The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Boundedness of bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols
Author(s)	至田, 直人
Citation	大阪大学, 2023, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/92151
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、大阪大学の博士論文についてをご参照ください。

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　　至田　直人　　）	
論文題名	Boundedness of bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols （エキゾチック・クラスにシンボルを持つ双線形擬微分作用素の有界性について）

論文内容の要旨

本論文は、双線形ヘルマンダークラスにシンボルをもつ双線形擬微分作用素について研究を行ったものであり、とくにエキゾチック・クラスと呼ばれるクラスにシンボルを持つ場合を考察している。このクラスにシンボルを持つ双線形擬微分作用素のルベーグ空間の枠組みにおける有界性定理は、Bènyi-Torres(2004)の研究を皮切りに、Michalowski-Rule-Staubach (2013), Bènyi-Bernicot-Maldonado-Naibo-Torres(2014),Miyachi-Tomita (2013), Miyachi-Tomita (2018,2019),Kato-Miyachi-Tomita (2022)などによって整備されてきた。本論文の一つ目の目的はこれらの結果を関数空間の観点から拡張及び改良することであり、二つ目の目的は上で述べた先行研究において仮定されているある条件の必要性について論じることである。以下得られた結果を述べる。

(1) 一つ目の結果は、エキゾチック・クラスの特別な場合である(0,0)クラスにシンボルをもつ場合のソボレフ空間における有界性を考察する。線形の場合、このクラスにシンボルをもつ擬微分作用素のソボレフ空間上での有界性は、そのルベーグ空間上での有界性とシンボルクラスの symbolic calculus から容易に導かれる。しかしながら、双線形の場合には(0,0)クラスにシンボルをもつ双線形擬微分作用素のルベーグ空間における有界性が得られているとしても、線形の場合と同様の議論ではソボレフ空間の枠組みで有界性を得ることはできない。本論文では、(0,0)クラスよりも真に広いクラスにシンボルをもつ場合の双線形擬微分作用素のルベーグ空間での有界性を証明することでこの困難を克服した。また、双線形の場合には、ソボレフ空間における有界性を保証するためには関数の可微分性を表す指数になんらかの制限が必要であることを示した。

(2) 二つめの結果は、(0,0)クラスに属するシンボルをもつ双線形擬微分作用素について、ベゾフ空間の枠組みでの有界性が考察したものである。線形の擬微分作用素のベゾフ空間上での有界性は、Sugimoto (1988)やPark (2019)などで与えられているが、本章の主結果はこれらの結果を双線形の場合に拡張したものとみなすことができる。さらに、ベゾフ空間における有界性を考える場合においても、(1)で現れたものと同様の指数の制限が必要であることを明らかにした。また、ベゾフ空間とルベーグ空間との間の包含関係を考察することにより、既に知られている Kato-Miyachi-Tomita (2022)の結果をいくつかの指数の範囲において改良できることがわかる。

(3) 三つ目の結果は、双線形作用素のルベーグ空間におけるL^p×L^q→L^r有界性を扱う際にしばしば仮定される条件"1/p + 1/q = 1/r"について考察したものである。双線形作用素の最も基本的な例は二つの関数に対してそれらの積を対応させるものであり、この観点からルベーグ空間の指数の間にこの条件を課すことは自然である。しかしながら、エキゾチック・クラスにシンボルを持つ場合にはこの条件が必要であるかどうかは定かではない。実際、Kato-Miyachi-Tomita (2022)では(0,0)クラスに属するシンボルをもつ双線形擬微分作用素に対してはこの条件を課さずとも上記有界性が得られることが証明されている。本論文では臨界的な状況において、(0,0)クラスを除いたエキゾチック・クラスにシンボルをもつ双線形擬微分作用素の有界性を考える場合には、条件"1/p + 1/q = 1/r"が必要であるということを明らかにした。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　至田　直人　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	冨田 直人
	副 査　教授	片山 聡一郎
	副 査　教授	土居 伸一
	副 査　准教授	水谷 治哉

論文審査の結果の要旨

本論文は、双線形擬微分作用素の有界性を Sobolev 空間や Besov 空間上で研究したものである。擬微分作用素は現在の一般的な偏微分方程式を扱う際には必要不可欠な道具と言われている。一方、2000 年頃から実函数論の分野では、線形作用素に対して築き上げられた理論を多重線形作用素へと拡張する研究が主な話題の一つとなっている。これらの背景の中、本論文では擬微分作用素論を線形から双線形の理論へと拡張することを目指し、またそれが単なる一般化ではなく、線形と双線形との違いを表す結果を得ることにも成功している。

線形の擬微分作用素論において Hörmander のシンボルクラス$S^m_{\rho,\delta}$は基本的である。$\rho=\delta=0$ のケースは exotic symbol の典型例となり非常に興味深いのだが、この場合、A. Bényi - R. Torres (2004)は線形の擬微分作用素に対する基本定理である Calderón-Vaillancourt の定理から当然期待されるべき有界性が双線形の状況では成り立たないという予想外の結果を与えた。それ以後、線形の $\rho=\delta=0$ の場合に相当する$BS^m_{0,0}$クラスの双線形擬微分作用素の Lebesgue 空間上での有界性が研究された。本論文では、Lebesgue 空間の枠組みを超え、Sobolev 空間や Besov 空間において、双線形 Hörmander クラス$BS^m_{0,0}$にシンボルを持つ双線形擬微分作用素の有界性が議論されている。この方向での研究がこれまでにあまり行われなかった理由は、線形の場合の手法がうまく適用できないことであろう。線形の場合には、symbolic calculus と呼ばれる擬微分作用素の合成に関する公式を使うことにより、Sobolev 空間上での有界性を Lebesgue 空間上での有界性から導くことができる。しかしながら、双線形の枠組みでは、Sobolev 空間や Besov 空間を定義する際に現れる Bessel potential と、$BS^m_{0,0}$にシンボルを持つ擬微分作用素の合成が双線形 Hörmander クラスでは閉じていないという困難が生じてしまう。そのような困難を克服し、本論文において得られた双線形擬微分作用素の有界性に関する結果は興味深く基本的である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。