様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　　辻　寛　　）	
論文題名	Some geometric inequalities in view of convex geometry （凸幾何学に関連する幾何学的不等式）

論文内容の要旨

本論文では，凸幾何学においてよく知られている幾何学的不等式の中から二つのトピックを取り扱っている。一つ目のトピックはボレルの補題と呼ばれる不等式であり，二つ目のトピックはブラシュケ・サンタロー不等式とマーラー予想に関連する不等式である。それぞれの詳細について以下で述べる。

一つ目のトピックでの目標は，ボレルの補題を重みつきリッチ曲率の下限の条件を備えた重みつきリーマン多様体上に拡張することである。本論文内ではこの不等式をdilation不等式とよんでいる。凸幾何学の文脈において知られているボレルの補題は，ユークリッド空間内の原点対称な凸体の体積とそれを相似拡大した凸体の体積の関係を，相似比を用いて表す不等式である。ただし，ここでの体積はルベーグ測度によって測られるとは限らない。とくに凸幾何学においては，対数凹な確率測度の場合にどのような関係が成り立つかが重要となる。この場合，原点対称な凸体を相似拡大した集合の補集合の体積は相似比に関して指数減衰することが知られている。この事実は無限次元空間上でのノルムのKahane-Khinchineの不等式の構成や等周不等式の構成に応用されてきた。一方で，対数凹な確率測度を備えたユークリッド空間は，その空間の重みつきリッチ曲率の非負性に同値であることが知られている。ゆえに本論文では重みつきリッチ曲率が非負とは限らない空間上での最適なdilation不等式の構成に取り組んでいる。また本論文ではdilation不等式の関数不等式への応用も与えている。とくに本論文ではdilation不等式と相対エントロピー及びツァリスエントロピーとの新しい関係を構成した。

二つ目のトピックでの目標は，volume productと呼ばれる幾何学的な量の新しい下界を与えることである。Volume productとは，ルベーグ測度での原点対称な凸体の体積とその偏極体の体積の積のことを指す。この幾何学的な量は，凸体が球体のときに最も大きくなることが知られており，この事実を表現する不等式はブラシュケ・サンタロ―不等式と呼ばれている。一方で，volume productは凸体がキューブの場合に最も小さくなることが，空間次元が２次元と３次元の場合のみに限り知られている。しかしながら，同様の現象が一般の次元において成り立つかどうかは未解決であり，この問題は今日ではMahler予想という名前で知られている。本論文では，与えられた凸体の境界の主曲率の一様な下限に応じてvolume productがどの程度大きくなるかを定量的に与えた。とくに，凸体が一様にある程度曲がっていればMahler予想が正しいことを見出した。また本論文では，volume productをガウス測度に基づく熱流と新たに関連づけることに成功した。このような関係性は現在までに明確には知られておらず，本論文ではその関係性を利用することによってvolume productの新しい下界を与えた。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏名（	辻 寛	）

		（職）	氏名
論文審査担当者	主 査	教授	太田 慎一
	副 査	教授	石田 政司
	副 査	教授	後藤 竜司
	副 査	准教授	松本 佳彦

論文審査の結果の要旨

辻氏による博士論文は、凸幾何学に起源を持ち体積の評価に関連する不等式の研究で得られた成果をまとめたものである。

論文の前半では、集合の相似拡大による体積の増え方に関する dilation 不等式を扱った。これは凸幾何学でBorellの補題として知られている幾何学的な不等式を重みつきリーマン多様体に一般化したものである。Borell の補題はユークリッド空間上の対数凹な確率測度（例えばガウス分布）に関するもので、重みつきリーマン多様体の文脈では∞-リッチ曲率が 0 以上である状況に対応する。リーマン多様体のような曲がった（非線形な）空間では相似拡大は定義できないが、ユークリッド空間での線分に当たる測地線を用いて、Klartag（2017）は dilation 不等式を N-リッチ曲率が 0 以上の重みつきリーマン多様体へ拡張した。重みつきリーマン多様体はリーマン多様体とその上の測度の組であり、重みつきリッチ曲率はリッチ曲率を測度に応じて変形したもので、実パラメータ N（∞になることもある）を含む。辻氏は、Klartag の dilation 不等式を重みつきリッチ曲率の下限が 0 以外の場合に拡張し、更に等号を満たす空間（モデル空間）を具体的に与えた。また、dilation 不等式の応用として、重みつきリッチ曲率が 0 以上である重みつきリーマン多様体に対してエントロピーに関する関数不等式を示した。∞-リッチ曲率が正定数以上の重みつきリーマン多様体では対数ソボレフ不等式が成り立つことがよく知られているが、0 以上では成り立たない。辻氏の示した関数不等式は、重みつきリッチ曲率が 0 以上という状況でも、適切な条件を満たす測度（またはその密度関数）については対数ソボレフ不等式が成り立つことを明らかにした。

論文の後半では、n 次元ユークリッド空間内の凸体の volume product に関する不等式を扱った（中村昌平氏（大阪大学）との共同研究を含む）。volume product は凸体とその偏極体の体積の積であり、Mahler 体積とも呼ばれる。Mahler 体積は球体や楕円体の時に最大であることが古典的に知られている。一方、最小値は n 次元立方体で与えられることが予想されているが、これは Mahler 予想と呼ばれ、重要な未解決問題である。辻氏は、境界の曲率が上下から押さえられた凸体に対して Mahler 体積の下からの評価を与え、特に曲率が球面に近い場合には Mahler 予想が成り立つことを示した。その証明は、Mahler 体積の下からの評価に対応する関数不等式を導入し、それをガウス分布に対応する熱流（Ornstein-Uhlenbeck 半群）を通して解析する新しいアイディアに基づくものである。Mahler 予想の完全な解決にはまだ遠いが、新しいアプローチとして注目に値する。

辻氏の研究は、凸幾何学とリーマン幾何学の境界に位置するものであり、dilation 不等式では凸幾何学に由来する問題をリーマン幾何学の枠組に拡張し、Mahler 予想に関する結果ではリーマン多様体上の幾何解析学でも用いられる熱流を用いた解析を活用した。このような分野横断的な研究は近年活発になっているが、辻氏の研究はその中で国際誌に出版されるなど既に高く評価されている。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。