Title	Rigidity theorems on lattices of topologies on vector spaces
Author(s)	青山, 昂頌
Citation	大阪大学, 2024, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/96369
rights	
Note	

様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　　　　　青山　昂頌　　　　　）	
論文題名	Rigidity theorems on lattices of topologies on vector spaces （線形空間上の位相構造の束の剛性定理）

論文内容の要旨

本論文の主な目的は，線形空間上の位相線形空間の構造を与える位相構造全体の束に関連した2つの剛性定理を証明することである．固定した集合X上に定まり得る位相構造全体の集合$\Sigma(X)$に，包含関係による半順序を与えることで得られる半順序集合は，任意の2元に対して上限と下限（2項演算）が定まることから，束構造と呼ばれる代数構造をもつことが知られており，G.Birkhoff (1936) を端に研究されてきた．J.Hartmanis(1958)はこの束構造$\Sigma(X)$の自己同型群がXの対称群，または対称群と2元群の直積であることを明らかにし，この証明を少し修正することによって，$\Sigma(X)$の束構造が集合の構造（濃度）を決定するという剛性定理が得られる．本論文はこのJ.Hartmanisの結果の線形空間における類似であると位置づけられる．

より詳しくは，位相体Kを係数体とする（無限次元を含む）線形空間Xが与えられたとき，Xを位相線形空間とする位相，すなわち，Xに備わっている線形演算である加法とスカラー倍を連続とするような位相全体の集合$\tau_K(X)$は包含関係により，束構造をもつことが知られている．したがって，線形空間Xが与えられたとき，Xを集合とみたときの束$\Sigma(X)$とその部分半順序集合$\tau_K(X)$が得られる．本論文の主定理の1つは，「$\tau_K(X)$が$\Sigma(X)$内に束としてどのように入っているか」という情報が2つの線形空間において束同型を通して同一であれば，この束同型は係数体の位相体としての同型と半線形同型から得られるというものである．系として，「位相構造全体の中に位相線形空間となるような位相構造がどのように入っているか」という情報は，係数体の位相体及び線形空間毎に唯一であるということが分かる．また，別の系として本論文ではJ.Hartmanis(1958)で本来考えられていた束自己同型群も考察している．すなわち，束$\Sigma(X)$の自己同型の内，$\tau_K(X)$を保つような写像から成る部分群の構造を決定した．

次に，2つ目の主定理について述べる．位相線形空間となる位相構造全体の束構造だけでは剛性が成り立たない，すなわち，2つの線形空間X,Yの係数体をそれぞれK,Lとして，$\tau_K(X),\tau_L(Y)$が束として同型であってもK,Lが体として同型とは限らないことが本論文内で例示されているが，この束同型の内，Hausdorffな位相構造をHausdorffな位相構造へ写す同型が存在した場合には，K,Lの体構造とX,Yの線形構造が同型となるというのが2つ目の剛性定理である．この際，体同型は代数的同型であって，位相体の同型とは限らないことが本論文内で例示される．

これら2つの定理の証明はそれぞれ，アフィン幾何の基本定理と射影幾何の基本定理を通じて証明される．そのために本論文内では，線形部分空間全体からなる束と位相線形空間の位相構造全体の束との間でのGalois接続を構成し用いている．

本論文の構成は3章構成である．第1章は研究背景の説明，主定理の紹介であり，第2章は主に主定理の証明に必要な基本事項の説明，及び証明が目的である．第3章はJ.Hartmanis(1958)の結果の修正版を証明することに始まり，次に2つの剛性定理を証明し，主定理の主張が強められないことを例示して，本論文は終わる．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏名	（青山昂頌）

		(職)	氏名
論文審査担当者	主 査	教授	鎌田　聖一
	副 査	教授	吉永　正彦
	副 査	教授(学習院大学)	大鹿　健一
	副 査	准教授	馬場　伸平

論文審査の結果の要旨

位相構造は、写像の連続性や収束など、数学の基本概念を一般的に定める上で必要不可欠な構造である。したがって、空間を固定し、その上での（ある種の）位相構造の全体の集合を考えることは、その空間を理解する上で本質的なことである。青山氏はこの博士論文において、「位相構造の集合が持つ構造が、元の空間をどの程度特定するか」という、位相構造の剛性に関して新たな視点から結果を得た。

古典的な結果として Hartmanis による集合上の位相構造全体がなす束の剛性定理がある。この博士論文の主定理は、ベクトル空間の構造と両立する位相構造に関しての類似の定理であり、興味深い方向性を持つ発展であると言える。

まず位相体上のベクトル空間 V において、スカラー倍と加法が連続となる位相構造（線形位相）全体の集合と考える。位相を開集合系として捉えたとき、包含関係による半順序により、位相構造の集合は上限、下限を与える束構造を持つ。青山氏は、この線形位相構造の全体がなす部分束構造が、V 上の一般の位相構造全体の束内にどのように含まれるかにより、ベクトル空間の構造がただ一つに定まるという剛性定理を与えた（Theorem A)。

また V 上の線形位相構造の束の部分束として、Hausdorff 線形位相の束がある。青山氏は，線形位相束内にどのように Hausdorff 線形位相の部分束が含まれているかにより、ベクトル空間の位相体の代数的構造、及びベクトル空間の次元も一つに定まることを示した(Theorem B)。

これらの２つの主定理の証明では、問題をアファイン幾何や射影幾何に結びつけ、アファイン幾何の基本定理および射影幾何の基本定理を使用しており、大変独創的である。この発想の基礎には、青山氏の修士論文の仕事がある。このように一見関連のない分野間を結びつけており、これからの研究による発展が期待できる。

古典的な数学に立ち返り、それをよく理解した上で、独自の視点で発展させている点が非常に高く評価できる。また、元となる Hartmanis の定理は、位相構造の束の自己同型写像に関する剛性である。一方、青山氏の結果は 2 つのベクトル空間に対応する束構造間の同型写像に関する剛性定理であり、より一般的な設定での剛性定理である。

諸所の剛性定理の研究が活発な現代において、古典的な剛性定理に立ち返り、斬新な視点を導入して深く研究するこの結果は、新たな数学研究分野を発展する基礎となることが期待される。以上のような理由で、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。