de ce point à l'axe du cylindre d'ombre doit être égale au rayon constant k de ce cylindre. Parmi tous les points qui satisfont à cette condition nous devons prendre ceux dont la latitude est maximum ou minimum. Or en appelant x, y, z, x', y' les valeurs de ces quantités à une époque déterminée T_0 et posant

$$m\sin Z = x - x' \qquad n\sin N = x - x'$$
$$m\cos Z = y - y' \qquad n\cos N = y - y'$$

nous aurons pour le minimum de la quantité Δ

$$\Delta = \pm m\sin(Z - N).$$

La condition pour que le point $x_1 y_1$ soit situé sur la courbe des points limites est donc:

$$m \sin N (x - x') = \pm R$$

ou bien développant et en remplaçant $\sin N$ et $\cos N$ par leurs valeurs:

$$(x - x_1) \cos N - (y - y_1) \sin N = \pm R.$$

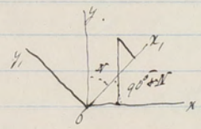
Pour le but que nous proposons il suffit de supposer ~~x et y voisins~~ x_1 et y_1 nuls, donc:

$$n \sin N = x'$$

$$n \cos N = y'.$$

n et N sont ainsi deux grandeurs que l'on peut calculer à priori.

Pour simplifier notre équation de condition, prenons le système d'axes ox oy dans son plan de l'angle $90° - N$ dans le sens de ox vers oy. Appelons $x_1 y_1$ z_1 η_1 les coordonnées du centre de la sphère et du lieu d'observation par rapport au nouveau système d'axes. On aura:



$$x = + x_1 \sin N - y_1 \cos N \quad \cdot \cos N$$
$$y = - x_1 \cos N + y_1 \sin N \quad \cdot \sin N$$
$$z = z_1 \sin N - y_1 \cos N \quad \cdot \cos N$$
$$\eta = z_1 \cos N + y_1 \sin N \quad \cdot \sin N$$

et réciproquement:

$$x_1 = x \sin N + y \cos N \qquad z_1 = z \sin N + \eta \cos N$$
$$y_1 = - x \cos N + y \sin N \qquad \eta = - z \cos N + \eta \sin N.$$

L'équation de condition devient alors:

$$(1) \qquad - y_1 + y_1 = \pm R \qquad \text{ou} \qquad y_1 = y \pm R.$$

Maintenant, si nous négligeons l'aplatissement de la Terre, nous aurons d'après l'expression générale de $\Delta \varphi$,

$$\sin \varphi = \eta \cos \varphi + \zeta \sin \varphi.$$

et

$$z^2 + \eta^2 + \zeta^2 = L.$$

ou bien en introduisant les nouvelles coordonnées:

$$\sin \varphi = z_1 \sin N \cos \varphi + \eta_1 \cos N \cos \varphi + \zeta \sin \varphi.$$

avec

$$z_1^2 + \eta_1^2 + \zeta^2 = L.$$

Nous pouvons poser d'après cette dernière éq.

$$\cos t = \eta,$$
$$\sin t \sin \varepsilon = \zeta,$$
$$\sin t \cos \varepsilon = \xi,$$

équations dans lesquelles nous savons être la grandeur $\sin t > 0$.
Alors.

$$\sin \varphi = \sin t \cos \varepsilon \sin \lambda \cos \beta + \cos t \sin \beta + \sin t \sin \varepsilon \cos \beta \cos \lambda.$$

Posons maintenant

$$\sin \beta = \sin N \cos \beta'$$
$$\cos \beta \cos \lambda = \cos N \cos \beta'$$
$$\cos \beta \sin \lambda = \sin \beta'$$

si nous prendrons $\cos \beta > 0$. Nous aurons alors.

$$(2) \qquad \sin \varphi = \sin \beta \cos t + \cos \beta \sin t \cos (\lambda - \varepsilon).$$

C'est là une expression générale de la latitude d'un lieu quelconque. Mais si ce lieu satisfait à la condition (1), η est une constante ; il en est donc de même de t. D'ailleurs $\beta \lambda$ sont des constantes. Donc dans le second membre de l'éq (2) il n'y a de variable que l'angle λ. $\sin \varphi$ sera donc maximum ou minimum pour $\cos(\lambda - \varepsilon) = \pm 1$. Par suite les valeurs extrêmes de φ seront

$$\sin \varphi = \sin (\beta \pm t).$$

En prenant le plus grand des deux angles compris entre $-90°$ et $+90°$ qui satisfont à cette éq. on aura la latitude limite du Nord et en prenant le plus petit on aura la limite Sud.

Pour que l'occultation soit visible de l'une de ces limites, il faut qu'on ait aussi $\zeta > 0$, ~~et~~ par suite $\sin \varepsilon > 0$, ~~et comme~~ Dans le cas où l'on a $\lambda - \varepsilon = 0$, il faut donc que $\sin t > 0$ et par suite $t > 0$. Dans le cas où $\lambda - \varepsilon = 180°$ il faut que $\sin t < 0$ et par suite $t < 0$. Donc ~~Dans~~ Dans le cas où la déclinaison de l'étoile est positive, (on aura l'une des limites)
les deux limites ont trouvées seulement par

$$\sin \varphi = \sin (\beta + t)$$

et dans le cas où t est négative, la limite est

$$\sin \varphi = \sin (\beta - t).$$

Pour trouver l'autre limite, il faut faire dans l'expression

de sinφ $\zeta = 0$ et par suite ~~$\xi = 0$. et~~ $x\xi = 0$ et $\cos\varepsilon = \pm\lambda$, ce qui donne

$$\sin\varphi = \sin(N \pm f)\cos\delta'.$$

Récapitulons maintenant le procédé des calculs.

On choisit une époque arbitraire T_0, soit celle de la conjonction en ascension droite et l'on calcule alors pour cette époque x, ~~y~~ z ~~et~~ x y x' y' et N (si c'est l'époque de conjonction on a $x = 0$), ensuite on a

$$y_1 = y_0 \pm x = -x\cos N + y\sin N \pm R$$

On calcule ensuite ρ et τ par les éq.

$$\sin\rho = \sin N \cos\delta' \qquad (-90° < B < +90°)$$
$$\cos\tau = y_1 \qquad (\tau < 180°).$$

On prend alors pour les limites cherchées

$$\sin\varphi = \sin(B \pm \tau)$$

et

$$\sin\varphi = \sin(N \pm f)\cos\delta'.$$

Quand l'angle τ est imaginaire, il est évident que l'une des deux limites n'existent plus et l'occultation sera visible jusqu'au pôle Nord ou Sud.

III. *Prédiction pour un lieu donné.* – On calcule le temps d'une occultation pour être préparé à l'observer, on n'a donc pas besoin d'une grande précision dans le résultat. Il suffit généralement de supposer que α' et la déclinaison de la lune varient uniformément avec le temps. – Prenons pour l'origine des temps le moment où la lune est en conjonction vraie avec l'étoile ou aussi soit à ce moment, x est évidemment nul et pour y, il suffit de prendre

$$y_0 = \frac{\delta - \delta'}{\omega}.$$

Quant aux variations x' y' on aura simplement:

$$x' = \frac{\Delta\alpha}{\omega}\cos\delta \qquad y' = \frac{\Delta\delta}{\omega}$$

$\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ désignant les variations horaires de α et δ.

Quant à z y_1 z' et y'_1, on les calculera par les formules:

$$A\sin B = \rho\sin\varphi' \qquad z = \rho\cos\varphi\sin b$$
$$A\cos B = \rho\cos\varphi'\cos\delta. \qquad y_1 = A\sin(B - \delta');$$
$$z' = \mu' A\cos B \qquad y'_1 = \mu' z\sin\delta'$$

et pour la valeur de μ' qui est ici la variation de l'angle horaire de l'étoile fixe, on aura constamment

$$\mu' = 15 \times 60 \times 60 \times (1+\varepsilon)\ 2\pi'' = 54147{,}85\ 2\pi''$$

$1+\varepsilon$ étant le rapport du jour solaire moyen au jour sidéral. et par suite pour le logμ'

$$\log\mu' = 1{,}41916.$$

On peut maintenant résoudre notre question par le procédé habituel. Posons en effet.

$$m \sin Z = -\xi. \qquad n \sin N = x_0' - \xi'$$
$$m \cos Z = y_0 - \eta \qquad n \cos N = y' - \eta'.$$

On devra alors avoir:

$$\rho \sin\theta = m \sin Z + n \sin N.\ \tau.$$
$$\rho \cos\theta = m \cos Z + n \cos N.\ \tau.$$

ou bien

$$\rho \sin(\theta - N) = m \sin(Z - N)$$
$$\rho \cos(\theta - N) = m \cos(Z - N). + n\tau.$$

Si donc on pose

$$\tan\gamma = \frac{m \sin(Z-N)}{n}$$

on aura $\qquad \theta = N + \gamma$

$$\tau = -\frac{m \cos(Z-N)}{n} + \frac{\rho \cos\gamma}{n}$$

θ ayant la signification habituelle.

L'angle de position du point d'entrée ou de sortie par rapport au centre de la lune sera évidemment égal à $\theta \pm 180°$ c'est à dire à $N + \gamma \pm 180°$.

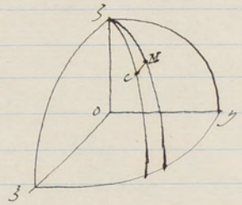
IV. Détermination de la longitude. — La détermination de la longitude par l'observation d'une occultation se fera exactement de la même façon que dans le cas d'une éclipse de Soleil en remplaçant simplement x par x_0.

Ajoutons que la connaissance des temps donne chaque année pour toutes les étoiles occultées au dessus de la 6e grandeur et pour l'époque de la conjonction en ascension droite le temps moyen de Paris de h, l'angle horaire H_0 de l'étoile (γ); et les grandeurs x_0, x' y' x'' y'' qu'on désigne par x_0' p' q' p'' q''. — Ces grandeurs facilitent considérablement la résolution des deux dernières questions que nous avons traitées.

VI. Occultation des planètes.

Si la ligne d'une planète était circulaire et uniformément illuminé, l'occultation de cette planète serait exactement le même phénomène qu'une éclipse de Soleil, tel est à peu près le cas de Mars en opposition. Mais en général, le corps de la planète est aplati à ses deux pôles et le bord ou ligne n'est que partiellement illuminé par le Soleil. De sorte l'on a ici affaire à un disque dont le contour se compose de la réunion de deux arcs d'ellipse. Nous allons d'abord étudier la forme de ces ellipses en suivant à peu près la méthode de Clairaut.

I. Forme du disque d'une planète aplatie. — Par l'œil de l'observateur O, menons trois axes rectangulaires OX, OY, OZ dont l'un OZ soit parallèle à l'axe de figure de la planète considérée. Soient C et M les points où se projettent sur la sphère céleste le centre de la planète et un des points de sa surface; soient φ, δ et φ', δ' les coordonnées sphériques de ces deux points respectifs. Désignons par s la distance angulaire des points C et M et par ω l'angle de position du point M par rapport au point C compté à partir de l'arc CS dans le sens habituel; appelons u et v les coordonnées rectangulaires du point M par rapport à l'arc CS et à l'arc perpendiculaire mené dans le sens d'angle de position égal à 90°, c'à.d. posons:



$$u = s' \sin\omega \qquad v = s' \cos\omega .$$

Comme s' est un petit arc, on pourra prendre au $\frac{\sin s'}{\cos s''}$ au lieu de s' et par suite on aura:

$$u = \frac{\cos\delta' \sin\omega}{\cos s''} \qquad v = \frac{\sin s' \cos\omega}{\cos s''}$$

Mais on a évidemment:

$$\cos s' \sin\omega = \cos\delta' \sin(\varphi' - \varphi)$$

$$\cos s' \cos\omega = \cos\delta \cos\delta' - \cos\delta \sin\delta' \cos(\varphi' - \varphi).$$

Maintenant, menons par le centre de la planète trois axes respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz, soit $\xi\eta\zeta$ par rapport à la première système xyz les coord. du point qui se projette en O, soit aussi $\xi_1\eta_1\zeta_1$ les coord. du centre de la planète par rapport aux anciens axes Ox, Oy, Oz. En appelant ρ et ρ' les distances du centre de la planète et du point considéré de sa surface à l'axe de l'observateur, nous aurons:

$$\rho'\cos\theta'\cos\varphi' = x + \xi.$$
$$\rho'\cos\theta'\sin\varphi' = y + \eta$$
$$\rho'\sin\theta' = z + \zeta.$$

et comme on a évidemment

$$\xi = \rho\cos\theta\cos\varphi \qquad \eta = \rho\cos\theta\sin\varphi \qquad \zeta = \rho\sin\theta$$

nous aurons:

$$\rho'\cos\theta'\cos\varphi' = \rho\cos\theta\cos\varphi + x \qquad -\sin\varphi \qquad \cos\varphi$$
$$\rho'\cos\theta'\sin\varphi' = \rho\cos\theta\sin\varphi + y \qquad +\cos\varphi \qquad \sin\varphi.$$
$$\rho'\sin\theta' = \rho\sin\theta + z.$$

D'où en bien

$$\rho'\cos\theta'\sin(\varphi'-\varphi) = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$
$$\rho'\cos\theta'\cos(\varphi'-\varphi) = \rho\cos\theta + x\cos\varphi + y\sin\varphi \qquad -\sin\theta\sin\theta$$
$$\rho'\sin\theta' = \rho\sin\theta + z. \qquad \cos\theta\cos$$

On a donc:

$$\cos\theta\sin(\varphi'-\varphi) = \frac{1}{\rho'}(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$
$$\cos\theta'\cos\theta - \cos\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi) = -\frac{1}{\rho'}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\theta + \frac{z}{\rho'}\cos\theta.$$

En portant ces valeurs dans les éq. précédentes et négligeant la différence entre ρ et ρ' qui est très-petite, il vient:

$$(1)\quad \begin{cases} u\sin i = \frac{1}{\rho'}(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) \\ u\cos i\,\sin\theta = -\frac{1}{\rho'}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\cos\theta\sin\theta + \frac{z}{\rho'}\cos^2\theta. \end{cases}$$

Telles sont les expressions des coord. u et v d'un point quelconque de la ligne planétaire en fonction des coord. polaires ρ, θ, φ du centre de la planète et des coord. $x\,y\,z$ du point considéré par rapport à ce centre.

Si maintenant nous appelons a le rayon équatorial de la planète et e son excentricité, le point x, y, z de sa surface doit satisfaire à l'équation

$$(2)\qquad x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-e^2} = a^2.$$

Le point du disque planétaire que nous avons considéré jusqu'ici étant un point absolument quelconque, si c'est un point de son contour même, ce doit être la projection d'un point situé sur le cône circonscrit à la planète et issu de l'œil de l'observateur comme sommet. Or une genre un plan tangent mené à l'ellipsoïde (a) a pour éq. dans le second système d'axes :

$$xX + yY + \frac{zZ_1}{1-e^2} = a^2.$$

et comme le point o a pour coord. $-\xi, -\eta, -\zeta$ par rapport à ce système d'axes, on exprimera que le point se trouve dans le plan tangent en écrivant :

$$-x\xi - y\eta - \frac{z\zeta}{1-e^2} = a^2.$$

ou en substituant les valeurs de ξ, η, ζ :

$$x\cos\varphi\cos\theta + y\cos\theta\sin\varphi + \frac{z\sin\theta}{1-e^2} = -\frac{a^2}{\rho}.$$

Mais le rapport $\frac{z}{\rho}$ est très petit à côté des rapports $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$, on peut le négliger et l'on a :

$$(3). \qquad (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\cos\theta + \frac{z}{1-e^2}\sin\theta = 0.$$

En éliminant entre $x\ y\ z$ entre les 4 éq. (1) (2) (3), on obtiendra une certaine relation entre u et v qu'on pourra appeler l'équation du contour du disque de la planète.

On tire des éq. (1) et (3)

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = \rho u \sin\theta.$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = -\frac{\rho v \sin\theta \sin\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$$

$$z = \frac{\rho v \sin^2\theta \cos\theta (1-e^2)}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

En portant ces valeurs dans (2) et posant :

$$\tau = \frac{a}{\rho}\frac{1}{\sin\theta}$$

$$c = \sqrt{1-e^2\cos^2\theta}.$$

nous aurons :

$$(4) \qquad u^2 + \frac{v^2}{c^2} = \tau^2$$

On voit ainsi que le contour du disque est une ellipse dont les demi-axes sont égaux à τ et $c\tau$.

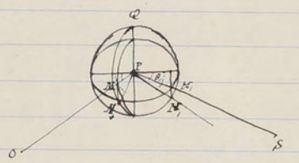
Cette ellipse (4) n'est pas totalement visible parce qu'il y a une partie qui n'est pas illuminée par le Soleil. Cherchons donc la courbe qui limite la partie éclairée de la partie obscure. Pour cela, il nous suffira de supposer que le Soleil se réduise

à un seul point. Alors la courbe que nous considérons sera la courbe de contact du cône tangent à la planète et ayant pour sommet le centre du Soleil. Si donc nous appelons φ_1 et δ_1 les coord. géographiques du centre de la planète par rapport au centre du Soleil, les mêmes coord. étant parallèles à celles que nous avons considérées, tout point xyz de la courbe considérée devra satisfaire à l'éq (5) dans laquelle on aura remplacé φ et δ par φ_1 et δ_1, c'est-à-d. à l'éq.

$$(5') \qquad (x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1)\cos\delta_1 + \frac{z}{\sqrt{1-e^2}}\sin\delta_1 = 0.$$

En éliminant x, y, z entre (1) (2) et (5') on aura l'éq. de la perspective du contour de la partie illuminée.

Pour opérer commodément cette élimination substituons d'abord à δ et δ_1 leurs autres angles β et β_1 que nous allons définir.



Soit P le centre de la planète, O l'observateur et S le centre du Soleil. Soient M et M_1 les points où les droites OP et SP percent la surface de la planète. On voit facilement que les angles δ et δ_1 ne sont autre chose que les latitudes des points M et M_1, par rapport au centre de la planète, prises en valeurs absolues. Circonscrivons à la planète une sphère concentrique de rayon a et menons par M et M_1 les parallèles MN et M_1N_1 à l'axe de la planète. Les latitudes des points N et N_1 pourront s'appeler les anomalies excentriques des points M et M_1, mais les représenterons par β et β_1. Nous aurons alors, en appelant g et g_1 les rapports de PM et PM_1 à a:

$$g\cos\beta = \cos\beta \qquad g_1\cos\beta_1 = \cos\beta_1$$
$$g\sin\beta = \sqrt{1-e^2}\sin\beta. \qquad g_1\sin\beta_1 = \sqrt{1-e^2}\sin\beta_1.$$

Les équations (1) et (5') deviennent alors:

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = \rho\cos\lambda''$$
$$-(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sqrt{1-e^2}\sin\beta + z\cos\beta = g\rho\sin\lambda''$$
$$(x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1)\cos\beta_1 + \frac{z}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta_1 = 0.$$

Posons maintenant pour plus de simplicité

$$x' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \qquad y' = x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1.$$

ou ce qui revient au même

$$x = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \qquad y = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi.$$

Nous aurons alors :

$$x'_n = \rho \sin i'' \qquad \times -\sin\beta$$

$$-y' \sin\beta + \frac{z}{\sqrt{1-e^2}} \cos\beta = \frac{\rho r}{\sqrt{1-e^2}} \nu \sin i'' \qquad \times \cos\beta$$

$$x' \cos\beta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) + y' \cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) + \frac{z}{\sqrt{1-e^2}} \sin\beta_1 = 0$$

En posant pour abréger :

$$N = \sin\beta \sin\beta_1 + \cos\beta \cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)$$

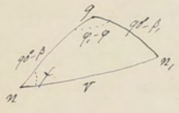
on en tire :

$$x' = \rho_4 \sin i''$$

$$N y' = -\rho_4 \sin i'' \cos\beta \cos\beta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) - \frac{\rho_4 \nu \sin i''}{\sqrt{1-e^2}} \sin\beta_1$$

$$N \frac{z}{\sqrt{1-e^2}} = -\rho_4 \sin i'' \sin\beta \cos\beta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \frac{\rho_4 \nu \sin i''}{\sqrt{1-e^2}} \cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi).$$

Maintenant considérons le triangle sphérique déterminé par le triède $PQ\,\overline{n}\,\overline{n_1}$, PQ étant le pôle de la planète. On a



évidemment

$$n_g n_1 = \varphi_1 - \varphi \qquad gn = 90^\circ - \beta \qquad gn_1 = 90^\circ - \beta_1$$

Posons :

$$gnn_1 = \chi \qquad nn_1 = NPN_1 = \Upsilon.$$

Nous aurons alors :

$$\sin\beta_1 = \sin\beta \cos\Upsilon + \cos\beta \sin\Upsilon \cos\chi$$

$$\cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) = \cos\beta \cos\Upsilon - \sin\beta \sin\Upsilon \cos\chi$$

$$\cos\beta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) = \sin\Upsilon \sin\chi.$$

ou bien :

$$\cos\Upsilon = \sin\beta \sin\beta_1 + \cos\beta \cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)$$

$$\sin\Upsilon \cos\chi = \cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)$$

$$\frac{\sin\Upsilon \sin\chi}{\sin\Upsilon \cos\chi} = \cos\beta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi).$$

En portant ces valeurs dans les expressions de $x'\,y'\,z'$, il vient :

$$\cos\Upsilon . x' = \rho_4 \sin i'' . \cos\Upsilon$$

$$\cos\Upsilon . y' = -\rho_4 \sin i'' \cos\beta \sin\Upsilon \sin\chi - \frac{\rho_4 \nu \sin i''}{\sqrt{1-e^2}} (\sin\beta \cos\Upsilon + \cos\beta \sin\Upsilon \cos\chi).$$

$$\cos\Upsilon \frac{z'}{\sqrt{1-e^2}} = -\rho_4 \sin i'' \sin\beta \sin\Upsilon \sin\chi + \frac{\rho_4 \nu \sin i''}{\sqrt{1-e^2}} (\cos\beta \cos\Upsilon - \sin\beta \sin\Upsilon \cos\chi).$$

Portons enfin ces valeurs dans l'éq (2) et remarquons qu'on a $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$. Nous aurons enfin :

$$a^2 \cos^2\Upsilon + \left\{ a \cos\beta \sin\Upsilon \sin\chi + \frac{a\nu}{\sqrt{1-e^2}} (\sin\beta \cos\Upsilon + \cos\beta \sin\Upsilon \cos\chi) \right\}^2$$

$$+ \left\{ a \sin\beta \sin\Upsilon \sin\chi - \frac{a\nu}{\sqrt{1-e^2}} (\cos\beta \cos\Upsilon - \sin\beta \sin\Upsilon \cos\chi) \right\}^2 = \frac{a^2}{\rho^2} \frac{\cos^2\Upsilon}{\sin^2 i''}.$$

Posons, comme précédemment :

$$\nu = \frac{a}{\rho} \frac{1}{\sin i''} \qquad c = \frac{\sqrt{1-e^2}}{g} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2\theta}.$$

nous aurons en développant

$$u^2\cos^2\varphi + u^2\sin^2\varphi\sin^2\chi + 2u\frac{v}{c}\sin^2\varphi\sin\chi\cos\chi + \frac{v^2}{c^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\chi) = r^2\sin^2\varphi.$$

ou en remplaçant $\sin^2\varphi$ par $1-\cos^2\varphi$

$$(u^2\cos^2\chi \mp 2u\frac{v}{c}\sin\chi\cos\chi + \frac{v^2}{c^2})\cos^2\varphi + u^2\sin^2\chi + 2u\frac{v}{c}\sin\chi\cos\chi + \frac{v^2}{c^2}\cos^2\chi = r^2\cos^2\varphi.$$

ou enfin :

$$(6). \quad (u\cos\chi \mp \frac{v}{c}\sin\chi)^2 + (u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi)^2\cos^2\varphi = r^2$$

Cette courbe est une ellipse concentrique à l'ellipse (4), mais dont les axes sont généralement inclinés par rapport à ceux de (4). Dans le cas où l'on a $\varphi = 0$ les deux ellipses se confondent en une seule.

Dans le cas général, les deux ellipses (4) & (6) sont bitangentes l'une à l'autre suivant un diamètre et la portion visible du disque est bordée d'une part par une moitié de (4) et de l'autre par une moitié de l'autre. Comme l'éq (4) peut s'écrire :

$$(u\cos\chi - \frac{v}{c}\sin\chi)^2 + (u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi)^2 = r^2$$

on aura en la retranchant de (6)

$$(u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi)^2\sin^2\varphi = 0$$

ce qui montre que le diamètre

$$u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi = 0$$

est la corde des contacts des deux ellipses.

En revenant aux coordonnées r et ω on aura pour les coord. r_1 et ω_1 des points de contact.

$$r_1\sin(\omega_1 - \chi) + r_1\frac{v}{c}\cos\chi = 0$$

ou bien $\sin(\omega_1 - \chi) = 0$.

D'où en posant :

$$c_1\sin\chi_1 = \sin\chi$$

$$c_1\cos\chi_1 = \frac{1}{c}\cos\chi$$

on tire :

$$\cos(\omega_1 - \chi_1) = 0$$

ou bien

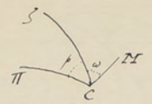
$$\omega_1 = \chi_1 \mp 90°$$

Telle est la valeur de l'angle de position correspondant aux points de contact des deux ellipses.

Maintenant comptons les angles de position à partir du pôle

Nord π de la sphère céleste, et posons:

$$p = \pi C S \qquad p' = \pi C N$$



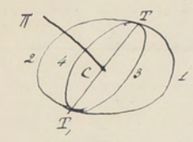
et appelons p_1 la valeur de p' pour le point de contact; nous avons:

$$\omega = p' - p \qquad \omega_1 = p_1 - p$$

et la valeur de p_1 deviendra

$$p_1 = p + \gamma_1 \mp 90°$$

Soit T le point qui correspond à la plus petite valeur de p_1 et T_1 le point qui correspond ~~au~~ à la plus grande.



Il est alors évident que T sera à l'Est de point C et T_1 à l'Ouest.

Si maintenant nous revenons à la définition de l'angle τ, nous voyons d'abord que c'est à peu près la distance angulaire de la Terre et du Soleil vus du centre de la planète. De plus comme dans l'équation

$$\sin T \sin i = \cos\beta \sin i (\varphi - \varphi)$$

nous prendrons toujours $\sin i > 0$, $\sin T$ aura le signe de $\sin(\varphi - \varphi)$; T sera donc un angle compris entre $-180° < T < +180°$.

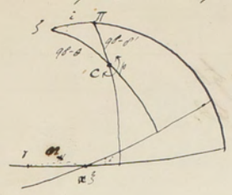
Si donc nous numérotons les différentes parties des lunes illuminées, nous aurons pour les arcs limitant la ligne visible:

$0 < T < 90°$	2. 4.	planète gibbeuse
$90° < T < 180°$	1. 3.	— croissant
$0 > T > -90°$	2. 3.	gibbeuse
$-90° > T > -180°$	2. 4.	croissant.

La valeur de T détermine donc la forme de la planète visible.

Calcul des angles φ, φ, β, p. — Pour appliquer la théorie que nous venons d'exposer, il faut connaître les angles φ, φ, β, p. Pour cela prenons pour l'axe des x la droite qui aboutit au nœud ascendant du plan $0'3'$ (plan parallèle à celui de l'équateur de la planète) sur celui de l'équateur de la sphère céleste. Appelons α l'ascension droite de ce nœud et i l'inclinaison du plan $0'3'$ sur le plan de l'équateur. Alors φ et φ se déduisent des coord. λ et δ de la planète par la même méthode que nous avons servi à passer des coord. équatoriales aux coord. écliptiques.

Nous préférons pourtant résoudre directement le triangle $\S C \Pi$.



On a dans ce triangle

$$\Pi\S C = 90° - \varphi \qquad \S\Pi C = 90° + \alpha' - \Omega.$$

Donc :

$$\cos\delta \sin B = \sin\varphi' \cos i - \cos\varphi' \sin i \cos(\alpha' - \Omega)$$
$$\cos\delta \cos B = \sin\varphi' \sin i + \cos\varphi' \cos i \cos(\alpha' - \Omega)$$
$$\cos\delta \sin(\alpha - \Omega) = \cos\varphi' \sin(\alpha' - \Omega).$$

Posons :

$$f \sin F = \operatorname{tg}\varphi'$$
$$f \cos F = \cos i \cos(\alpha' - \Omega)$$

nos éq. deviendront

$$\sin\delta = f \cos(F - i)$$
$$\cos\delta \cos B = f \cos(F - i)$$
$$\cos\delta \sin(\alpha - \Omega) = \cos\varphi' \cos(\alpha' - \Omega).$$

L'angle β qui n'est autre chose que l'angle $\Pi\S$ se calculera en résolvant le même triangle ; on a en effet :

$$\cos\delta \sin\beta = -\cos\varphi' \sin i \cos(\alpha' - \Omega)$$
$$\cos\delta \cos\beta = \cos i \cos\varphi' + \sin i \sin\varphi' \cos(\alpha' - \Omega).$$

D'où

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sin i \cos(\alpha' - \Omega)}{\cos i \cos\varphi' + \sin i \sin\varphi' \cos(\alpha' - \Omega)}.$$

en posant

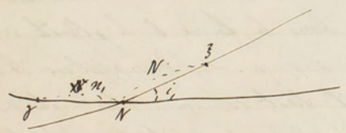
$$\operatorname{tg} F' = \operatorname{tg} i \cos(\alpha' - \Omega)$$

il vient :

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sin F' \cot(\alpha' - \Omega)}{\cos(i - F')}$$

β comme $\sin\beta$ a le signe contraire à $\cos(\alpha' - \Omega)$, il n'y a pas d'ambiguité.

Pour calculer maintenant les angles α_1 et φ_1 appelons Ω_1 i_1 la longitude du nœud asc. du plan $\S\gamma$ sur l'écliptique et son inclinaison ; N l'arc du grand cercle $\S\gamma$ compris entre ce nœud et le point $\S$; α_1 et λ la longitude et la latitude héliocentriques de la planète. Nous aurons alors de la même façon que plus haut :



$$f_1 \sin F_1 = \operatorname{tg}\varphi_1'$$
$$f_1 \cos F_1 = \cos(\alpha_1' - \Omega_1)$$
$$\sin\lambda = f_1 \cos(F_1 - i_1)$$
$$\cos\lambda \sin(\alpha_1 - \Omega_1) = f_1 \cos(F_1 - i_1)$$
$$\cos\lambda \cos(\alpha_1 - \Omega_1) = \cos\varphi_1' \cos(\alpha_1' - \Omega_1).$$

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\theta$$
$$\operatorname{tg}\beta_1 = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\theta_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \sin\overline{\varphi_1} = \operatorname{tg}\lambda$$
$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cos\overline{\varphi_1} = \sin(l - n_1)$$
$$\sin\theta_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 \cos\lambda \sin(\overline{\varphi_1} - i_1)$$
$$\cos\theta_1 \sin(\theta_1 - N) = \operatorname{tg}\varphi_1 \cos\lambda \cos(\overline{\varphi_1} - i_1)$$
$$\cos\theta_1 \cos(\theta_1 - N) = \cos\lambda \cos(l - n_1)$$

J'abrège à ce stade

Ayant calculé θ, φ_1 θ_1, φ_1 on calculera $\overline{\varphi}$ & ψ par :

$$\cos\overline{\varphi} = \sin\beta \sin\beta_1 + \cos\beta\cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)$$
$$\sin\overline{\varphi} \cos\psi = \cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)$$
$$\sin\overline{\varphi} \sin\psi = \cos\beta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi).$$

et l'on connaîtra ainsi la forme du rayon apparent.

Cette théorie s'applique dans le cas où i i_1 et sont quelconques. Mais dans la réalité des choses, il se présente toujours la particularité qui permettant de simplifier beaucoup les calculs.

1° Cas de Jupiter. - On a vu d'après la table de Damoiseau :

$$n = 357°\,58'\,25'' + 3'',59\,(t - 1850)$$
$$i = 25°\,25'\,49'' + 0'',55\,(t - 1850)$$

le temps t étant compté en années. On en déduit pour un calcul facile :

$$n_1 = 335°\,40'\,46'' + 49'',80\,(t - 1850)$$
$$i_1 = 2°\,8'\,51'' + 0'',43\,(t - 1850)$$
$$N = 336°\,33'\,18'' + 46'',55\,(t - 1850).$$

Ces nombres permettent d'appliquer les formules précédentes.

Mais remarquons que l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur l'écliptique est fort petite, ainsi que celle du plan de son orbite. L'angle λ est donc toujours très-petit. On peut donc prendre $\sqrt{1-e^2}$ au lieu de $c = \sqrt{1-e^2\cos^2\lambda}$, et nous prendrons avec Struve :

$$\log c = \bar{1},9672 \qquad c = 0,92723.$$

Ensuite l'angle ψ est toujours très-peu différent de 90°, nous pourrons alors prendre $\sin\psi = 1$ $\cos\psi = 0$ et par suite

$$\overline{\varphi} = \varphi - \varphi.$$

ou encore

$$\overline{\varphi} = l^s - l'$$

l et l' étant la longitude héliocentrique et la longitude géocentrique de la planète. L'angle l est donné par les éphémérides, et l'angle l' se calculant au moyen de θ et θ'.

On n'a donc qu'à calculer ρ par les formules :

$$\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg} i \sin(l' - n) \qquad \operatorname{tg}\rho = -\frac{\sin\theta' \cos\theta' \sin(l - n)}{\sin(\theta' - \theta)}.$$

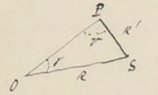
2e Cas de Saturne. — On a ici :

$$\Omega = 125^\circ 13' 52'' + 128'',76\,(t-1850) + 0'',0605\,(t-1850)^2$$
$$i = 7^\circ 10' 10'' - 15'',08\,(t-1850) + 0'',0035\,(t-1850)^2$$
$$\Omega_1 = 167^\circ 31' 52'' + 46'',62\,(t-1850)$$
$$i_1 = 28^\circ 10' 27'' - 0'',35\,(t-1850)$$
$$N = 43^\circ 31' 34'' - 86'',70\,(t-1850) - 0'',0625\,(t-1850)^2.$$

Le carré de e^2 n'est plus négligeable dans ce cas. On sera obligé de calculer φ et p par les formules précédentes. Ajoutons que le Nautical Almanac donne la valeur de $-\varphi$ (note l) et le p pour l'anneau de Saturne; on peut les employer pour Saturne lui-même. — Quant à la gibbosité de Saturne, elle est tout à fait insensible à cause de l'éloignement de la planète par rapport à la longueur de l'orbite terrestre. On n'aura donc affaire qu'à l'ellipse (4).

3e Cas de l'anneau de Saturne. — On peut supposer que c'est un cercle dont le plan coïncide avec le plan de l'équateur de Saturne; on bien ce sera une ellipse de révolution dont l'excentricité est négligeable, attendu que l'axe est nul. On devra donc faire dans l'éq. (4) $e = \lambda$ et par suite $c = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\cos^2\lambda}$. et l'on aura la position par le Nautical Almanac.

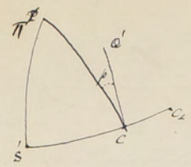
4e Cas de Mars, Vénus et Mercure. — Pour ces planètes l'aplatissement est tout à fait insensible pour une occultation. Nous avons donc affaire à un corps sphérique partiellement illuminé. On peut choisir pour plan de référence tel plan que l'on voudra; nous procéderons pour plus de simplicité le plan qui passe par le centre de la planète, celui du soleil et par l'œil de l'observateur. Alors la quantité α i est évidemment variable, nous ne pourrons plus employer les formules précédentes pour calculer τ et p. Mais dans le triangle SLO, S étant le centre du soleil, on a $OLS = \tau$. Appelons θ l'angle



SOL qui est l'élongation de la planète; et p et p_1 R et R' les rayons vecteurs SO et SL de la Terre et de la planète. Nous aurons alors :

$$\sin\tau = \frac{R}{R'}\sin\theta.$$

Maintenant pour calculer φ ainsi que p, menons par le point O une parallèle à la droite SL et soit θ_1 l'angle qui est l'élongation de la planète; soit S' la trace du plan et soit aussi CQ_0 la trace du plan OPZ sur le



sphère céleste. Il est évident que les trois points S, C et C₁ seront sur un même grand cercle; et j'aurai notre choix du plan de référence CQ' en perpendiculaire à CC₁. Cela posé dans le triangle ΠCS' on a évidemment:

$$C = 90° - p. \qquad \Pi\Sigma = \alpha' - A \qquad S'C = r$$
$$\Pi\Sigma S' = 90° - D \qquad \Pi\Sigma C = 90° - \rho'$$

A et D étant les coord. du Soleil. Donc:

$$\cos r = \sin\rho' \sin D + \cos\rho' \cos D \cos(\alpha' - A)$$
$$\sin r \sin p = \cos\rho' \sin D - \sin\rho' \cos D \cos(\alpha' - A)$$
$$\sin r \cos p = \cos D \sin(\alpha' - A)$$

on tire en prenant une auxiliaire:

$$\operatorname{tg} k = \operatorname{tg} D \sec(\alpha' - A)$$
$$\operatorname{tg} p = \cot(\alpha' - A) \sin(k - \rho') \sec k$$
$$\sin r = \frac{R}{R'} \frac{\sin(\alpha' - A)\cos D}{\cos p}.$$

si l'on doit prendre cos la même ligne que $\sin(\alpha' - A)$.

Quant aux angles φ, φ_1, le sont ils évidemment nuls et pour γ il est évidemment égal à 90°; et comme on a $c = 0$, l'éq(6) devient:

$$d^2 \sin^2\pi + v^2 = r^2.$$

Pour l'angle s, on a

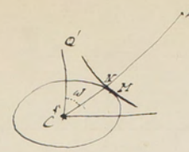
$$s = \frac{a}{\rho} \frac{1}{\sin 1''}$$

c'est donc le demi-diamètre apparent de la planète. Si l'on appelle s_0 la valeur que prendrait s si la planète était vue à la distance 1 et r' le rayon vecteur géocentrique actuel de la planète, on aura donc:

$$s = \frac{s_0}{r'}.$$

s_0 est une constante (Voir Chauvenet) et r' est donné pour dans le Nautical Almanac.

II. *Détermination de la longitude par l'observation d'une occultation de planète aplatie.* — Pour profiter une pareille occultation d'une façon approchée, il suffira de regarder la planète comme un point et d'y appliquer ce que nous avons dit pour les étoiles fixes; mais pour les planètes dont la compression et la phase sont sensibles, cette méthode n'est plus suffisante quand on veut déduire une valeur de la longitude d'une observation de leur occultation. Dans ce cas soit π le point de contact du rayon lumineux avec



le contact elliptique de la planète. Joignons les deux centres apparents C et Z et soit N le pt où l'arc CZ rencontre le contour du disque lumineux. Tout se passera alors comme si il s'agissait de l'occultation d'un corps sphérique de demi-diamètre apparent égal à CN = s'. Cherchons la valeur de cet arc s'' en fonction de s et de l'angle ZCN que nous désignerons par w. Pour cela appelons u, v les coord. du pt de contact Z de l'arc NZ sur l'ellipse C et U, T les coord. courantes de cet arc. Son éq. sera alors:

$$(a) \qquad U^2 \sin^2 w + T^2 \cos^2 w = s^2$$

Mais on sait que cet arc passe par le point variable:

$$x = u\cos\chi + v\sin\chi$$
$$y = u\sin\chi - v\cos\chi.$$

Supposons qu'il s'agisse de l'ellipse (b)

$$(b) \qquad \left(u\cos\chi - \frac{v}{c}\sin\chi\right)^2 + \left(u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi\right)^2 = s'^2.$$

La tangente à cette ellipse menée par le point U, T a pour éq:

$$\left(U\cos\chi - \frac{T}{c}\sin\chi\right)\left(u\cos\chi - \frac{v}{c}\sin\chi\right) + \left(U\sin\chi + \frac{T}{c}\cos\chi\right)\left(u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi\right) = s'^2.$$

En identifiant cette éq. avec l'éq. (a) il vient:

$$\frac{x}{\cos w} = \frac{\left(u\cos\chi - \frac{v}{c}\sin\chi\right)\cos\chi + \left(u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi\right)\frac{\sin w}{c}}{\cos w} = \frac{-\left(u\cos\chi - \frac{v}{c}\sin\chi\right)\frac{\sin\chi}{c} + \left(u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi\right)\frac{\cos w\cos\chi}{\cos w}}{\cos w}.$$

En éliminant u et v entre cette éq. et l'éq (b) on aura la relation qui relie s'' à s. Posons pour simplifier:

$$x = u\cos\chi - \frac{v}{c}\sin\chi$$
$$y = u\sin\chi + \frac{v}{c}\cos\chi.$$

les éq. précédentes deviennent:

$$x\cos\chi + y\sin\chi = \frac{s'^2}{s''^2}\cos w$$
$$-x\sin\chi + y\cos\chi = \frac{c\,s'^2}{s''^2}\sin w\cos w.$$

$$(b') \qquad x^2 + y^2\cos^2 w = s'^2.$$

En posant

$$c'\sin w' = \frac{c\sin w}{c}$$
$$c'\cos w' = \cos w$$

les deux premières éq. deviennent:

$$x\cos\chi + y\cos w\sin\chi = \frac{c\,c'\,s'^2}{s''^2}\sin w' \qquad \cos\chi \qquad \sin\chi$$
$$-x\sin\chi + y\cos w\cos\chi = \frac{c\,c'\,s'^2}{s''^2}\cos w' \qquad -\sin\chi \qquad \cos\chi$$

D'où

$$x = \frac{c\,c'\,s'^2}{s''^2}\sin(w' - \chi)$$
$$y\cos w = \frac{c\,c'\,s'^2}{s''^2}\cos(w' - \chi).$$

En substituant dans (b') il vient:

$$\frac{c^2 c'^2 s'^4}{s''^4}\left\{\sin^2(w' - \chi) + \cos^2(w' - \chi)\cos^2 w\right\} = s'^2.$$

D'où enfin :

$$\tau'' = cc' \sqrt{1 - \cos^2(\omega - \chi)\sin^2 T} .$$

Si l'on pose alors

$$\sin\chi = \cos(\omega - \chi)\sin T$$

alors : $$\tau'' = cc' \tau \cos\chi .$$

On a vu que dans la parabole on a toujours $\chi = 90°$ on peut donc employer les formules très-simples :

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\tau\sin\omega}{c}$$

$$\sin\chi = \sin\omega'\sin T$$

$$\tau'' = \frac{\tau\tau' \sin\omega \cos\chi}{\sin\omega'} .$$

L'angle ω qui entre dans ces calculs n'est autre chose que l'angle de position du centre de la lune par rapport au centre de la planète mais l'angle $\pi C\odot$ n'est que nous avons désigné par φ. On peut donc le calculer facilement en résolvant le triangle $\pi C\odot$.

Maintenant si nous revenons à ce que nous avons dit au commencement de l'éclipse de Soleil, on voit facilement que le rayon d'ombre et le pénombre s'obtiendra par l'éq. (Angle au sommet du cône d'ombre)

$$\sin f = \frac{\pi\tau_0 \mp R\sin D_0}{\tau_0} .$$

Dans laquelle on remplacera τ_0 par le demi-diamètre T réduit à la distance Δ c'est-à-dire $\Delta\sin T$, Δ ayant la signification que nous avons définie. Donc :

$$\sin f = \frac{\Delta\sin T \mp R\sin D_0}{\Delta\rho} .$$

Le reste du calcul se fera exactement de la même façon que dans l'éclipse de Soleil en remplaçant partout les quantités relatives au Soleil par celles relatives à la planète.

Quand on connaît une valeur approchée de Δ, on peut se dispenser de calculer l'angle de position $\pi C\odot$ d'abord, car on le trouve à la fin du calcul dans le dénominateur de Ω et l'on aura

$$\omega = \Omega - \varphi = N + \chi - \varphi$$

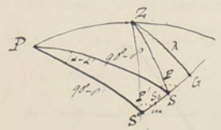
d'où l'on tirera une autre nouvelle valeur de ω on recommencera le calcul. — On peut même suivre presque toujours la méthode des approximations successives en prenant pour une première approx. $\Delta = \pm R$ = largeur du cône d'ombre.

VII. Passage de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil.

La théorie du passage de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil est celle de l'éclipse de Soleil en substituant aux quantités relatives à la lune celles relatives à la planète considérée; mais alors la question, au lieu de se simplifier, se complique dans quelques parties; par exemple, la quantité b n'étant pas assez petite, on ne pourra pas calculer a et d par les formules abrégées. De plus, la petitesse de la parallaxe de la planète ne produit pas une grande simplification, car on ne la fait pas intervenir dans le calcul d'une manière assez directe. Il est donc préférable de suivre une méthode particulière dont le principe est dû à Lagrange et qui repose sur la petitesse de la parallaxe de la planète ainsi que de celle du Soleil.

Le passage de Vénus et de Mercure ne servant guère pour la détermination de la longitude, nous traiterons seulement la question de la prédiction. Nous ferons d'abord cette prédiction pour un observateur placé au centre de la Terre; puis nous en déduirons le procédé de prédiction pour un lieu quelconque de la surface terrestre.

I. Prédiction pour le centre de la Terre. — Soient S et S' les lieux géocentriques de la planète et du Soleil, et P le pôle Nord du ciel. Désignons par m la distance angulaire SS'; par $180°-\theta$ et θ' les angles SS'P, S'SP. En appelant α et α', δ et δ' les coord. équatoriales de la planète et du Soleil, nous aurons d'après les formules de Delambre:



$$\sin\tfrac{1}{2}m\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\theta') = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$$
$$\sin\tfrac{1}{2}m\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta') = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta').$$

Mais lors d'un contact $\frac{1}{2}m$ est environ 8′ au plus. On peut donc prendre:

$$m\sin 1'' = (\alpha-\alpha')\cos\delta$$
$$m\cos 1'' = \delta-\delta'$$

équations où l'on a

$$N = \tfrac{1}{2}(P+P') \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(\Delta+\Delta')$$

Maintenant soit $T_0 + \tau = T$ l'époque d'un contact et $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ les valeurs de ces quantités à l'époque T_0 et soient $\alpha + \dot\alpha t$ les variations horaires des quantités α à la même époque; comme on peut supposer $\cos\beta$ constant, les valeurs des seconds membres à l'époque T seront respectivement

$$(\alpha - \alpha') \cos\beta + a \cos\beta . \tau$$
$$\delta - \delta' + d . \tau .$$

Et à l'époque T la valeur de u est évidemment $s + \tau$ ou $s - \tau$ suivant que c'est un contact extérieur ou intérieur; on aura, en appelant z la valeur de z à cette époque et posant

$$u \sin N = a \cos\beta$$
$$u \cos N = d .$$

les équations de condition:

$$(s \pm \tau) \sin Q = u \sin z + u \cos N . \tau$$
$$(s \pm \tau) \cos Q = u \cos z + u \sin N . \tau .$$

On aura donc pour déterminer τ et Q les formules:

$$\sin\chi = \frac{u \sin(z - N)}{s \pm \tau}$$
$$\tau = -\frac{u \cos(z - N)}{n} + \frac{(s \pm \tau)\cos\chi}{n}$$
$$Q = N + \chi .$$

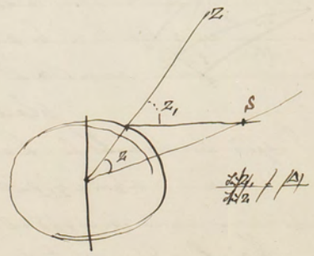
L'angle Q est, comme dans le cas d'une éclipse, l'angle de position du point de contact.

II. Prédiction pour un lieu de la surface de la Terre.—

Nous devons d'abord chercher la valeur de la distance angulaire des deux astres vus du lieu d'observation. Soit Z le point où le rayon vecteur géocentrique de ce lieu perce la sphère céleste. Posons: $Z = ZS$ $Z' = ZS'$ $S = ZS'S$ $180° - S = ZSS'$ les angles Z, Z' étant ce que l'on peut appeler les distances méridiennes de S, S' par rapport au méridien réduit et vues du centre de la Terre. Les valeurs du même angle vues du lieu actuel d'observation seront approximativement

$$Z + p\sigma \varpi Z \qquad Z + p\sigma \delta i Z'$$

ϖ, δ étant les parallaxes horizontales équatoriales de la planète et du soleil et p le rayon de la Terre au lieu d'observation.



$$\frac{\pm(Z_1 - Z)}{c} = \frac{\pm z_1}{\Delta}$$

$$\sin(Z_1 - Z) = \frac{\frac{p}{\Delta} \pm z}{1 - \frac{p}{\Delta} \pm z}$$

$$\therefore Z_1 = Z + \frac{p}{\Delta} \pm z$$

La différence $m'-m$ est donc tout entière aux différences $\varpi\,di\,\Omega$, $\varpi'\,di'\,\Omega'$ des deux sortes de distances réduites; et si on regarde ces différences comme des différentielles, ce qui est permis, nous tomberons dans le même cas que si nous cherchions la diff^{le} d'une ~~distance zenithale~~ distance zénithale ~~rectiligne~~ en fonction de la colatitude et de la distance polaire. Nous aurons donc d'après la formule (Chap. I).

$$dh = \cos\pi\, d\rho - \cos A\, d\varphi - \cos\varphi \sin\pi\, dt.$$

$$m'-m = -\rho\varpi\, di\,\Omega \frac{\cos S}{\sin S} + \rho\varpi' di'\Omega' \frac{\cos S'}{\sin S'}.$$

Soit maintenant S_0 le milieu de l'arc SS', et soit $\Omega_0 = \Omega S_0$. $S_0 = \Omega_0 S$.

Dans les triangles $S\Omega S_0$ et $S'\Omega S_0$, on a:

$$-\sin\Omega \frac{\cos S}{\sin S} = \sin\tfrac{1}{2}m \cos\Omega_0 - \cos\tfrac{1}{2}m \sin\Omega_0 \frac{\cos S_0}{\sin S_0} \qquad \varpi$$

$$\sin\Omega' \frac{\cos S'}{\sin S'} = \sin\tfrac{1}{2}m \cos\Omega_0 + \cos\tfrac{1}{2}m \frac{\sin\Omega_0}{\sin S_0} \cos S_0 \qquad \varpi'.$$

on aura donc:

$$m'-m = \rho\left[(\varpi+\varpi')\sin\tfrac{1}{2}m\cos\Omega_0 - (\varpi-\varpi')\cos\tfrac{1}{2}m \sin\Omega_0 \frac{\cos S_0}{\sin S_0}\right].$$

Posons:

$$g\sin\tau = (\varpi+\varpi')\sin\tfrac{1}{2}m$$

$$g\cos\tau = (\varpi-\varpi')\cos\tfrac{1}{2}m.$$

il vient alors:

$$m' = m + g\rho(\sin\tau\cos\Omega_0 - \cos\tau \sin\Omega_0 \cos S_0).$$

Maintenant prenons sur l'arc SS' un point Θ tel que l'on ait $S_0\Theta = \tau + \frac{\pi}{2}$, et posons $\lambda = 2\Theta$. On aura:

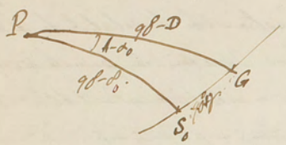
$$\cos\lambda = -\sin\tau\cos\Omega_0 + \cos\tau \sin\Omega_0 \cos S_0$$

l'expression de m' devient ainsi:

$$m' = m + g\rho\cos\lambda.$$

Remarquons que si la Terre était parfaitement sphérique, ce qui est fort près de la vérité, ρ serait $= 1$ et l'éq^{on} m' ne renfermerait que λ qui était indépendant de la position de l'observateur et comme Θ est un point indépendant de ce lieu on voit que dans cette supposition, la distance apparente des deux astres à un instant physique donné est la même pour tous les points dont la réunion est située sur le petit cercle décrit du point Θ comme pôle avec un rayon sphérique donné λ. - C'est le théorème de Lagrange.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer λ ou l'angle λ qui mesure l'élévation du point Θ. Pour cela remarquons que les coordonnées du point S_0 sont à peu près égales à $\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha+\alpha')$



$\delta = \frac{1}{2}(\delta + \delta')$. Si dans on appelle A et D les coord. du pt G, on aura.

$$\cos D \sin(A-\alpha) = \cos\delta \sin Z$$
$$\cos D \cos(A-\alpha) = -\sin\delta \cos\delta_0 - \cos\delta \sin\delta_0 \cos Z$$
$$\sin D = -\sin\delta \sin\delta_0 + \cos\delta \cos\delta_0 \cos Z$$

ou bien en posant des formules calculables par log.

$$f \sin R = \sin\delta \qquad \cos D \sin(A-\alpha) = \cos\delta \sin Z$$
$$f \cos R = \cos\delta \cos\alpha \qquad \cos D \cos(A-\alpha) = -f \sin(R+\delta_0)$$
$$\tan D = f \cos(R+\delta_0).$$

Quant aux angles γ et λ le premier g, on peut prendre:

$$\gamma = \frac{\varpi+\varpi'}{\varpi-\varpi'} \tfrac{1}{2} m \qquad g = \varpi - \varpi'.$$

Maintenant en appelant Θ le temps sidéral du premier méridien et ψ l'angle horaire du pt G pour le même méridien, on aura

$$\psi = \Theta - A$$

et en appelant φ' la latitude réduite du lieu considéré et L sa longitude, mais aussi évidemment

$$\cos\lambda = \sin\varphi' \sin D + \cos\varphi' \cos D \cos(\psi + L).$$

On a ainsi tout ce qu'il faut pour déterminer m'.

Maintenant soit T l'époque d'une phase de l'occultation pour le centre de la Terre et T' celle de la même phase pour le lieu de la surface. Comme l'intervalle $T'-T$ est toujours très petit, on peut supposer que u varie proportionnellement au temps pendant cet intervalle de temps. Donc à l'époque T' on aura

$$u = s' + s + (T'-T)\frac{du}{dt}.$$

et par suite à la même époque

$$u' = s + s + (T'-T)\frac{du}{dt} - g\cos\lambda.$$

Mais à cette époque on doit avoir

$$u' = s + s$$

en négligeant le changement des demi-diamètres résultant de la parallaxe. Donc on doit avoir

$$(T'-T)\frac{du}{dt} = g\cos\lambda.$$

Mais en différentiant les éq.

$$u \sin z = (\alpha - \alpha')\cos\delta_0$$
$$u \cos z = (\delta - \delta').$$

on a

$$\frac{du}{dt}\sin z + u\cos z \frac{dz}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\cos\delta_0 = n\sin N \qquad \sin z$$
$$\frac{du}{dt}\cos z - u\sin z \frac{dz}{dt} = \frac{d\delta}{dt} = n\cos N \qquad \cos z.$$

D'où $\frac{du}{dt} = n \frac{(x)}{x} (N - N)$

On doit prendre la valeur de $\frac{du}{dt}$ pour l'époque T_1 mais alors on a $u = \varphi \pm \delta$ donc $n(N-N) = \varphi - \chi$. Donc

$$\frac{du}{dt} = n \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin \chi} \cos \chi .$$

On aura donc enfin

$$T' = T + \frac{q \cos \delta}{n \sin \chi} .$$

Par exemple, nous pouvons prendre sa valeur à l'époque T ainsi que pour q. On a alors tout ce qu'il faut pour passer de T à T'.

Il sera plus commode d'écrire la formule précédente.

$$T' = T + \frac{\rho(\Omega - \Omega')}{n \sin \chi} \sin(\Omega - D) + \frac{\rho(\Omega - \Omega')}{n \sin \chi} \cos(\Omega - D)(\mu t + \varepsilon) .$$

III. Résumé des formules. — 1° D'abord pour l'époque de la conjonction en asc. droite on fera l'heure entière du premier méridien le plus proche de cette époque, on calculera les coord. x & y, x' & y' de la planète & du Soleil ainsi que les variations relatives à 1 dans coord. pour l'unité de temps ; on prendra aussi les demi-diamètres apparents φ & φ'. On fera $\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta + \delta')$ puis on calculera u, ε, n & N par

$$n \sin \varepsilon = (x - x') \cos \delta_0 \qquad n \sin N = x \cos \delta_0$$
$$n \cos \varepsilon = \delta - \delta' \qquad n \cos N = x .$$

Puis χ & Π par

$$\sin \chi = \frac{u \sin(\varepsilon - N)}{\varphi \pm \varphi'} .$$
$$\Pi = \Pi_0 - \frac{u}{n} \cos(\varepsilon - N) + \frac{\varphi \pm \varphi'}{n} \cos \chi .$$

Si l'on veut avoir l'époque de la plus petite distance Π_1 ainsi que cette distance minimum $= u_1$, on prendra :

$$\Pi_1 = \Pi_0 - \frac{u}{n} \cos(\varepsilon - N) \qquad u_1 = u \sin(\varepsilon - N) .$$

2° En prenant maintenant

$$\Omega = N + \chi \qquad \alpha_0 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') ; \quad \delta_0 = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta')$$

on calculera D & $\mathcal{A}$ par les formules : pour l'époque Π.

$$\operatorname{tg} \mathcal{A} = \frac{\Omega + \Omega'}{\Omega - \Omega'} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\gamma \pm \varphi) \qquad \cos D \sin(A - \alpha_0) = \text{const} \sin \mathcal{A}$$
$$\text{const} \sin \mathcal{A} = \sin \gamma \qquad \cos D \cos(A - \alpha_0) = - \text{const} \sin(\delta_0 + D)$$
$$\text{const} \cos \mathcal{A} = \cos \gamma \cos \Omega \qquad \tan D = \text{const} \sin(\delta_0 + D) .$$

On prend le temps sidéral ⊙ à l'époque Π & l'on forme

$$\mu = \odot - A \qquad B = \frac{\Omega - \Omega'}{n \sin \chi} \sin D \qquad C = \frac{\Omega - \Omega'}{n \cos \chi} \cos D$$

on a alors pour déterminer le temps Π'

$$\Pi' = \Pi + B \cdot \rho \sin \chi' + C \cdot \rho \cos \chi' \cos(\mu t + \varepsilon) .$$

Le temps local sera $\Pi' + z$ et l'angle de position sera