Title	Global existence for some kinds of systems of semilinear hyperbolic equations
Author(s)	程, 明港
Citation	大阪大学, 2023, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/92154
rights	
Note	

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名　（　程　明港　）	
論文題名	Global existence for some kinds of systems of semilinear hyperbolic equations (ある種の半線形双曲型方程式系に対する大域解の存在)

論文内容の要旨

本論文は，非線形波動とKlein-Gordon方程式の連立系(WKG)および異なる伝播速度をもつ半線形波動方程式系(MSW)の初期値問題に対する大域解の存在条件について研究したものである。また，大域解が存在した場合，時間遠方での解の振る舞い(解の漸近挙動)についても考察している。

(単一速度の)非線形波動方程式系の初期値問題に対する局所解の存在はよく知られており，大域解が一般的に存在しないことも知られている。空間次元が4以上の場合，小さな初期値に対する大域解の存在(SDGE)は制約なしに成立するため，以降は空間3次元および空間2次元に限定する。臨界次数の非線形項をもつ場合，SDGEの成立を保証する十分条件として，Klainerman(1986)とChristodoulou(1986)により導入された零条件が有名であるが，零条件よりも弱い構造条件の下でもSDGEが成立することが近年明らかになった。Katayama-Matoba-Sunagawa(2015)とKatayama-Matsumura-Sunagawa(2015)により導入されたKMS条件はその弱い構造条件の1つである。他方で，非線形Klein-Gordon方程式系については，質量項の存在により解の一様減衰率が波動よりも速いため，非線形項が波動に関する臨界次数であっても制約なしにSDGEが成立する。

(WKG)と(MSW)は，波動を含む連立系であるため，SDGEが成立するにはもちろん構造条件が必要である。(WKG)については，Katayama(2012)とAiguchi(2017)により，波動単独の場合には零条件と一致し，Klein-Gordon単独の場合には制約なしとなる自然な条件が導入された。(MSW)についても，Hoshiga-Kubo(2000)とYokoyama(2000)により，単一速度の場合に零条件と一致する自然な条件の下でSDGEが成立することが証明された。

本論文では，波動の場合に零条件をKMS条件に弱められたように，(WKG)と(MSW)の場合の制約を弱めることが目標である。また，解の漸近挙動についても考察する。

以下，本論文の構成および各章の概要について述べる。本論文は全五章から構成されている。

第一章では，問題の背景ならびに動機について述べる。

第二章では，Klein-Gordon単体の場合には制約にならず波動単独の場合にはKMS条件と一致する条件，単一速度の場合にはKMS条件と一致する条件を紹介する(以降，単にKMS条件と呼ぶことにする)。また，波動に関する臨界次数の非線形項をもつ場合の(WKG)および(MSW)について，KMS条件の下での大域解の存在と解の漸近挙動に関して得られた研究成果を述べる。本要旨では，詳細を第四章と第五章に記載する。

第三章では，主結果を証明するための準備について述べる。Klainermanにより導入されたベクトル場法を用いるが，波動単独の場合に比べ(WKG)と(MSW)では有効に働くベクトル場が限られているため，Katayama-Matoba-Sunagawa(2015)とKatayama-Matsumura-Sunagawa(2015)で行われた議論を適用できる形に修正している。

第四章では，空間2次元の場合について考察を行う。非線形項にKMS条件を仮定したとき，(WKG)と(MSW)の双方についてSDGEが成立することを証明した。また，若干の付加条件を必要とするが，半線形波動方程式系に関連した簡約化方程式の解を用いて，KMS条件の下で得られた大域解の漸近挙動が記述できることを証明した。この結果により波動方程式を満たす成分に関しては，(WKG)ではKlein-Gordon成分，(MSW)では異なる伝播速度をもつ成分からの影響は小さく，波動のみ，もしくは同一の伝播速度をもつ成分のみで漸近挙動が決定されることを明らかにした。なお，(WKG)のKlein-Gordon方程式を満たす成分に関しては自由解に漸近することもわかる。

第五章では，空間3次元の場合について考察を行う。空間2次元の場合と違い，技術的な付加条件がついてしまったが，既知の結果では扱えないような連立系に対する大域解の存在定理を示すことができた。また，漸近挙動については大域解の存在定理と同じ技術的な付加条件の下で空間2次元の場合と同様な結果が得られた。なお空間2次元の場合に漸近挙動に対して必要な付加条件は空間3次元では自然に満たされることに注意しておく。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　　名	（程　　明港　　　　　　　　　　　　）

論文審査担当者		(職)	氏　　　名
	主 査	教授	片山 聡一郎
	副 査	教授	冨田 直人
	副 査	准教授	岡本 葵
	副 査	准教授	水谷 治哉

論文審査の結果の要旨

本学位論文では 2 種類の非線形双曲型偏微分方程式系の初期値問題に対する時間大域解の存在と、その漸近挙動が論じられている。扱われている方程式系は(同一伝播速度をもつ)非線形波動方程式とクライン=ゴルドン方程式の連立系、および成分ごとに伝播速度が異なる非線形波動方程式系である。扱う初期値は十分滑らかで、有界領域内でのみ 0 ではない値をとり、大きさは十分に小さいものである。これらの方程式系の初期値問題に対しては、時間局所解(初期時刻から始めて、ある時刻までの解)の存在はよく知られているが、非線形項によっては有限時間で解が爆発し、時間大域解(任意の時刻までの解)は必ずしも存在しない。本論文で扱っている初期値が十分小さい場合においては時間大域解の存在・非存在を分ける最初の指標は非線形項の次数である。小さい初期値に対しては次数が高いほど非線形項の影響が小さくなり、臨界次数よりも真に大きい次数ならば時間大域解の存在が示される。臨界次数は、方程式の線形部の形や空間の次元に依存する。例えば未知関数の導関数のみに依存するような非線形項をもつ非線形波動方程式系の場合、3 次元空間では臨界次数は 2、2 次元空間では臨界次数は 3 である。ちょうど臨界次数の非線形項の場合には、さらに非線形項の構造に応じて時間大域解の存在・非存在が分かれる。したがって臨界次数の場合に大域解の存在を保証するような非線形項の構造条件を求めることは偏微分方程式論における重要な問題のひとつである。また，大域解が存在する場合には、さらにその時刻無限大での漸近挙動を明らかにすることも重要である。単一伝播速度の非線形波動方程式系に対する上記のような構造条件として最も有名なものは零条件である。この零条件は本論文で扱われる波動とクライン=ゴルドン方程式系の連立系や異なる伝播速度をもつ非線形波動方程式系の場合にも対応する結果がすでに得られている。しかし零条件は必要条件ではない。実際、単一伝播速度の非線形波動方程式に対しては，片山，砂川，的場，松村らによって KMS 条件という、零条件よりも弱い構造条件で大域解存在を保証するものが発見された。本学位論文の目的は波動とクライン=ゴルドン方程式の連立系、または異なる伝播速度をもつ非線形波動方程式系に対して KMS 条件に対応するような弱い構造条件を見出すことである。本学位論文で得られている結果は以下のとおりである。

(1) 非線形波動とクライン=ゴルドン方程式の連立系に対して KMS 条件に対応する条件を導入し、2 次元空間の場合に時間大域解の存在を示した。また若干の付加条件の下で、大域解の波動部分の漸近挙動が、より解析が容易な簡約化方程式系の解を用いて記述できることを示した。またクライン=ゴルドン部分は自由解(非線形項をもたない方程式の解)に漸近することを示した。3 次元空間の場合には KMS 条件に対応する条件に加えて，非線形項が波動部分に関しては空間微分しか含まないという制約の下で大域解の存在を示し，同じ条件の下で漸近挙動に関する結果を得た。

(2) 成分ごとに伝播速度が異なる非線形波動方程式系に対して KMS 条件に対応する条件を導入し、2 次元空間の場合に大域解の存在を示し、(1)と同様の付加条件の下で大域解の漸近挙動が簡約化方程式系の解を用いて記述できることを示した。3 次元空間の場合には KMS 条件に対応する条件に加えて非線形項が未知関数の時間微分のみに依存するという制約の下で大域解の存在とその漸近挙動の記述公式を得た。

以上の結果は、非線形双曲型方程式系の大域解存在と漸近挙動に関する新たな知見を与える重要なものである。よって、本論文は博士(理学)の学位論文として十分価値あるものと認める。