様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　名	（　　　白石 伝助　　　）
論文題名	Studies on ℓ-adic Galois polylogarithms （ℓ進ガロアポリログの研究）

論文内容の要旨

1つ以上の有理基点が指定された3点抜き射影直線の幾何的エタール基本亜群には，基礎体の絶対Galois群が自然に作用する．基礎体が数体の場合，Belyiの定理より，このGalois作用は忠実であり，その作用の様子はGaloisアソシエーター（もしくは伊原アソシエーター）と呼ばれる非可換1コサイクルにより記述される．よって，Galoisアソシエーターの振る舞いを調べることが数体の絶対Galois群の構造を詳細に記述するという観点から問題となるが，この問題を究明するために，1980年代に V.Drinfeld や伊原康隆により，Grothendieck–Teichmüller理論が創始された．これはDrinfeldのKZ微分方程式の理論のGalois側（エタール類似物）に相当する．

Galoisアソシエーターの挙動を解析するために，しばしば非可換組合せ副有限群論の技法が用いられる．1980年代末頃に，伊原康隆や G.W.Anderson によりベータ関数（やガンマ関数）のエタール類似物が導入され，その数論的な性質がAnderson，Coleman，伊原-金子-行成らにより解明された．これは，3点抜き射影直線上の(0,1)区間に沿った道に付随するGaloisアソシエーターを，副有限Fox自由微分を通じて2変数のベキ級数と捉えることで定義される．そして，そのℓ進Taylor係数は本質的にℓ進Soule指標と呼ばれる絶対Galois群上の関数で記述される．ℓ進Soule指標はRiemannゼータ値のℓ進エタール類似物であり高次ℓ円単数の数論と密接に関係する．

そのような背景の元，本論文の主役であるℓ進Galoisポリログは，古典的な複素ポリログのℓ進エタール類似物として，1990年頃に Z.Wojtkowiak により導入された，絶対Galois群上のℓ進特殊関数である．この関数は，中村博昭とWojtkowiakにより導入された一般化Soule指標（ℓ進Galoisポリログ指標）で記述され，3点抜き射影直線上の標準的な接基点を有理点zに結ぶ道に付随するGaloisアソシエーターのℓ進Magnus展開係数（ℓ進反復積分）として定義される．これは従来の複素ポリログが3点抜きRiemann球面上の道に沿った複素反復積分の母関数であるKZアソシエーター（i.e.,KZ微分方程式の基本解）における適切な項の係数であることのℓ進エタール類似である．この観点から，対数関数（1次のポリログ）の類似物はzのℓ冪根に付随するℓ進Kummer1コサイクルであると理解される．

本論文は，ℓ進Galoisポリログの①数論幾何的性質（関数等式）および②整数論的性質（トリプル記号との関わり）について論じた．①,②それぞれについての研究の背景と本論文の具体的な内容は以下の通りである．

① 数論幾何的性質（関数等式）：

複素ポリログの関数等式に関する研究は18世紀末頃の L.Euler や J.Landen の研究に端を発する．その現代的な研究が1990年頃からZagier，Goncharov，Wojtkowiak，Beilinson-Deligne，Ganglらにより行われ，特にZagierにより，複素ポリログの一般的な関数等式が成立するための代数的な十分条件（tensor基準）が確立された．また，複素ポリログは複素多重ポリログに一般化され，現在に至るまでそれらの数多くの関数等式が知られている．

多価関数であるポリログのそれぞれの関数等式は，関数等式に現れる主要ポリログ項を定義する3点抜き射影直線上の道のシステムに依存するものであり，それ独自の幾何学を背景に持っている．その意味で，ポリログの関数等式は，道たちの精妙な幾何学的な均衡に基づくポリログたちがなす数論幾何学的な現象の一つであると言える．

一方，ℓ進Galoisポリログの関数等式は，中村-Wojtkowiakの共同研究により研究され，その典型的なものがいくつか得られていた（Euler型，Abel型，inversion公式，distribution公式）．中村-Wojtkowiakの先行研究では，Zagierのtensor基準を基本群論の観点から捉え直すことでtensor基準と同値な位相幾何学的条件(homotopy基準)が

確立された他，ℓ進Galoisポリログの関数等式を導出するための複素の場合と同様のtensor-homotopy基準および具体的な計算アルゴリズムが与えている．

本論文において学位申請者は，中村-Wojtkowiakの先行研究を踏襲し，ℓ進Galoisトリログの(i)Landen型3項関数等式と(ii)Spence-Kummer型9項関数等式，および(iii)ℓ進Galois多重ポリログの大井-上野型関数等式の一般化に関する結果を得た．(i),(ii),(iii)それぞれに関して詳しく述べる．

(i),(iii)について: 3点抜き射影直線のS_3対称性から生じるℓ進Galoisアソシエーターの代数関係式（chain rule）を用いることにより，ℓ進GaloisトリログのLanden型関数等式とℓ進Galois多重ポリログの大井-上野型関数等式の一般化を導出した．前者の関数等式(i)に関して，従来の複素トリログのLanden型関数等式にはダイログ項は1つも現れないが，学位申請者が得たℓ進GaloisトリログのLanden型関数等式にはℓ進Galoisダイログ項が1つ出現する．このℓ進Galois特有の項は，中村-Wojtkowiakによりerror termと命名されているものであり，ℓ進Galoisアソシエーターに内在するある種の非線形性に起因するものである．先行研究では具体的な関数等式においてerror termに高次項が現れる現象は確認されておらず，本研究でそのような非自明な現象が初めて確認された．また，後者の関数等式(iii)は，指数に関する双対と変数に関するreflectionという二つの側面を持つℓ進Galois多重ポリログの関数等式であり，中村博昭氏により証明されていた「ℓ進Galois多重ポリログの大井-上野型関数等式」の一般化である．また，そのz=1による特殊化として，ℓ進Galois多重ゼータ値（i.e.,ℓ進多重Soule元）の双対公式が導出される．

(ii)について：トリログのSpence-Kummer型関数等式は9つのトリログからなる2変数関数等式であるが，これはnon-Fano配置の捕空間Vの幾何学をunderlying geometryに持つ．Vは5標点付き射影直線のモジュライ空間M_{0,5}からある因子を除いて得られる空間であり，2次元の多様体である．Vの持つ対称性により，Vから3点抜き射影直線への9つの射が定義され，それらの射を用いることにより，3点抜き射影直線上の9つの適切な道からなるシステムが定まる．そのシステムから生じるℓ進Galoisアソシエーターのchain ruleを詳細に解析することにより，ℓ進GaloisトリログのSpence-Kummer型関数等式を導出した．その際，error termを求めるために，V上の道に付随する2変数のGaloisアソシエーターのℓ進Magnus展開係数を正確に特定する必要がある．これを，M_{0,5}のGalois理論や数式処理システムMagmaを用いることによりVの基本群を精密に調べることで完遂した．すなわち，本論文では，Kleinの4元群を被覆変換群に持つM_{0,5}上の有限次エタールGalois被覆空間W（B_3型Coxeter配置の捕空間）とWからVへの開埋め込みに着目し，Vの基本群を(0,5)型の写像類群としてよく知られるM_{0,5}の基本群（すなわち4次純ブレイド群をその中心で割って得られる群）の部分商として実現する．こうして，上述の2変数ℓ進Galoisアソシエーターを純ブレイドの言葉で記述することで，その精密な解析が可能となる．

なお，以上の(i),(ii),(iii)の証明はいずれも代数的なものである．そのため，ℓ進Galoisアソシエーターを複素KZアソシエーターに置き換え，証明を複素版として再解釈することにより，従来の複素（多重）ポリログの関数等式の新しい代数的証明が得られる．

② 整数論的性質（トリプル記号との関わり）：

ℓ進Galoisポリログと他の数論的対象との関連性を確立することが「整数論への応用」を得るという観点から考察すべき問題となる．そのために，ℓ進Galoisポリログのmod ℓでの還元を考える．これをmod ℓ Galoisポリログという．本論文では，平野光と森下昌紀の「伊原理論における数論的位相幾何学」に関する先行研究を踏襲し，トリプルℓ冪剰余記号と呼ばれる数体上のあるHeisenberg拡大における素イデアルの分解法則を統制する数論的対象との関連性を考察した．その結果として，トリプルℓ冪剰余記号がwell-definedに定義されているℓ=2,3の場合に，トリプルℓ冪剰余記号のmod ℓ Galoisダイログの特殊値による記述を与えた．なお，その際，ある種のDiophantus方程式の有理点を用いて3点抜き射影直線上の適切な有理点を定め，その有理点での特殊値を考える．本結果は，平野-森下の共同研究の成果をℓ進Galoisポリログの言葉で再解釈したものである．トリプルℓ冪剰余記号は，絡み目のMilnor不変量の素イデアルに対する数論的な類似物であるmod ℓ Milnor不変量で記述されるため，上述の本論文の研究結果はmod ℓ Milnor不変量のmod ℓ Galoisダイログの特殊値による記述を与えている．また，この整数論的応用として，トリプルℓ冪剰余記号の相互法則とℓ進GaloisダイログのEuler型関数等式の関係性について論じた．

本論文の以上の研究は，Wojtkowiakにより創始されたℓ進エタール反復積分論における具体的内容を拡充させ，今後の高次ℓ円単数の数論やGrothendieck–Teichmüller理論の発展に資するものと考えられる．

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　白石　伝助　）		
論文審査担当者	(職)	氏　名
	主査　教授	中村　博昭
	副査　教授	渡部　隆夫
	副査　准教授	森山　知則
	副査　准教授	武田　秀一郎
	副査　准教授	太田　和惟

論文審査の結果の要旨

対数関数の反復積分として得られるポリログ関数は，複素変数 z についてモノドロミーをもつ多価関数として解析接続される重要な関数の族を形成するとともに，変数 z が１に等しいときはゼータ関数の整数値と一致することに由来して１８世紀の Euler, Landen による研究以来の長い歴史を持つ．近年でも１９８０年代において Zagier, Beilinson-Deligne 等により混合 Tate モチーフの理論と結びつけられたことを契機に現代整数論の枠組みの中で新たな注目を集め活発な研究が続けられている．本研究の主要な対象である ℓ 進ガロアポリログ関数は，Wojtkowiak により３点抜き射影直線の数論的基本亜群への絶対ガロア群の作用から生じるℓ進結合子級数の係数を用いて定式化されたポリログ関数の類似物の一つである．古典的なポリログ関数は，その反復積分表示を利用して古くから様々な種類の関数等式が知られていたが，２０００年代に発表された Nakamura-Wojtkowiak による共同研究により，適切な代数多様体の代数対応から導かれる数論的基本亜群の間の準同型の族を分析することで，ℓ 進ガロアポリログ関数についても関数等式を示す道が拓かれ，いくつかの典型的な古典的ポリログ関数の関数等式のℓ進ガロア類似物が与えられた．

白石伝助氏は，このうち２次反射型の関数等式が，Rédei および Amano-Morishita-Mizusawa により導入された素数の三つ組に対する法２および法３の絡み数（トリプルべき剰余記号）の相互法則の一部を導く証明に応用があることを見出した．この発見を契機として，白石氏はさらに ℓ進ガロアポリログやその拡張であるℓ進ガロア多重ポリログに対して新しい関数等式を導出する問題に取り組んだ．とりわけ３次の Landen 型３項関数等式や Spence-Kummer 型の９項関数等式など古典的ポリログ関数の関数等式のうち複雑な補正項を必要とする代表的な例に対してもℓ進ガロア類似の正確な形を求め証明を与えることに成功した．また，ℓ進ガロア多重ポリログに対して，多重次数に関する双対性と変数に関する反射性という二つの側面を持つ関数等式の系列を見出し，これに証明を与えた．

白石伝助氏によるこれらの新たな関数等式の確立に関する研究成果は,絶対ガロア群上に定義されたℓ進ガロア多重ポリログ関数の系列の間に，古典的な多重ポリログ関数と並行して顕著な関係式を導くことができることを示しているが，その導出過程は Nakamura-Wojtkowiak の仕事を拡張する形で，積分表示に頼らない代数的手法を駆使する点に特長がある.とくに３点抜き射影直線の上に適切な代数多様体から誘導される代数的対応を見出し，それらの数論的基本亜群の間に生じる群論的相互関係を精確に分析するための忍耐強い解析力とともに，関数等式を定義体の絶対ガロア群全体の上で成立させるために必要な低次補正項を漏れなく明示的に与える計算力において高度な技量を示している．

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．