様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　　　　　宮本　　恵介　　　　　）	
論文題名	Studies on the Sarkisov program and minimal model theory (サルキソフ・プログラムと極小モデル理論に関する研究)

論文内容の要旨

極小モデル理論とは、与えられた代数多様体に対し、双有理同値で構造が「簡単」な別の代数多様体を構成する理論である。そして、そのためのアルゴリズムを極小モデルプログラムという。本論文は、極小モデル理論に関連する3つの結果をまとめたものである。

一つ目は、トーリック多様体上でのサルキソフ・プログラムに関する結果である。一般に、極小モデルプログラムのアウトプットである森ファイバー空間は一意的ではない。つまり、同一の代数多様体に対し、極小モデルプログラムを実行しても、いくつかの森ファイバー空間が出力される。サルキソフ・プログラムとは、この2つの双有理同値な森ファイバー空間の間の写像に関する具体的な構造を記述する予想である。これは、1980年代にSarkisov氏、Ried氏やCorti氏らにより高々端末特異点を持つ3次元代数多様体に関して解決された。その後、Hacon氏とM[c]Kernan氏の両名により任意次元の川又対数的端末対まで一般化された。本論文では、Hacon氏とM[c]Kernan氏のアイデアである「モデルの地誌学」を用いることにより、トーリック多様体上でのサルキソフ・プログラムの一般化に成功した。

二つ目は、射影空間の特徴付けである。射影空間は代数幾何学において最も基本的な対象であり、これまでに様々な特徴付けが行われてきた。本論文では、極小モデル理論の観点から擬対数的標準類が数値的正ではない擬対数的標準対が射影空間となるための条件を与える。擬対数的標準対とはAmbro氏、藤野氏により導入された極小モデル理論における特異点のクラスである。そして、半対数的標準対には、自然と擬対数的標準対の構造が入る。これにより、系として半対数的標準対に対しても同様の特徴付けが得られる。これらは、「半標準因子が豊富なファノ多様体で、ファノ指数がそのファノ多様体の次元よりも大きくなれば、射影空間である」という有名な結果の完全な一般化である。この結果は、藤野氏との共同である。

三つ目は、Nakai-Moishezonの豊富性判定法の一般化である。Nakai-Moishezonの豊富性判定法は、Nakai氏、Moishezon氏やKleiman氏によって、完備スキーム上の直線束の場合に証明されている。そして、Campana氏とPeternell氏の両名により射影スキーム上の$\mathbb{R}$-直線束の場合にまで一般化された。この結果をさらに完備スキーム上にまで一般化することは、簡単ではない。実際、彼らのアイデアでは、射影性を欠くことができないからである。本論文では、この一般化、つまり、完備スキーム上の$\mathbb{R}$-直線束に対するNakai-Moishezonの豊富性判定法の証明を与える。Birkar氏による$\mathbb{R}$-カルティエ因子の拡大固定点集合(augmented base loci)の特徴付けを用いることで、非射影な完備スキーム上で証明することを可能にしている。この結果も、藤野氏との共同である。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名（　宮本恵介　）			
論文審査担当者		（職）	氏　名
	主　査	教授	安田　健彦
	副　査	教授	髙橋　篤史
	副　査	准教授	大川　新之介
	副　査	准教授	藤田　健人
	副　査	教授	藤野　修（京都大学）

論文審査の結果の要旨

本論文で、宮本恵介氏はトーリック多様体に対するサルキソフ計画の研究を行い、非常に一般的な設定でサルキソフ計画が正しいことを証明した。また、完備代数多様体上の実直線束に関する中井-モイシェゾンの豊富性判定法と森理論の観点からの射影空間の新しい特徴付けに関しても論じている。

高次元代数多様体論の標準理論である極小モデル理論は、任意の非特異射影代数多様体は極小モデルか森ファイバー空間と双有理同値になると予想する。この予想は現在未解決であるが、多くの重要な場合には肯定的に解決されている。サルキソフ氏は２つの森ファイバー空間の間の双有理変換は初等変換と呼ばれる４つのタイプの双有理写像の合成に分解できると予想した。このサルキソフ氏によるアイデアは、サルキソフ計画と呼ばれている。元々のサルキソフ計画はヘイコン氏とマッカーナン氏によって完全に解決されている。サルキソフ計画は代数多様体の双有理剛性の研究などに深く関わっており、関連する話題は現在も活発に研究されている。

トーリック多様体はトーラス作用をもった代数多様体の一種である。トーリック多様体の様々な性質は組み合わせ論的な記述が可能であり、トーリック幾何学は代数多様体の研究や理論物理学の実験場として頻繁に用いられてきた。トーリック多様体に関する極小モデル理論は、極小モデル理論が誕生した直後にリード氏によって研究された。トーリック多様体についてのサルキソフ計画は松木氏やシュラモフ氏らの仕事によって確立されていた。ただし、これらの先行研究はトーリック多様体の組み合わせ論的な記述を駆使したものであり、初等的ではあるが、適用範囲は限られていた。宮本氏は最近の高次元代数多様体の極小モデル理論の一般論をトーリック多様体に適用することにより、従来考えられていたより遥かに一般的な設定でサルキソフ計画が機能することを証明した。組み合わせ論的な記述を使うことなく、一般論を駆使してトーリック多様体に対するサルキソフ計画を確立した点は評価に値する。今後の応用が期待される結果である。

本論文では、完備代数多様体上の実直線束に関する中井-モイシェゾンの豊富性判定法も論じている。中井-モイシェゾンの豊富性判定法は高次元代数多様体論で基本的な役割を果たす重要な結果である。一方、最近の高次元代数多様体論では、直線束だけではなく実直線束を扱うことが不可欠になっている。完備代数多様体上の実直線束に関する中井-モイシェゾンの豊富性判定法の確立は、一般論の欠を補う重要な成果である。また、擬対数的スキームを使い、森理論の観点から射影空間の新しい特徴付けも証明している。この結果は従来想定されていたより弱い条件で射影空間を特徴付けており、専門家も想定していなかったものである。

この様に、本論文では、高次元代数多様体論のさらなる研究に不可欠な基本的な結果を確立し、今後の高次元代数多様体論の研究で重要な役割を果たすと期待されている。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認められる。