Osaka University Knowledge Archive

Title	CHSH不等式の破れを量子コンピュータで検証する。
Author(s)	
Citation	令和5（2023）年度学部学生による自主研究奨励事業研究成果報告書. 2024
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/95190
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

様式６
申請先学部　基礎工学部　採択番号　No.４

令和５年度大阪大学未来基金「学部学生による自主研究奨励事業」研究成果報告書

ふ　り　が　な 氏　　　　名	さかくら　ゆうき 坂倉　勇輝	学部 学科	基礎工学部 電子物理科学科	学年	１年
ふりがな 共　同 研究者氏名	い どんじゅん LEE DONGJUN	学部 学科	基礎工学部 電子物理科学科	学年	１年
					年
					年
アドバイザー教員 氏名	藤井　啓祐	所属	基礎工学研究科		
研究課題名	CHSH 不等式の破れを量子コンピュータで検証する。				
研究成果の概要	研究目的、研究計画、研究方法、研究経過、研究成果等について記述すること。必要に応じて用紙を追加してもよい。（先行する研究を引用する場合は、「阪大生のためのアカデミックライティング入門」に従い、盗作剽窃にならないように引用部分を明示し文末に参考文献リストをつけること。）				

１.はじめに

2022 年、ノーベル物理学賞の受賞内容は”for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science”[1]、つまり「量子もつれ光子を用いた実験によるベル不等式の破れの立証と量子情報科学の開拓について」である。このベルの不等式というのは量子力学誕生以前の古典的な力学では必ず成り立つ関係式であり、その破れは量子力学が古典では記述できない理論であることを示している。そのため、これはしばしば「科学における最も深遠な発見である」[2]と評価され、古典力学と量子力学の違いを象徴する代表的な存在となっている。また、その量子力学の性質を活かした量子コンピュータなどの量子情報科学が発展しており、Google の量子超越実験が量子コンピュータの優位性を示して Nature 誌に掲載される[3]など、近年注目を集めている。

このように量子技術が幅広く使われている21世紀において、我々はミクロな世界で現れる量子の性質を身近なものとして受け入れるべきであろう。

そこで本研究では、量子状態の操作を身近な光で表し、その後量子コンピュータでベルの不等式の一種である CHSH 不等式の破れを検証する。研究目的より、検証に使用する量子コンピュータは誰でも無料で使用できるクラウド上のものと、阪大にある量子コンピュータ実機に分けた。

２．光と量子情報

2.1．量子情報とジョーンズ計算法

量子の大きな特徴として、「重ね合わせ状態」と「もつれ状態(entanglement)」がある。「重ね合わせ状態」とは2つの状態ベクトルの線形結合で表される状態[4]であり、「もつれ状態」は2つ以上の量子の相関によって生まれる状態である。これらの性質によって量子コンピュータは古典コンピュータではできない計算を

実現している。

まずは1つの量子の「重ね合わせ状態」を自在に操作したい。1量子状態はブロッホ球（図1）で表現することができ、これは偏光状態と対応させることができる。その手法として今回はジョーンズ計算法を用いる。

ジョーンズ計算法とは、偏光状態を2成分ベクトルで表す強力な行列計算法であり、各光学素子は2×2の行列で表される[5]。具体的には横偏光を表すベクトルを$|\boldsymbol{H}\rangle$、縦偏光を$|\boldsymbol{V}\rangle$、左回り円偏光を$|\boldsymbol{L}\rangle$として以下のようになる。

$$|\boldsymbol{H}\rangle = |\boldsymbol{0}\rangle = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad |\boldsymbol{V}\rangle = |\boldsymbol{1}\rangle = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad |\boldsymbol{L}\rangle = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

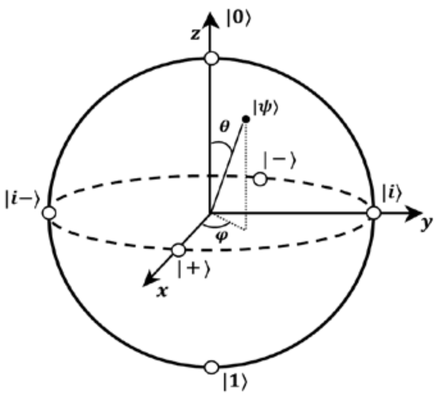


図 1. ブロッホ球

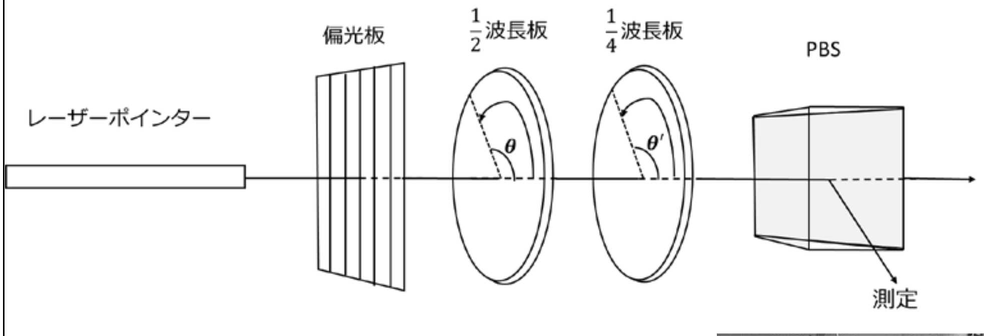
また、光学素子を表すジョーンズ行列は2分の1波長板を$\boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{2}}$, 4分の1波長板を$\boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{4}}$,として以下のようになる。（光軸を水平にした場合）

$$\boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

光学素子の光軸を$\boldsymbol{\theta}$傾けた場合は2次元の回転行列$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$で座標変換する。座標変換した波長板のジョーンズ行列を$\boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{2}}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{4}}(\boldsymbol{\theta})$とする。これらはユニタリ行列であり、量子コンピュータで使われる演算行列と同じ性質を持つ。

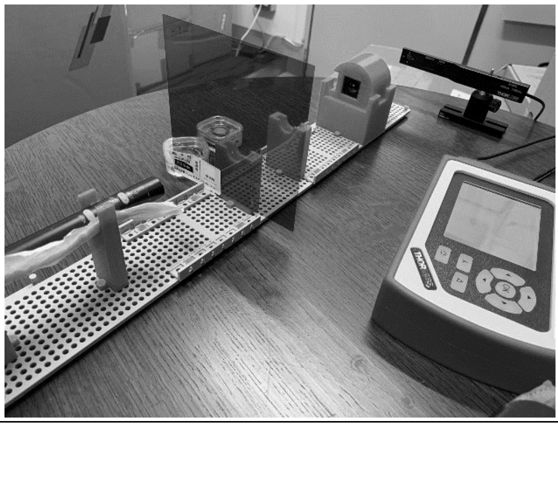
２.２.　偏光を操作する装置の作成

上記の光学素子を用いて偏光状態の操作を行い、光の強さの測定をする。測定には偏光ビームスプリッタ（PBS）を用いて、PBS の基底となる軸（ブロッホ球でのxz平面上の基底）に射影測定する。実験装置は図2,図3のように作成した。



←図 2.
実験装置模式図

↓図3.
実験装置。土台は 3D プリンターで作成した



レーザーポインターの波長は 532nm,最大出力 1mW. 偏光版は透過光が縦偏光になるよう固定し、PBS は縦偏光と横偏光を分けるよう固定した（ブロッホ球でいうz軸での射影測定）。2分の1波長板と4分の1波長板は光に垂直な面で回転させることができる。

この装置を用いて、2つの波長板をそれぞれ回転したときの縦偏光と横偏光の強さを測定する。ただし部屋の明かりの強さは縦偏光13.5μW,横偏光22.8μW。偏光板とPBS と波長版1つの状態でレーザーポインターによる光の

強さの最大値から部屋の明かりの強さを引いた値は 335μW である。

２.３．　光学実験１(２分の１波長板)

実際に偏光状態の操作を確認するために、まずは2分の1波長板を回転させてz軸での射影測定をする。測定する前の状態を式にすると以下のようになる。

$$\boldsymbol{W_{\frac{\lambda}{2}}(\theta)|V\rangle = R(-\theta)W_{\frac{\lambda}{2}}(0)R(\theta)|V\rangle}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sin2\theta \\ -cos2\theta \end{pmatrix}$$

単一光子の場合、この状態で測定すると横偏光が$(sin2\theta)^2$,縦偏光が$(-cos2\theta)^2$の確率で得られるが、今回は古典的なレーザー光を使っているため、光子数に比例する光の強さ(明るさ)で確認する。2.2節で確認した条件より、それぞれの偏光の強さ$\left\langle \boldsymbol{H_{\frac{\lambda}{2}}} \middle| \boldsymbol{H_{\frac{\lambda}{2}}} \right\rangle, \left\langle \boldsymbol{V_{\frac{\lambda}{2}}} \middle| \boldsymbol{V_{\frac{\lambda}{2}}} \right\rangle$は以下の式で表される。

$$\left\langle \boldsymbol{H_{\frac{\lambda}{2}}} \middle| \boldsymbol{H_{\frac{\lambda}{2}}} \right\rangle = 335(sin2\theta)^2 + 22.8$$

$$\left\langle \boldsymbol{V_{\frac{\lambda}{2}}} \middle| \boldsymbol{V_{\frac{\lambda}{2}}} \right\rangle = 335\,(-cos2\theta)^2 + 13.5$$

上式を理論値とし、実験装置で$\boldsymbol{\theta} = 0$から$\pi/2$ まで$\pi/8$ 区切りで計5回測定した。その結果が図4である。

概ね想定通りの値が得られた。ところどころ理論値を大きく下回るものは、角度によって光が散乱するなどしてうまく透過しなかったからだと考えられる。

この結果より、2分の1波長板では意図したとおりに偏光の操作ができていることがわかった。

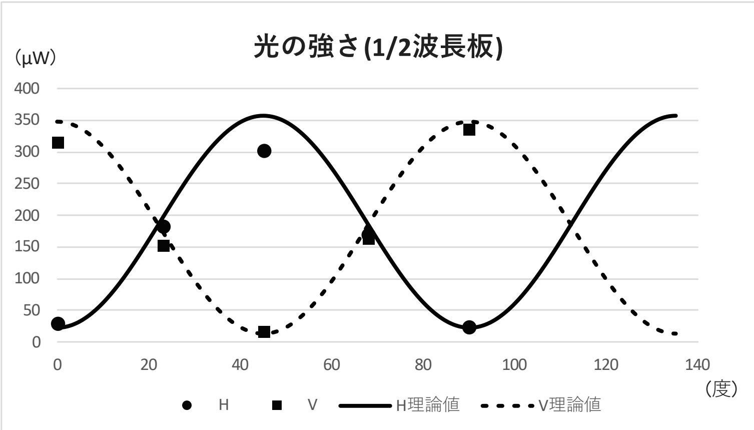


図4. 1/2 波長板に通した光の強さ

２.４．　光学実験２(４分の１波長板)

続いて、4分の1波長板でも偏光状態の操作を確認する。条件は2分の1波長板の時と同様であり、測定前の偏光の状態は以下の通り。

$$\boldsymbol{W_{\frac{\lambda}{4}}\left(\theta'\right)|V\rangle = R\left(-\theta'\right)W_{\frac{\lambda}{4}}(0)R\left(\theta'\right)|V\rangle}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\theta' & -sin\theta' \\ sin\theta' & cos\theta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta' & sin\theta' \\ -sin\theta' & cos\theta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sin\theta' cos\theta' - isin\theta' cos\theta' \\ (sin\theta')^2 + i(cos\theta')^2 \end{pmatrix}$$

偏光の強さも同様にして、

$$\left\langle H_{\frac{\lambda}{4}} \middle| H_{\frac{\lambda}{4}} \right\rangle = \frac{335}{2}(sin2\theta')^2 + 22.8$$

$$\left\langle V_{\frac{\lambda}{4}} \middle| V_{\frac{\lambda}{4}} \right\rangle = 335\left\{1 - \left(\frac{1}{2}sin2\theta'\right)^2\right\} + 13.5$$

上式を理論値とし、$\boldsymbol{\theta} = 0$から$\pi/2$まで$\pi/8$区切りで計5回測定した。その結果が図5である。

こちらも想定通りの値が得られた。これにより、波長板を使用して偏光状態を操作し、実際に「重ね合わせ状態」を生成できることが確認された。

したがって、レーザー光の偏光を操作することは1量子の状態を操作することに対応させることができる。次からは光学素子と量子情報科学の代表的な演算子（ゲート）の対応を考える。

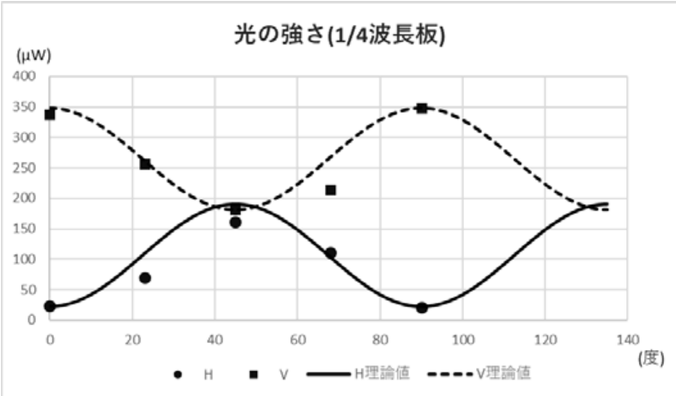


図5. ４分の1波長板に通した光の強さ

２.５.　光学素子とゲート

量子情報では1量子ビットに作用させるゲートで有名なものとしてアダマールゲート$\boldsymbol{H}$,パウリゲート$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$,そして各軸周りの任意回転ゲートとして$\boldsymbol{Rx}, \boldsymbol{Ry}, \boldsymbol{Rz}$がある。このうちひとつの光学素子またはその回転で表せるものを示した。

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{8}}\right) \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}\right) \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\pi}) \quad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{2}}(\boldsymbol{0}) \quad \boldsymbol{Ry}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$$

$$\boldsymbol{Rz}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right) = \boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{4}}(\boldsymbol{0}) \quad \boldsymbol{Rz}\left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right) = \boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{4}}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

最後の2つは量子状態の任意回転で使うため示した。任意の 1 量子ビットの演算は、2種類の軸周りの回転ゲートで全て記述でき、例えば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U} &= e^{i\alpha}\boldsymbol{Ry}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{Rx}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{Ry}(\boldsymbol{\delta}) \\ &= e^{i\alpha}\boldsymbol{Ry}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{Rz}\left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right)\boldsymbol{Ry}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{Rz}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right)\boldsymbol{Ry}(\boldsymbol{\delta}) \\ &= e^{i\alpha}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{4}}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{W}_{\frac{\lambda}{4}}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\delta})\end{aligned}$$

1 量子ビットでは絶対位相$e^{i\alpha}$は区別できないため無視すると、1 量子ビットの任意の演算に必要なゲートは全て波長板またはその回転で表せることがわかる。これで偏光の操作と1量子ビットの操作を全て対応させることができた。

３．ＣＨＳＨ不等式の破れの検証

３.１.　量子もつれ状態の確認

光学実験で量子の「重ね合わせ状態」を確認し、1 量子状態の操作を理解した。次は CHSH 不等式の破れを量子コンピュータで検証し、もう1つの量子の性質である「もつれ状態(entanglement)」を確認する。

３.２.　CHSH 不等式の記述

CHSH 不等式はベルの不等式のひとつであり、局所実在論で実験そのものの局所性・独立が保たれる場

合に必ず成り立つ不等式である[4]。つまり離れた2地点での物理量の測定方法が互いの測定結果に影響を及ぼさない状況で成り立つ物理量の相関を表した式といえる。実在論に基づいて物理量に隠れた変数λがあるとし、2地点でそれぞれ2つの観測方法（変数$\theta, \theta', \varphi, \varphi'$）を用いると CHSH 不等式は以下のように記述できる。ただし、簡単のため物理量$a = \pm 1, b = \pm 1$とし、 $\langle a(\theta,\lambda)b(\varphi,\lambda)\rangle$は物理量$a$と$b$の積の期待値を表す。

$$-2 \le \langle a(\theta,\lambda)b(\varphi,\lambda)\rangle + \langle a(\theta',\lambda)b(\varphi,\lambda)\rangle - \langle a(\theta,\lambda)b(\varphi',\lambda)\rangle + \langle a(\theta',\lambda)b(\varphi',\lambda)\rangle \le 2$$

このような相関の関係式を量子力学で記述したい。量子力学において状態ψの積の期待値は演算子A, Bを用いて$\langle\psi|A(\theta)B(\varphi)|\psi\rangle$で与えられる。測定値は$\pm 1$であるという仮定のもと計算すると、

$$\langle\psi|A(\theta)B(\varphi)|\psi\rangle = \cos(\theta - \varphi)$$

とすることができる。これを CHSH 不等式のように2地点でそれぞれ2つの測定方法を用意して求めた相関値をCとすると、

$$\begin{aligned} C &= \langle\psi|A(\theta)B(\varphi)|\psi\rangle + \langle\psi|A(\theta')B(\varphi)|\psi\rangle - \langle\psi|A(\theta)B(\varphi')|\psi\rangle + \langle\psi|A(\theta')B(\varphi')|\psi\rangle \\ &= \cos(\theta-\varphi) + \cos(\theta'-\varphi) - \cos(\theta-\varphi') + \cos(\theta'-\varphi') \end{aligned}$$

である。ここで

$$\theta = 0,\quad \theta' = \frac{\pi}{2},\quad \varphi = \frac{\pi}{4},\quad \varphi' = \frac{3\pi}{4}$$

となれば$C = 2\sqrt{2} > 2$となり CHSH 不等式を破る。

３.３.　量子コンピュータで相関を記述する

測定値が± 1 となる状態の積の期待値$\langle\psi|A(\theta)B(\varphi)|\psi\rangle$は量子回路で簡単に計算することができる。回路図は図6のようになる。

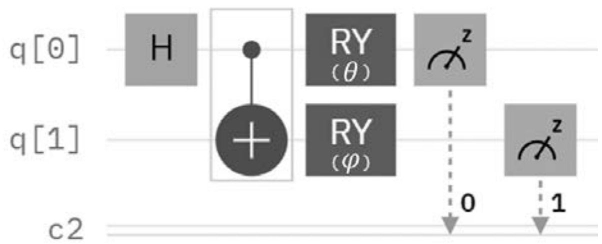


図6.
IBM Quantum Learning Composer で
作成した回路を一部編集した

大まかな内容としては、HゲートとCNOTゲートで2ビットの量子もつれ状態を通り、Ry ゲートで観測する角度を変えるというもの。

量子情報では測定値が0か1になり、2量子ビットを測定すると古典ビットでの00,01,10,11となる確率がわかるが、CHSH 不等式の相関を求めるためには測定値± 1でなければならないので、0を-1として積を計算する。つまり2量子ビットの積の値はそれぞれ$1, -1, -1, 1$となり、期待値はそれぞれに確率をかけて足し合わせた値となる。

３.４.　クラウド上の量子コンピュータでＣＨＳＨ不等式の破れを確認する

図6の回路を量子コンピュータで実行するために、まずは無料で使える量子計算クラウドサービスを利用する。仕組みは、ユーザーがクラウドサーバ経由で量子コンピュータを保有する組織のサーバに回路情報を送信し、組織の制御装置でコンパイルして実行、その結果がクラウドサーバに返送されるという形である[6]。そのようなサービスは複数あるが、今回はメールアドレスの登録だけで使える IBM Quantum Platform を利用する。

IBM Quantum Learning Composerで図6のように回路を作成し、θとφの組を3.2.節と同じように設定する。次に回路を実行するシステム(コンピュータ)として、ibm_osakaを選択した。スペックはQbit: 127, EPLG(100Qbit のゲート層あたりの誤差): 2.8%, CLOPS(1秒間に可能な回路層演算の回数): 5K である。回路の測定回数はそれぞれ1024shotsとし、結果は表1の通り。

——	$\theta-\varphi$	$\theta'-\varphi$	$\theta-\varphi'$	$\theta'-\varphi'$	C
１回目	0.686	0.766	-0.730	0.675	**2.857**
２回目	0.654	0.745	-0.683	0.716	**2.798**
３回目	0.692	0.764	-0.746	0.700	**2.902**
４回目	0.694	0.756	-0.717	0.676	**2.843**
５回目	0.704	0.765	-0.710	0.700	**2.879**
６回目	0.682	0.713	-0.718	0.705	**2.818**
７回目	0.719	0.694	-0.732	0.695	**2.840**
８回目	0.710	0.698	-0.658	0.750	**2.816**
９回目	0.746	0.683	-0.713	0.699	**2.841**
１０回目	0.694	0.756	-0.717	0.675	**2.842**

表1. クラウド量子コンピュータにおけるCHSH不等式の値

→ **C,Average** =2.8436

非常に安定してCHSH不等式を破った。たびたびCの値が$2\sqrt{2}$すら超えているのは、量子コンピュータの補正が関係していると思われる。量子コンピュータでは計算している最中に$|1\rangle$が$|0\rangle$になるようなノイズがかなりの頻度で発生するため、より理想値に近づけるために$|0\rangle$を$|1\rangle$にする補正を行う。それによってCの値が$2\sqrt{2}$を超える場合があるが、クラウドでは詳しい補正値はわからないためあくまで仮説の域を出ない。そこで次は阪大の量子コンピュータ実機を使って値を求める。

３.５.　量子コンピュータ実機でＣＨＳＨ不等式の破れを確認する

阪大QIQBが開発している超伝導量子コンピュータを使用する。1回目の検証結果を図7、2回目の検証結果を図8で表した。測定回数はそれぞれ1000shots。

図7.

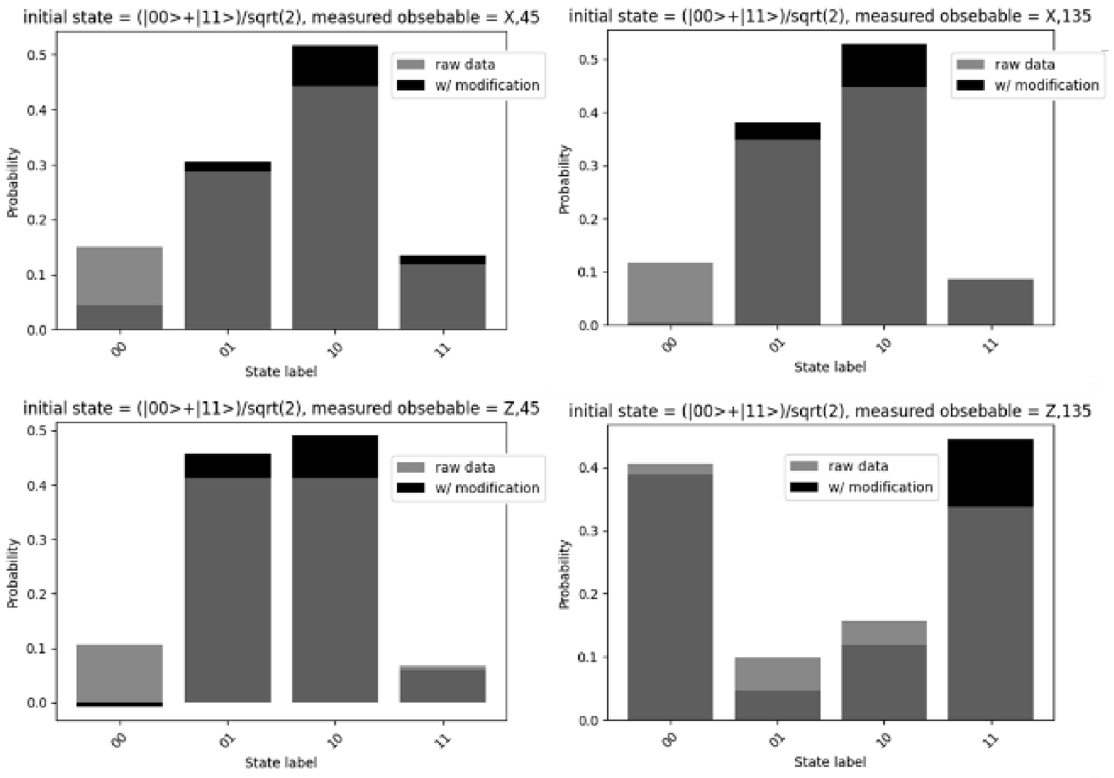
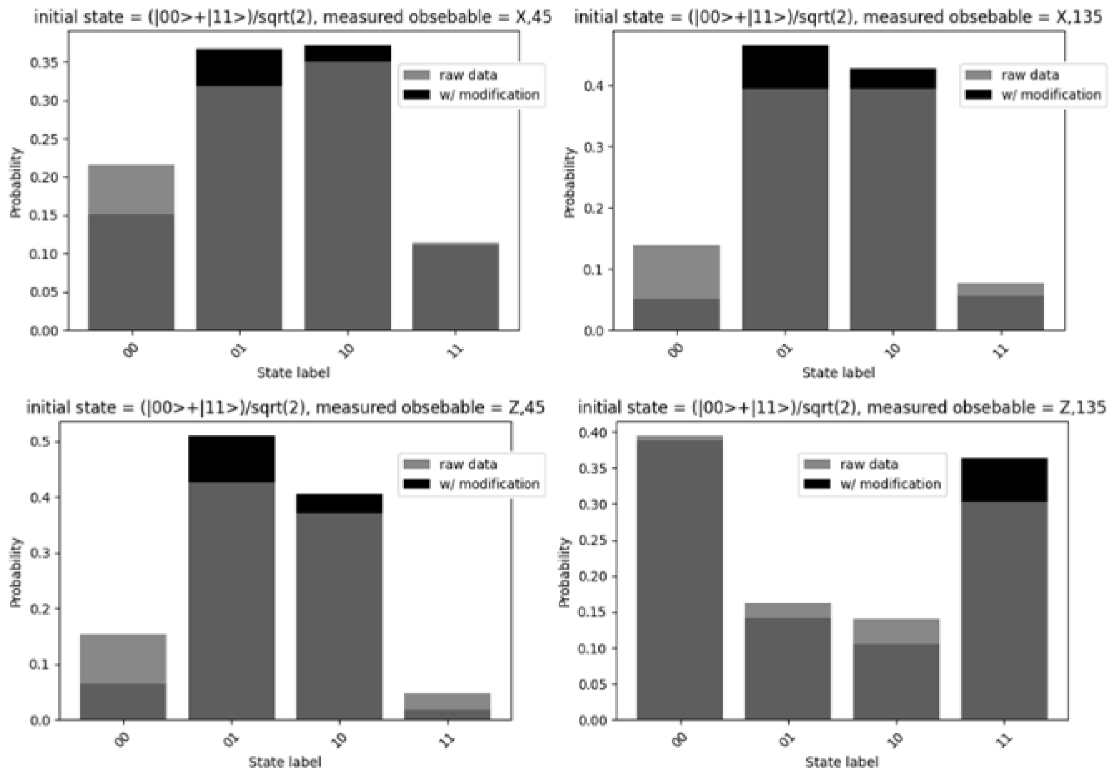


図８.



測定方法の違いにより3.4.節と符号が反転しているが、測定する角度は任意であるから問題ない。補正前のデータは薄い灰色の部分(raw data)と濃い灰色の部分で表し、補正後は raw data を黒の部分(w/modification)に置き換えている。Cの値は表2のようになった。

——	補正前C	補正後C
１回目	-2.194	-3.024
２回目	-1.902	-2.599

表2.
超電導量子コンピュータ実機におけるCHSH不等式の値

結果は2回ともCHSH不等式を破り、特に1回目は補正前でも$C < -2$で強い相関を示した。これらの結果から、量子コンピュータ実機でもCHSH不等式の破れを確認できたといえる。

４．まとめと今後の課題

本研究では、偏光操作を通して量子状態の操作をとらえ、量子コンピュータでCHSH不等式の破れを検証した。結果、CHSH不等式の破れを確認でき、同時に量子が持つ古典にはない特徴を身近な手段で表現できた。これはこの研究の発想に至った経緯である「量子技術が幅広く使われている21世紀において、我々はミクロな世界で現れる量子の性質を身近なものとして受け入れるべき」という考えに一種の解決法を提示するものであり、満足のいく結果となった。

しかし、本研究中に新たに生まれた課題として、ノイズの影響が多いことが挙げられる。ベルの不等式という相関の閾値がある中で、ノイズによって結果が変わる状況は好ましくないだろう。今回はノイズが生まれる原因やその抑制方法について研究できなかったため、より明確な量子情報の理解を目指して次回の課題としたい。

５．謝辞

ご多忙の中、本研究のアドバイザー教員のお願いを快く受けてくださった藤井啓祐先生に心より感謝申し上げます。また、光学実験を行うにあたり適切なご助言をくださった中島秀太先生と、量子コンピュータ実機の操作と指導をしてくださった小川和久先生に深く感謝いたします。

６．参考文献

[1] The Nobel Prize organization: *The Nobel Prize in Physics 2022* (2022): The Nobel Prize organization: https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/.
[2] H. P. STAPP: *Bell's Theorem and World Process* : Il Nuovo Cimento **29B** 270 (1975).
[3] F. Arute et al: Nature **574**: 505 (2019).
[4] 清水 明: 新版 量子論の基礎 66,218,227: サイエンス社 (2004)
[5] A. Yariv: Optical Electronics Fourth Edition: Saunders College (1991)
[6]理化学研究所. 量子コンピュータを利用できる「量子計算クラウドサービス」開始(2023/3/24): 理化学研究所: https://www.riken.jp/pr/news/2023/20230324_1/