Title	On a martingale method for symmetric diffusion processes and its applications
Author(s)	竹田, 雅好
Citation	
Issue Date	
Text Version	ETD
URL	http://hdl.handle.net/11094/931
DOI	
rights	
Note	

【11】

氏名・(本籍)	竹田雅好 (たけだまさよし)
学位の種類	理学博士
学位記番号	第 8862 号
学位授与の日付	平成元年10月5日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	On a martingale method for symmetric diffusion processes and its applications (対称拡散過程に対するマルチンゲールの方法とその応用)
論文審査委員	(主査) 教 授 福島 正俊 (副査) 教 授 池田 信行　教 授 渡辺 毅　助教授 中尾慎太郎

論文内容の要旨

T. Lyons-W. Zheng は対称 Dirichlet 形式より生成される対称な Markov 過程のある加法的汎関数を時間前向きのマルチンゲールと後向きのマルチンゲールに分解できることを示した。この分解公式は対称な Markov 過程の時間に関する可逆性を用いて得られており，Markov 過程の対称性を忠実に反映している。また，マルチンゲール理論を効果的に使え，対称 Markov 過程の解析に有効である。特に Dirichlet 形式が局所性を持てば，対応する Markov 過程は拡散過程となり上述のマルチンゲールは連続になるが，連続なマルチンゲールは Brown 運動のランダムな時間変更と考えられ，更に構造が明確になる。そこで本論文では局所対称 Dirichlet 形式に対応する拡散過程の性質をこの分解公式と連続マルチンゲールの Brown 運動による表現定理とを使って調べた。

まず，保存性に関する判定条件を一般の局所対称 Dirichlet 形式に対して与え，いくつかの具体的な場合に適用すると K. Ichihara の結果の精密化が可能であることが分かった。例えば $a_{ij}(X)$ (i ，j = 1，2，……，d) を Euclid 空間 R^d 上の Borel 関数で，行列 $(a_{ij}(x))$ が対称非負定値となるものとし，mを R^d 上の正の Radon 測度とする。そして，

(1) $\mathcal{E}(u, v) = \sum_{ij=1}^{d} \int_{R^d} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dm, \; u, v, \varepsilon \quad C_0^\infty(R^d)$

なる対称形式の閉拡大によってできる $L^2(R^d, m)$ 上の Dirichlet 形式に適用すると，測度mが Lebesgue 測度であり，

$$\sum_{ij=1}^{d} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq k_1 (2+|x|)^2 \log(2+|x|)\, |\xi|^2$$

ならば，対応する拡散過程は保存性を持つ。また，$a_{ij}(x)$ がKroneckerの δ_{ij} のとき(1)はエネルギー形式と呼ばれDirichlet形式の重要なクラスであるが，この場合，半径 r の球のm測度が $\exp(k_2 r^2)$ $(k_2>0)$ で上から評価されているならば保存性が示せる。この場合の系として完備Riemann多様体上のBrown運動についても，測地球の体積の同様の評価で保存性の十分条件を与えることが出来る。

次に，(1)の形のDirichlet形式の族 $(\mathcal{E}^n, F^n)$ に対応する拡散過程の族を $M^n=(P^n_x, X_t)$ とし，R^d 上の確率測度の族 μ_n に対して連続関数の空間 $C([0,\infty]\to R^d)$ 上の確率測度の族を $P^n_{\mu_n}=\int_{R^d}P^n_x d\mu_n$ で定義したとき，それらがtightであるための十分条件を与えた。ただし，$C([0,\infty]\to R^d)$ 上には局所一様収束の位相が入っている。Lyons-Zheng自身もその分解公式を用いてtightnessについて調べているが，$C([0,\infty]\to R^d)$ 上に導入した位相が我々のものとは異なっており，ここで得られた結果の方が強い主張となっている。エネルギー形式の場合，有限次元分布の収束については今までにも種々の研究があるが，この研究と合わせると，主張を弱収束にまで強めることが出来る。

その他，sample pathの性質を調べるために必要な不等式を得，例えば重複対数の法則において上からの評価を得た。この結果は必ずしも最良のものとは言い難いが，この分解公式無くしては調べる術のなかった確率論的命題であって最初のものと思われる。

最後に，Lyons-Zhengの分解公式をあるクラスの非対称Dirichlet空間に拡張出来ることを注意した。

論文の審査結果の要旨

d次元ユークリッド空間 R^d 上の時間と共に連続に変動する見本過程をもつマルコフ過程は拡散過程とよばれ，通常の場合それは2階の偏微分作用素によって決定される。この作用素の係数が滑らかな場合には確率微分方程式の方法を用いることによって対応する拡散過程の大域的性質が詳しく調べられている。係数が滑らかでない場合でも作用素が R^d 上のある測度に関して対称な場合にはディリクレ形式の方法によって対称な（時間的に可逆な）拡散過程を対応さすことができ，その性質もある程度研究されてきた。

竹田君は対称拡散過程に対して最近開発された方法を組織的に用いてその保存性（見本過程が有限時刻で無限大に近づく確率が0という性質）およびの族のtightness（族の中から確率過程として収束する部分列が取り出せること）のための一般的な判定条件をうることに成功した。

最近LyonsとZhengは対称拡散過程の可逆性によって R^d 上の関数と見本過程の合成過程が前向きマルチンゲールと後向きマルチンゲールの差として表現されることを示した。連続マルチンゲールはブラウン運動の適当な時間変更に過ぎないことに注意しつつ，竹田君はこの表現を用いて拡散係数が有界な拡散過程の保存性のための十分条件が半径 r の球に対する対称化測度の増大度が e^{cr^2} $(C>0)$ を超えないという形で与えられることを示した。これは従来知られていた判定条件をすべて含むのみならず，係数が滑らかな場合でもこの条件が満たされなければ保存性が成立しなくなるという意味で最良に近い条件である。また竹田君は対称拡散過程の族のtightnessのための十分条件を族に対する同じ形の一様

評価によって与えた。

このように竹田君の論文は拡散過程の研究に新しい方法を組織的かつ有効に適用できることを示したものであり，この方面の研究に寄与する所極めて大であり，理学博士の論文として十分価値のあるものと認める。