



Title	Studies on relative invariants and automorphism groups of cyclic covering fibrations
Author(s)	赤池, 広都
Citation	大阪大学, 2023, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/92148
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論文内容の要旨

氏 名 (赤池 広都)	
論文題名	Studies on relative invariants and automorphism groups of cyclic covering fibrations (巡回被覆ファイバー曲面の相対不変量と自己同型群の研究)
論文内容の要旨 ファイバー曲面とは、非特異射影曲面から非特異射影曲線への全射正則写像で、連結なファイバーを持つものである。本論文は、ファイバー曲面の自己同型群に関する研究である。射影多様体の自己同型群の位数は、古くから研究されている。絶対的な状況においては、自己同型群の位数に関してさまざまな結果が知られている。しかし相対的な状況、例えばファイバー曲面に関して知られていることは数少ない。本論文では、線織面及び楕円曲面上の巡回被覆ファイバー曲面それぞれに対して、相対標準因子の自己交点数、被覆次数、一般ファイバーの種数からなる式により自己同型群の位数を評価した。本論文は、六つの章から構成される。 第一章は、巡回被覆ファイバー曲面の基本性質及び、相対数値不変量の局在化の考察である。巡回被覆ファイバー曲面の相対標準因子の自己交点数は、ファイバーから定まる量(局在化された相対標準因子の自己交点数と呼ぶ)の和であらわせることが複素幾何により知られていた。本論文では、さらに細かくファイバー上の点から定まる量に局在化した。これにより線織面及び楕円曲面上の巡回被覆ファイバー曲面の両方に対して、局在化された相対標準因子の自己交点数を、分岐跡の特異点から定まる量により下から評価した。 第二章は、巡回被覆ファイバー曲面の自己同型群に関する考察である。巡回被覆ファイバー曲面の自己同型群は、ファイバー方向の作用のなす部分群と底曲線上の自己同型群へ分解する。ファイバー方向の作用がなす部分群を、それぞれ線織面、楕円曲面へと降下させる。こうして、線織面上または楕円曲面上の自己同型群が誘導される。誘導された自己同型群が、局在化された相対標準因子の自己交点数へ与える影響の解析へと帰着する。楕円曲面の場合は、自己同型群から平行移動に相当する作用を見出し、これを用いて特異ファイバーへの作用を解析した。 第三章は、線織面上の巡回被覆ファイバー曲面における議論である。線織面上の自己同型群が、局在化された相対標準因子の自己交点数へ与える影響を解析する。局在化された相対標準因子の自己交点数は、分岐跡に由来する量から定まるので、分岐跡の局所解析的分枝とファイバーの交わり方ごとに場合分けして考察する。 第四章は、楕円曲面上の巡回被覆ファイバー曲面における議論である。平行移動に相当する自己同型群が、局在化された相対標準因子の自己交点数へ与える影響を解析する。平行移動に相当する作用の解析を用いつつ、分岐跡の局所解析的分枝とファイバーの交わり方ごとに場合分けして考察する。 第三章及び第四章を通して、線織面上または楕円曲面上の自己同型群の位数が、局在化された相対標準因子の自己交点数によって上から評価される。これを用いて、第五章にて主結果の証明が完了する。 第六章は、高い位数の自己同型群を持つ線織面上巡回被覆ファイバー曲面及び双楕円曲線束を構成する。	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 （ 赤 池 広 都 ）			
論文審査担当者	(職)		氏 名
	主 査	教 授	高 橋 篤 史
	副 査	教 授	安 田 健 彦
	副 査	教 授	吉 永 正 彦
	副 査	教 授	今 野 一 宏 （関西大学）
	副 査	准 教 授	藤 田 健 人

論文審査の結果の要旨

非特異射影曲面から射影曲線へのファイバーが連結な全射をファイバー曲面という。ファイバー曲面に付随する重要な不変量（相対標準束の自己交点数や相対オイラー標数）及びそれらの相互関係に着目し、ファイバー曲面の幾何学的諸性質を導出する試みは「ファイバー曲面の地誌学」と呼ばれ、1980 年代に Xiao Gang により創始され現在に至るまで盛んに研究されている。一般に、多様体の図形としての対称性の高さはその自己同型群の大きさ（位数）に端的に反映されるが、本論文はファイバー曲面の有限自己同型群の位数に対して既知の数値不変量を用いて具体的な上限を与えることを目指し、対称性の高いファイバー曲面の幾何学的特徴を特異ファイバーを通して抽出しようとするものである。

超楕円的なファイバー曲面の場合には、相対的自己同型群の任意の有限部分群の位数は相対標準束の自己交点数を用いて上から評価できることが 1998 年に荒川達也によって示され、その後 Zijie Chen によって精密化されている。そこで本論文では、超楕円曲線束の自然な一般化に相当する (g, h, n) 型の相対極小ファイバー曲面に着目し、特に $h=0, 1$ の場合に、荒川や Chen の定理の拡張、つまり上述の有限部分群の位数に対する相対標準束の自己交点数を用いた精密な評価、を行った。ここで (g, h, n) 型ファイバー曲面とは、一般ファイバーの種数が h のファイバー曲面の n 次巡回分岐被覆として得られる、一般ファイバーの種数が g のファイバー曲面のことである。 $h=0$ のときは線織面の、 $h=1$ のときは楕円曲面の巡回分岐被覆であるから、 $n=2$ ならばそれぞれ超楕円曲線束、双楕円曲線束という重要なクラスとなる。

ファイバー曲面の自己同型は、構造射を保つという意味で「垂直な部分」と底曲線の自己同型と同一視できる「水平な部分」に分解される。このうちで本質的なのは垂直な部分であり、これを研究することはファイバー芽の自己同型を研究することに等しい。従って、上述のような位数評価の定理の証明にあたっては、榎園誠によって観察された、相対標準束の自己交点数の「局在化」が重要になる。ファイバー曲面の研究において、相対標準束の自己交点数は基本的な不変量だが、この値を任意のファイバー（芽）に対する不変量として局在化させ、元の大域的な不変量をそれら局所不変量の総和として復元しよう、というアイデアである。本論文ではこの局在化のアイデアが強く推し進められている。従来のはファイバー芽に関する局在化だったが、それをさらに精密にし、特異ファイバーの各点の無限小近傍の情報のみから相対標準束の自己交点数を導出できるという強力な定理を導出した。その結果、例えばファイバー芽へ局在化した不変量の非負性が示されるなど非自明な命題が得られ、相対標準束の自己交点数を解析するために必要な基礎理論の整備・進展に寄与することとなった。

$(g, 1, n)$ 型つまり楕円曲面の巡回被覆ファイバー曲面の場合、自己同型群の位数評価はベースの楕円曲面が特異ファイバーを持ちうるので評価は非常に難しいとされていたが、上述の基礎理論の整備及び、多くのステップを要する精密な特異ファイバーや分岐因子の配置の場合分けを組み合わせることで、所望の評価式が導出された。 $(g, 0, n)$ 型の場合には、ベースの線織面に対して無数に存在する相対極小モデルのうちから標準的なひとつを、問題の自己同型群に関して同変的な有理写像のみを用いて選びとることが可能であることを示す必要が生じる。

このように、本論文は当該研究分野に新しい知見をもたらすものである。また、記述は明瞭で、学術的に高く評価できる。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。