様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名　（　　　　　後藤　倫　　　　　）	
論文題名	Algebraic Aspects of Multiplier Maps on Algebraic Dynamical Systems on the Projective Line （射影直線上の代数力学系の乗数写像の代数的様相）

論文内容の要旨

この論文は、射影直線上の代数力学系のなすモジュライ空間上で定まる、力学系に対してその乗数(multiplier)、すなわち周期点における微分の値、たちのなす集合を与える写像、乗数写像(multiplier map)について、その性質を主に古典的な不変式論を中心とした代数的側面から考察した論文である。

この論文の主な内容は、次からなる。

(1) 固定点の乗数写像が与える不変式、古典的に良く知られた終結式と判別式の二つを含む終結式系の類似物である不変式族を判別終結式(Discriminant-resultant)と名づけ、その古典的な不変式論における表示である括弧表示(Bracket Expression)を与えた。

(2) (1)において得た括弧表示を用いて、固定点の乗数写像について知られた性質に純代数的な再証明を与えた。証明には団代数と呼ばれる組み合わせ的な代数構造から導かれる単項式順序を用いた。

(3) 3次の写像力学系のモジュライ空間上の2次の乗数写像、すなわち周期2以下の周期点に対する乗数を与える写像が、その一般の点において単射であることを2通りの方法で示した。これは既に知られていたHutz-Tepperの結果の訂正を含む。また、McMullenによって示された、n次の乗数写像がnが十分大きいとき有限射であるとする結果の(Poonenなどによって問われていた)3次写像の場合における精緻化であり、MilnorやSilvermanによる2次写像の場合の計算の3次写像における類似である。

(4) (3)に関連して、3次の写像力学系のモジュライ空間の座標環である不変式環の具体的な表記を用いて、その上の2次の乗数写像を明示的に計算した。また、明示的な計算の高速化のためのアルゴリズムを開発した。不変式環の具体的な表記はWestによる結果などに基づいている。

(5) 射影直線上の代数的自己対応の力学系のなすモジュライ空間上で定義される乗数写像が、一般の点において像への有限射である場合の、その像への次数の上限を与えた。

また、これらの内容のうち、

(1),(2)の内容は”Bracket polynomial expression of discriminant-resultants as SL2-invariant”として、

(3),(4),(5)の内容は”Dynamical Systems of Correspondences on the Projective Line II: Degrees of Multiplier Maps”

として発表予定である。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏名（後藤倫）		
論文審査担当者	（職）	氏名
	主査　教授	安田　健彦
	副査　教授	髙橋　篤史
	副査　教授	渡部　隆夫
	副査　教授（京都工芸繊維大学）	奥山　裕介
	副査　准教授	大川　新之介

論文審査の結果の要旨

本論文で後藤倫氏が扱ったテーマは射影直線上の力学系である。より具体的には、力学系のモジュライ空間の記述や、このモジュライ空間上で定義される乗数写像と呼ばれる重要な写像の性質について研究した。力学系の研究で通常扱われる自己写像のケースでは、このモジュライ空間は Silverman 達により従来から考えられてきた。後藤氏は、自己写像の一般化である自己対応の力学系やそのモジュライ空間について考察し、その基本的な性質を複数、本論文で導いた。これは、彼自身の以前の研究を継続、発展させたものである。モジュライ空間の構成には幾何学的不変式論を用いる。そのため、モジュライ空間や乗数写像の詳細な解析には、不変式環や不変式体を記述する必要がある。後藤氏は、不変式論や表現論の幅広い知識と卓越した計算力で、解析を行い以下に述べる興味深い結果を導いた。

乗数写像の記述において重要な役割を果たすのが、後藤氏が判別終結式と呼ぶ多項式の系列である。判別式や終結式は、古典的かつ重要な多項式だが、それらを特別な場合として含む判別終結式が自然と現れることを後藤氏は発見し、その性質を研究した。特に、判別終結式をブラケット多項式を用いて表す公式を発見、証明した。また、この公式を応用することで、乗数関係式や判別終結式の代数的独立性を純代数的に証明することに成功した。これらの結果は力学系の研究に動機付けられたものだが、それ自身大変興味深い研究成果である。

本論文では、乗数写像の次数や双有理性についても重要な成果を得ている。固定点や周期点の乗数から元の力学系がどの程度復元されるかを問う「逆問題」は力学系における重要なテーマである。この方向で最初の大きな結果は McMullen（1987 年）によるもので、十分に高い次数までの乗数から力学系が高々有限個に定まることを主張する。その後、この方向で Milnor、Silverman、Gorbovickis 達による成果が知られている。後藤氏は、3 次の力学系のモジュライ空間上の 1 次と 2 次の乗数写像の積が像の上への次数 1 の写像、つまり、双有理写像であることを示した。これは、ジェネリックな 3 次の力学系は 1 次と 2 次の乗数から完全に復元されることを意味する。Hutz-Tepper が 2013 年の論文で同じ写像の次数は 12 であると述べていたが、後藤氏が計算の誤りを見つけ、正しい次数は 1 であることを示した形である。この後藤氏の結果と Jie-Xie による、4 次以上の力学系に対する高次の乗数写像に関する研究結果と合わせると、高次乗数写像のジェネリックな単射性の問題が完全に解決し、力学系の逆問題に関する大きな進展である。この他にも本論文では、一般次数の対応の力学系に対し、1 次と素数次の乗数写像の積が一般有限であるという仮定の下で、その次数の上限を明示的な公式で与えることにも成功している。

このように、後藤氏は本論文で射影直線上の力学系の分野に重要な進展をもたらした。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。