



Title	Stability conditions for Dynkin quivers
Author(s)	大谷, 拓己
Citation	大阪大学, 2023, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/92149
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

論 文 内 容 の 要 旨

氏 名 (大 谷 拓 己)	
論文題名	Stability conditions for Dynkin quivers (Dynkin 簾に対する安定性条件)
論文内容の要旨	
Dynkin 簾は、有限次元代数の表現論において最も基本となる対象であり、特異点論・代数幾何学・Lie 代数の理論など多くの分野で登場する。Dynkin 簾と ADE 特異点の間には様々な対応や構造の同値性が存在し、古くから研究されている。近年では、Frobenius 多様体や三角圏の同型性・同値性に関する研究が発展している。Frobenius 多様体は、複素多様体上に定まる複素微分幾何学的構造の一つであり、Dubrovin によって導入された。齋藤恭司と Dubrovin により、Dynkin 簾が定める Frobenius 多様体は、ADE 特異点の原始形式が定めるものと同型であることが知られている。また、Seidel により、Dynkin 簾の導来圏と ADE 特異点の導来深谷圏の圏同値性が証明されている。ミラー対称性の観点からは、Frobenius 多様体の同型性が、三角圏の同値性から導かれると期待されている。しかしながら、Frobenius 多様体の幾何学的不変量には、圏論的な導出方法が知られていないものが数多くある。この課題の解決には、三角圏の安定性条件が重要であると考えられる。 三角圏の安定性条件の概念は Bridgeland により導入された。安定性条件全体のなす空間は複素多様体の構造を持つことが知られている。三角圏に対して Frobenius 多様体の幾何学的不変量を調べるためには、安定性条件の空間上に Frobenius 構造を構成することが重要な課題となる。この課題の解決に向けて、Dynkin 簾の導来圏を中心に、安定性条件の空間の全体構造、及び、安定性条件の構成について研究を行った。 一つ目の結果は、非輪状簾の導来圏上の安定性条件 σ に対する、σ-例外生成列の存在性に関する内容である。Macri は、安定性条件の空間のホモトピー型を調べるために、例外生成列に付随する安定性条件を構成した。この研究を基に、Dimitrov-Katzarkov は安定性条件 σ に付随する例外生成列、すなわち σ-例外生成列を導入した。著者は、特定の条件をみたす非輪状簾に対し、導来圏の核が標準核の単純傾斜の繰り返しによって得られるとき、その核は Ext-例外生成列によって生成されることを証明した。その系として、σ-例外生成列の存在性に関する十分条件が得られた。とくに、Dynkin 簾の導来圏の場合には、任意の安定性条件に対して σ-例外生成列が存在することを証明した。さらに、Dynkin 簾の導来圏の安定性条件の空間は、加群圏に付随する例外生成列のなす有限個の開集合で被覆されることを証明した。 二つ目の結果は、鎖型可逆多項式の Γ-整構造に関する内容である。代数多様体に対する Γ-整構造は入谷氏によって導入された。Γ-整構造は、ミラー対称な空間と整合的になる整構造であり、ミラー対称性において重要な役割を果たす。著者は、高橋氏との共同研究で、鎖型可逆多項式に対して Γ-整構造を導入した。また、三角圏から誘導される自然な基底を用いて Γ-整構造の組み合わせ論的記述を与え、Γ-整構造がミラー対称性と整合的であることを証明した。本研究の応用として、ADE 型多項式の場合に、Gepner 安定性条件の中心電荷が、原始形式の指数周期写像となることを証明した。	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 （大谷 拓己）		
論文審査担当者		(職)
	主 査	教授
	副 査	教授
	副 査	教授
	副 査	准教授
	副 査	准教授
	副 査	准教授
		氏 名
		高橋 篤史
		安田 健彦
		吉永 正彦
		大川 新之介
		藤田 健人
		池田 暁志（城西大学）

論文審査の結果の要旨

Dynkin 図形は、代数幾何学・表現論・特異点論等をはじめとする多様な数学分野に登場する非常に興味深い対象である。これまで極めて多くの研究がなされているが、これまでになかった視点により、今なお新たな結果が生まれているだけでなく、既存の知見により深い理解がもたらされ続けている。

本論文では、ミラー対称性と Bridgeland 安定性条件という視点・手法により、Dynkin 図形の持つ数学的本質の一端を明らかにしている。ミラー対称性とは、代数的対象と幾何学的対象を入れ替える対称性のことであり、理論物理学における超弦理論にその源流を持つ。とくに、複素構造の変形に対するミラー双対概念の存在が期待されていたが、Douglas 氏による D-brane の安定性の着想を基に、Bridgeland 氏によって、三角圏上のある代数的構造、安定性条件、として定式化され、三角圏を一つ固定した際、その上のすべての安定性条件のなす集合が複素多様体となることが示された。この複素多様体、安定性条件の空間、の位相空間および複素多様体としての構造・性質を解明することが、現在非常に重要な課題となっている。大谷拓己氏は、安定性条件の空間上に自然に存在することが期待される、Frobenius 構造という微分幾何学的構造の観点から、この課題に継続的に取り組んできた。とくに、Dynkin 図形の圏化、Dynkin 簍の有限次元表現の有界導来圏、における完全例外列（の集合）が持つ代数構造を解析し、その安定性条件の空間の位相構造について重要な知見を得た。これが本論文における主結果である。

具体的には、King 氏と Qiu 氏によるアーベル圏における単純傾斜を、射の空間の全次元に関する「条件」を巧妙に設定することで、完全例外列の互換（mutation）と整合的になるよう、三角圏において記述することに成功した。この「条件」は樹木状の簍の有限次元表現の有界導来圏等の三角圏に対して満たされ、とくに Dynkin 簍の有限次元表現の有界導来圏に対しても成り立つ。この記述によって、「任意の安定性条件に対して、半安定な対象からなる完全例外列が存在する」という、Dimitrov 氏と Katzarkov 氏による予想を肯定的に解決した。この結果の応用として、「安定性条件の空間が完全例外列で添え字付けされる開集合による被覆を持つ」という成果をもたらした。これは特異点理論（ADE 型特異点の普遍開折の研究）における結果と強い類似性があり、ADE 型特異点に対するミラー対称性の数学的理解をさらに深めた。

主結果およびその帰結に対する証明自体は、圏における射の空間の次元計算および既存の結果の非自明な組み合わせであって、結果として比較的初等的なものではあった。しかしながら、その着想の原点にはミラー対称性と特異点理論の伝統に基づく思想があり、独自性の高い内容である。もちろん、安定性条件の幾何学的研究に対する意義のある結果であり、今後の進展も大いに期待されるものである。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。