

Title	A comprehensive study of edge rings with graph-theoretic insights
Author(s)	Shibu Deepthi, Nayana
Citation	大阪大学, 2024, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/96231
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

Abstract of Thesis

Name (Nayana Shibu Deepthi)	
Title	A comprehensive study of edge rings with graph-theoretic insights (グラフ理論的洞察によるエッジ環の包括的研究)
<p>Abstract of Thesis</p> <p>This thesis offers a comprehensive examination of edge rings. This work extends the current understanding of edge rings and their interplay with graphs, offering a comprehensive examination of their algebraic properties.</p> <p>Moreover, we will delve into certain graph labeling concepts, significantly expanding our understanding of graph theory. The thesis contributes to the body of knowledge in the fields of commutative algebra and combinatorics, providing new perspectives, enhancing understanding, and paving the way for the development of efficient algorithms in diverse mathematical areas.</p> <p>We commence by introducing fundamental concepts and insights that bridge algebra, graph theory, and combinatorics. Thus, in the first part, we lay the groundwork for subsequent explorations.</p> <p>The second part of this thesis revolves around the explicit computation of h-vectors for specific families of graphs. By employing techniques like initial ideals and simplicial complexes, we extend the index of edge rings with known h-vectors, which serve as indispensable tools in unraveling the algebraic properties of corresponding edge rings. In particular, we introduce a new family of almost Gorenstein but not Gorenstein edge rings, contributing to our understanding of the relationship between graph structure and algebraic properties.</p> <p>The third part of our research focuses on the characterization of Serre's condition (S_2) for edge rings. This involves examining the existence of non-normal edge rings that satisfy (S_2)-condition and its implications for Cohen-Macaulayness. Our work aims to provide supporting evidence for the conjecture that there is no distinction between satisfying Serre's condition (S_2) and Cohen-Macaulayness in the context of edge rings. We explore a certain range of graphs and delve into their algebraic properties to unravel the intricate relationship between these two fundamental concepts.</p> <p>For the family of unicyclic graphs that consist of a single odd cycle, the h-vectors and characterization of algebraic properties of their edge rings in terms of the graphs are known. Therefore, instead of looking at such unicyclic graphs from the perspective of our edge ring study, we shall take a strict graph-theoretical approach regarding them in the fourth part of this research. We particularly examine three specific graphs belonging to this family of unicyclic graphs and provide substantial evidence contributing to a conjecture regarding their super edge-magic total strength.</p>	

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (Nayana Shibu Deepthi)			
	(職)	氏 名	
論文審査担当者	主 査	准教授	東谷 章弘
	副 査	教授	杉山 由恵
	副 査	教授	中村 誠
	副 査	教授	大杉 英史 (関西学院大学)
論文審査の結果の要旨			
<p>Nayana Shibu Deepthi氏の論文では、有限グラフに付随する標準的度数付き環である「エッジ環」に関する研究が展開されている。エッジ環は、組合せ論的可換環論と呼ばれる分野における中心的な対象の1つであり、有限グラフに関する組合せ論、度数付き環に関する可換環論、およびグレブナー基底の理論などが交差する。</p> <p>Shibu Deepthi氏は本論文において、以下の3つの具象的研究に取り組んでいる。</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 具体的なグラフの族に対するエッジ環のHilbert級数の計算 (2) Serre条件(S_2)を満たすような非正規エッジ環の族の構成 (3) 特定のグラフの族に対するsuper edge-magic total strengthの計算 <p>(1) 本論文では、具体的なグラフの族のエッジ環のHilbert級数を計算している。標準的度数付き環のHilbert級数は、度数付き環を議論する際に最も重要となる不変量の一つであるが、著名な例を除き、ほとんどのグラフでそのエッジ環のHilbert級数は計算されていなかった。そこでShibu Deepthi氏は、長さ3のサイクルn個を1点で張り付けたグラフのエッジ環のHilbert級数をnのみの式で記述した。さらにその一般化として、長さが奇数のサイクルn個を1点で張り付けたグラフのエッジ環のHilbert級数へと拡張した。これらの成果は、エッジ環のHilbert級数の具体的な計算例を与えるという側面で、エッジ環の理論の発展に大いに貢献している。</p> <p>(2) 本論文では、エッジ環の正規性とSerre条件(S_2)の関連についての研究も展開している。現代可換環論において“Cohen-Macaulay”(CMと略記)という条件は、最も重要な性質として広く認識されている。しかしながら、エッジ環のCM性に関する研究はほとんど進んでいなかった。一方で、一般に「エッジ環が正規ならば、CMである」「エッジ環がCMならば、(S_2)を満たす」が成立する。そこでShibu Deepthi氏は、正規性と(S_2)性に着目し、エッジ環が正規ではないが(S_2)を満たすようなグラフの族の構成に成功した。具体的には、4頂点以上の完全グラフ2つを1点で接着したグラフ、および、そこから適切に辺を除去して得られたグラフがそのような性質を満たすことを示している。この成果は、エッジ環のCM性の特徴付けという当該分野における最重要課題の一つの解決への足掛かりとなり得るものである。</p> <p>(3) 本論文において純グラフ理論的な研究も展開しており、サイクルを1つしか含まないグラフ中のいくつか特別な族に対し、“super edge-magic total strength”と呼ばれる(グラフのラベリングに関する)不変量を決定しており、グラフ理論的に意義のある結果である。</p> <p>上記の研究成果は、当該分野における研究を進展させるものであり、十分に価値のあるものであると言える。よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値のあるものと認める。</p>			