



Title	Some problems concerning quasi-hereditary algebras
Author(s)	後藤, 悠一郎
Citation	大阪大学, 2023, 博士論文
Version Type	
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/92150">https://hdl.handle.net/11094/92150</a>
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉</a> 大阪大学の博士論文について <a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed">〈/a〉</a> をご参照ください。

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 論文内容の要旨

氏名 ( 後藤 悠一朗 )

論文題名

Some problems concerning quasi-hereditary algebras  
(準遺伝代数に関するいくつかの問題)

## 論文内容の要旨

準遺伝代数は、多元環と原始冪等元の添え字に関する全順序の組で、その順序から定まる標準加群と真標準加群が等しいことと、多元環が真標準加群により濾過されることで定義される。ここで後者のみを満たす多元環は、真標準濾過代数と呼ぶ。Dlab-Ringelは、すべての全順序で準遺伝代数になる多元環は、遺伝的であること、またその逆も成り立つことを示した。したがって、与えられた多元環がどの順序において準遺伝代数となるかを考える。以後、添え字に関する順序の代わりに置換を考える。ある多元環が置換された添え字付けに関して準遺伝的であるときに、その置換は準遺伝性を与えと言ひ、同じ標準加群を与える置換の集合を準遺伝構造と呼ぶ。

準遺伝代数は、ボックスを用いても研究されている。ボックスは、基本的多元環とその上の両側加群かつ余代数のペアで定義され、Drozdのタイム・ワイルド二分化定理において用いられた。Koenig-Kulshammer-Ovsienkoは、準遺伝代数と順ボックスの1対1対応を、標準濾過加群圏とボックスの表現圏の同値により示した。

本論文の前半は、準遺伝性を与える置換全体が持つ性質に関して述べる。まず、ある置換が準遺伝性を与えるときに、隣接互換をかけて表される置換が再び準遺伝性を与える為の判定条件を、標準加群と余標準加群に関して特徴づける。次に、準遺伝性を与える2つの置換は、連結することを示す。ここで、2つの置換が連結であるとは、次を満たすことである。「ある置換の列で、与えられた2置換を両端に持ち、隣同士の商は隣接互換で表せ、現れるすべての置換が準遺伝性を与えるものが存在する。」この結果により、ある準遺伝性を与える置換に対して、先で述べた判定を繰り返し行うことで、すべての準遺伝性を与える置換を得ることができる。また、準遺伝性を与える置換が2つ得られているとき、ある意味で2つの間にある置換もまた準遺伝性を与えることが示された。

本論文の中盤では、準遺伝構造の個数に関する結果を示す。特定の道代数に対して、準遺伝構造の個数をカタラン数を用いて表した。これは、Flores-Kimura-Rognerudにより与えられた、Dynkin ADE型筋の道代数における結果の一般化となっている。

本論文の後半では、順ボックスと準遺伝代数に関する関係を真標準濾過代数の場合に一般化させる。真標準濾過代数からボックスを構成する際に、2つの問題に直面する。1つ目は、一般に真標準加群のExt代数が、無限次元であること。2つ目は、真標準濾過代数から導かれるボックスについて、その根底にある多元環もまた無限次元となる可能性があること。真標準加群のExt代数の代わりにその部分空間を用いることで、これらの問題を解決した。これにより、真標準濾過代数とループ付き順ボックスにおいて、真標準濾過加群圏とボックスの表現圏の同値を持つことを示した。

## 論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( 後藤悠一郎 )		
	(職)	氏 名
論文審査担当者	主 査	教授 宇野勝博
	副 査	教授 高橋篤史
	副 査	教授 渡部隆夫
	副 査	教授 有木 進

## 論文審査の結果の要旨

学位申請者は、本論文で、quasi-hereditary algebra (擬遺伝的代数) について次の3つの問題を考察している。

- (1) 既約加群の同型類が  $n$  個である有限次元代数が quasi-hereditary algebra であるかどうかは、既約加群  $n$  個の順序付けによる。本論文では、この順序が全順序の場合を考察し、quasi-hereditary algebra となる全順序が二つ与えられたとき、この二つを置換と同一視すると一方が他方に隣接互換の積をかけて得られる関係が存在することを証明している。この結果から、quasi-hereditary algebra となる全順序は、隣接互換の積によって定義される連結関係についての連結集合になることがわかる。これは、連結性の概念の発見を含め、学位申請者による独創的な結果である。
- (2) 有限次元代数に quasi-hereditary algebra 構造が入る場合、その quasi-hereditary algebra の構造に標準加群を用いた同値関係が定義される。有限次元代数の生成元等が有限ディンキン図形で与えられている場合、2022年にこの同値類の個数が計算されているが、学位申請者はカタラン数のより巧妙な計算を実行することで、この結果をさらに一般的な有限次元代数の場合に拡張している。
- (3) Quasi-hereditary algebra の森田同値類と directed Bocs と呼ばれる代数構造の加群圏の同値類の間に全単射があることが2014年に知られているが、学位申請者は、quasi-hereditary algebra をより一般的な代数構造で、また、directed Bocs を one-cyclic directed Bocs で置き換えた場合にも同様の全単射が存在することを示した。この場合、元の場合と同じ方法は使えないが、ある種の構造に着目することで、証明に成功しており、そこでは極めて複雑な考察と計算が用いられている。

学位申請者は、至る所に新たなアイデアと複雑で巧妙な方法を用いることで上の3つの結果を得ている。また、これらの結果自体の数学的意味も大きい。よって、本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値あるものと認める。