OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Parametrizations of generalized Teichmüller spaces
Author(s)	三口, 雄大
Citation	大阪大学, 2023, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/92146
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　三口　雄大　）	
論文題名	Parametrizations of generalized Teichmüller spaces (一般化されたタイヒミュラー空間のパラメータ付け)

論文内容の要旨

エンハンストTeichmüller空間は双曲曲面を理想三角形分割の辺に沿ってシアー変形をするときに考えられているTeichmüller空間のひとつであり，デコレーテッドTeichmüller空間はR.C.Pennerによって導入されて研究されているTeichmüller空間である．これらのTeichmüller空間の理論はV.V.FockとA.B.Goncharovによって発展されて，これらのTeichmüller空間と自然に対応するラミネーションの空間の存在が知られている．

本論文の目的は，エンハンストTeichmüller空間とデコレーテッドTeichmüller空間の共通の拡張であるモジュライ空間を構成し，Teichmüller空間と対応するラミネーション空間との関係を考察することである．それぞれ独立に定義されていたラミネーション空間が共通の拡張であるTeichmüller空間との関係を通して，ある種の互換性を持っていることが示される．

これらのTeichmüller空間の拡張はクラスター多様体の理論において，V.V.FockとA.B.Goncharovによるシンプレクティックダブルや，A.B.GoncharovとL.Shenによる主係数を持つクラスター多様体など他にも知られているが，本論文での拡張とは例えばデコレーションパラメータに対応する部分の有無などにより異なるものであるといえる．

Sを向きづけられた連結でコンパクトな曲面から有限個の点を除いたもので，クラウン状の境界付きの双曲構造を許容するものとする．閉曲線境界のカスプへの退化の様子を観察することで，閉曲線境界のデコレーションとして等距離曲線を自然に採用して，エンハンストTeichmüller空間とデコレーテッドTeichmüller空間の共通の拡張であるデコレーテッドエンハンストTeichmüller空間を定義した．双曲曲面に理想三角形分割を与えるSの三角形分割をひとつ決めたとき，エンハンストTeichmüller空間はシアーパラメータによって座標付けられることが知られている．拡張されたTeichmüller空間にデコレーションパラメータを導入することにより，拡張されたTeichmüller空間がシアーパラメータとデコレーションパラメータによって座標付けられることを示した．また，デコレーテッドTeichmüller空間はラムダ長さパラメータによって座標付けられることが知られているが，拡張されたTeichmüller空間がラムダ長さパラメータと境界長さパラメータによっても座標付けられることを示した．これらの結果は，エンハンストTeichmüller空間とデコレーテッドTeichmüller空間それぞれの拡張であるTeichmüller空間がそれぞれの座標付けの拡張となる2種類の座標付けを自然に持つと言い換えることができる．ラムダ長さパラメータによる座標付けの拡張には三角形分割にひとつの十分条件を仮定しているが，技術的な理由による設定であり将来的に外れることが期待される．実際，いくつかの具体的な曲面で考察することで，その十分条件を緩めることができている．

エンハンストTeichmüller空間とデコレーテッドTeichmüller空間それぞれに対応するラミネーション空間は，それぞれのTeichmüller空間を座標付けたパラメータの空間へ重み付き交点数を測ることで座標付けられるが，エンハンスド側とデコレーテッド側のラミネーションからの座標付け同士の関係を見ることは難しかった．本論文は，拡張されたTeichmüller空間に対応するラミネーション空間とラミネーションからのそれぞれの座標付けの拡張を与えることで，ある正規化のもとでは2種類の座標付けの間の変換写像がシアーパラメータによる座標とラムダ長さパラメータによる座標の変換写像と一致していることを示した．この主張はエンハンストTeichmüller空間とデコレーテッドTeichmüller空間それぞれに対応しているラミネーション空間それぞれの座標付けが満たすべき性質であり，本論文はこの結果により，そのような意味においてデコレーションパラメータの正規化のうちで自然なものを得たとみなすことができる．また，本論文ではデコレーションパラメータのいくつかの正規化の例を観察して，その性質についてもまとめている．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　三口雄大　）

	(職)	氏　名
論文審査担当者	主査　教授	鎌田　聖一
	副査　教授	山ノ井　克俊
	副査　教授（学習院大学）	大鹿　健一
	副査　准教授	馬場　伸平

論文審査の結果の要旨

曲面の双曲構造は、基本的な幾何学的対象である。特に Riemann 面の一意化定理によって、Riemann 面の構造と対応することで、様々な理論が今日まで発展してきた。

曲面の位相を固定したとき、その曲面上の双曲構造の（isotopy 類の）空間は Teichmüller 空間と呼ばれる。Teichmüller 空間は Riemann 面の moduli 空間の普遍被覆であり、単連結な非正曲率空間と類似する幾何構造を持つ。 Teichmüller 空間は、その多様性から様々な拡張や一般化がなされた。 その一つとして、曲面が境界を持つ場合は、境界の向き付の選択も加えた enhanced Teichmüller space と呼ばれる空間が Fock と Goncharov によって導入された。また曲面がカスプを持つ場合は、そのカスプ周りの horocycle の選択も加えた、decorated Teichmüller 空間が Penner により導入されている。 本博士論文では、その２つの拡張を共に包含する新たな Teichmüller 空間を導入した。また、この導入した Teichmüller 空間にパラメター付を与えた。さらに対応する別の空間のパラメター付や関連も与えた。

Teichmüller 空間は位相的には Euclid 空間と同相である。理論の発展と並行して、Teichmüller 空間には多様な幾何学的視点から座標系やパラメター付が導入された。例えば、 閉双曲曲面では有限個の単純閉曲線（の isotopy 類）を適当に選ぶと、それらの測地的長さを双曲曲面上で測ることで、パラメター付が与えられることがよく知られている。また、measured（geodesic）lamination と呼ばれる、双曲曲面上の交わらない測地線からなる閉集合に横断的な方向に測度を与えた対象がある。Measured lamination は、双曲構造の変形理論と密接に関連しており、 measured lamination によって Teichmüller 空間のパラメター付がされる。

この博士論文では、カスプや境界成分を共に持つ双曲構造に、decoration 及び enhancement の両方の情報を加えた構造の空間として、Teichmüller 空間の拡張（decorated enhanced Teichmüller space）を導入した。特に、 カスプに対して horocycle を対応させる decoration の拡張として、曲面の測地的境界成分に対しても、その成分からの等距離な曲線として decoration を新たに導入したことは特筆すべきである。この拡張された decoration parameter を用いて、 decorated enhanced Teichmüller space に(符号付)長さによるパラメター付を与えた（Theorem B)。このパラメター付は、曲面の適当な理想三角形分割を固定して行う。パラメター付に使用する長さは、境界成分の(符号付)長さ、および lambda length と呼ばれる三角形の辺の decoration によって区切られる線分の長さである。 また、この(符号付)長さによる decorated enhanced Teichmüller space のパラメター付に関連して、曲面上の measured lamination の空間において類似するパラメター付与えた(Theorem C)。

導入した decorated enhanced Teichmüller space に、自然な長さのみによってパラメター付を与えたことは、この理論の発展に非常に有用である。この博士論文が応用されることによって、双曲曲面の理論が発展することが期待できる。以上のようなことから、本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値あるものと認める。