



Title	Measure theory on general linear groups over a higher dimensional local field
Author(s)	森, 政興
Citation	大阪大学, 2023, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/92147
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (森 政興)

論文題名

Measure theory on general linear groups over a higher dimensional local field
(高次元局所体上の一般線形群上の測度論)

論文内容の要旨

本論文では、高次元局所体上の有限次元ベクトル空間および、一般線形群上の測度と積分を定義し、その性質とこの理論の将来への展望について述べた。この論文の前半では、高次元局所体 F 上の有限次元ベクトル空間 F^m に測度を定める。元々、 $m = 1$ の場合には、Ivan Fesenkoと彼の弟子であるMatthew Morrowによる先行研究があるが、このような有限次元ベクトル空間上の加算加法的な測度に関して、本論文の定義が初めてである。Ivan Fesenkoは、 F の可測な部分集合として、 $a + t^\alpha O_F$ ($a \in F, \alpha \in \mathbb{Z}^n$) という部分集合を採用した。ここで、 n は F の局所体としての次元であり、 O_F はその階数 n の付値環である。このような付値環は、局所コンパクトな位相体である 1 次元局所体のコンパクト部分環の引き戻しである。本論文では、 F^m の可測集合として

$T \begin{pmatrix} a_1 + t^{\alpha_1} O_F \\ \vdots \\ a_s + t^{\alpha_s} O_F \end{pmatrix}$ のような集合を採用する。ここで $T : F^s \rightarrow F^m$ は線形全射であり、 $a_1, \dots, a_s \in$

$F, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{Z}^n$ である。本論文では、このような集合を可測集合と呼び、その測度を

$||\text{Det}(T \text{diag}(t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_s}))||$ と定義する。ここで現れる行列 $T \text{diag}(t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_s})$ は正方行列ではないが、左

側から $GL_m(O_F)$ の元を、右側から $GL_s(O_F)$ の元を掛けることで、 $T \text{diag}(t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_s})$

を $(1,1), \dots, (m,m)$ 成分以外すべて 0 であるようにできる。それらの成分を掛けた付値の絶対値として、

$||T \text{diag}(t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_s})||$ を定義することで、可測集合の測度を定義することができる。続いて本論文では、可測関数とその積分

を定義し、この積分の値が、逐次的分として積分の順番に依存せずに関わる。すなわち、任意の可測関数 f に対して、

$$\int_{F^m} f(x) dx = \int_F \int_F \cdots \int_F f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m$$

が成り立つ。さらにこの積分は、Fesenkoが指摘した加算加法性を持つことも述べられている。本論文の後半では、この有限次元ベクトル空間上の測度と積分を利用することで、一般線形群 $GL_d(F)$ 上の測度と積分を定義する。まず、行列代数 $M_d(F)$ がベクトル空間として、 F^{d^2} と同型であることに注意する。このとき $M_d(F)$ の任意の可測集合 A と $g \in GL_d(F)$ に対して

$$\mu(gA) = \mu(Ag) = ||\det(g)||^d \mu(A)$$

が成り立つ。この性質により、 $GL_d(F)$ 上の両側不変な測度を考えることができる。本論文では、 $GL_d(F)$ 上の関数が可測であることをその関数を $M_d(F)$ 上の関数へと零延長したとき $M_d(F)$ 上の可測な関数であることとして定義する。また、 $GL_d(F)$ 上の可測関数の積分を

$$\int_{GL_d(F)} f(x) dx = \int_{M_d(F)} f(x) ||\det(x)||^{-d} dx$$

として定義すれば、これは両側不変積分になる。このような積分が加算加法性を満足することも本論文では、証明されている。このように、本論文は、高次元局所体上の一般線形群の測度論を構成し、このような理論が他の代数群、例えば放物型部分群などにも存在する可能性を示している。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (森 政興)			
論文審査担当者	(職)		氏 名
	主 査	教授	渡部 隆夫
	副 査	教授	中村 博昭
	副 査	准教授	森山 知則
	副 査	准教授	太田 和惟
	副 査	教授	安田 正大 (北海道大学)

論文審査の結果の要旨

本論文は、高次元局所体で定義された一般線形群上での測度と積分論の構築を主結果とする。高次元局所体とは、ある自然数 n に対する n 次元局所体のことであり、有限体を 0 次元局所体として、 $n-1$ 次元局所体を剰余体に持つ完備離散付値体を n 次元局所体とよぶことにより、高次元局所体が帰納的に定義される。とくに 1 次元局所体とは、いわゆる非アルキメデス局所体のことに他ならない。 n 次元局所体の研究は、1970 年代後半の加藤和也および Parshin による局所類体論の高次元化により始まり、高次元局所体上の測度論の研究は、2005 年の Fesenko による論文により本格的に始まった。

1 次元局所体については、局所類体論を非可換化・一般化する Langlands プログラムが現在に至るまで盛んに研究され、多くの成果が得られている。それには局所コンパクト群上の不変測度 (Haar 測度) の理論が 20 世紀前半に充分整備されていたことが大きな役割を果たした。すなわち、局所 Langlands プログラムでは、 1 次元局所体上の簡約代数群の表現論が関係しており、 1 次元局所体が局所コンパクト位相体であることから、その上で定義された簡約代数群は局所コンパクト群になる。不変測度による積分論を使うことにより、簡約代数群の無限次元表現から、局所 Langlands プログラムにおける基本的要素である局所ゼータ積分や Whittaker 模型、Jacquet 積分等が定義され、研究が進展してきた。一方 n が 2 以上の場合は、 n 次元局所体上の簡約代数群の構造論・測度論・表現論についての研究がまだきわめて少ないという状況にある。 1 次元局所体上の理論を雛形とみれば、高次元局所体上の代数群における測度論の整備は不可欠である。

本論文で森政興氏は、一般の n 次元局所体 F に対し、 d 次一般線形群 $GL(d, F)$ 上の測度と積分の理論を構成した。 $GL(d, F)$ 上の測度論については、ふたつの先行研究があり、ひとつは Morrow (2008, 2010) によるもの、もうひとつは $n=d=2$ に限定した場合の Waller (2019) によるものである。しかし、Morrow の理論は抽象的な内容にとどまるため具体的な計算には適さず、また Waller の研究は、積分できる関数の形が特殊なものに限られていることから、いずれの先行研究も応用するためには基礎が不十分という弱さがあった。森氏は、まず F 上の有限次元ベクトル空間における可測集合の適切な定義について精査をし、集合論的代数操作と適合するような可測集合族を与えることに成功した。次いでこの可測集合族をもとに複素数体上相対的な n 次元局所体に値をとる可測関数の積分論を構築し、Fubini の定理が成り立つことを示した。また $GL(d, F)$ を d の 2 乗を次元とするベクトル空間の部分集合とみなすことにより、 $GL(d, F)$ およびその標準放物型部分群上での不変測度を構成し、先行研究の欠点を克服する積分論が展開できることを示した。以上の結果は、高次元局所体上の代数群の積分論整備に向けた重要な一歩を与える。よって、本論文は博士 (理学) の学位論文として十分価値あるものと認める。