

Title	On invariants of quandles using Alexander matrices associated with quandle 2-cocycles
Author(s)	谷口, 雄大
Citation	大阪大学, 2024, 博士論文
Version Type	
URL	https://hdl.handle.net/11094/96374
rights	
Note	やむを得ない事由があると学位審査研究科が承認したため、全文に代えてその内容の要約を公開しています。全文のご利用をご希望の場合は、 〈a href="https://www.library.osaka-u.ac.jp/thesis/#closed"〉 大阪大学の博士論文について 〈/a〉 をご参照ください。

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

論 文 内 容 の 要 旨

氏 名 (谷口 雄大)

論文題名

On invariants of quandles using Alexander matrices associated with quandle 2-cocycles
(カンドル2-コサイクルに付随したアレキサンダー行列を用いたカンドルの不変量について)

論文内容の要旨

アレキサンダー多項式は古典的な結び目の不変量の1つであり、この不変量は結び目群のアレキサンダー行列の初等イデアルの生成元として定義される。アレキサンダー行列はFoxによって導入された自由微分によって、結び目群の有限表示から計算できることが知られている。これらの概念はLinやWadaによってねじれアレキサンダー多項式やねじれアレキサンダー行列に拡張され、現在でも活発に研究されている。

カンドルは、集合とある3つの公理を満たす2項演算の組のことであり、JoyceとMatveevによって独立に導入された概念である。カンドルは結び目理論と相性が良く、カンドルを用いて多くの結び目の不変量が今までに定義されてきた。近年、IshiiとOshiroによって有限表示カンドルに対するf-ねじれアレキサンダー行列と呼ばれる行列が定義された。この概念はカンドルの有限表示とカンドル準同型とアレキサンダー組と呼ばれる写像の組を固定することによって得られ、この行列の初等イデアルはカンドルの不変量を与える。また適切にアレキサンダー組を設定することで結び目群のアレキサンダー行列を復元できるため、結び目群のアレキサンダー行列の一般化になっている。本論文ではカンドル2-コサイクルと呼ばれるカンドルの直積からアーベル群へのある条件を満たす写像を用いてアレキサンダー組を構成する。さらにこのアレキサンダー組に付随したf-ねじれアレキサンダー行列から得られるカンドルの不変量について考察を行う。

1つ目の結果は有向絡み目の絡み目カンドルについてである。この場合はCarter, Harris, Nikiforou, Saitoによって導入された成分ごとのカンドル2-コサイクル不変量によってカンドル2-コサイクルに付随したアレキサンダー行列の0次初等イデアルが決定されることを示した。またこの結果を用いることによって同型な結び目群をもつ結び目をカンドルのアレキサンダー行列を用いて区別した。アレキサンダー多項式などの結び目群のアレキサンダー行列から得られる不変量は結び目群の不変量であり、同型な結び目群を持つ結び目は区別することができない。今回の結果からカンドルのアレキサンダー行列から得られる不変量は結び目群のアレキサンダー行列から得られる不変量より真に強い不変量ということが従う。

2つ目の結果は4次元空間内の有向曲面結び目の結び目カンドルについてである。このとき、カンドル2-コサイクルに付随したアレキサンダー行列の0次初等イデアルはCarter, Saito, Satohによって構成されたカンドル2-コサイクルを用いた曲面結び目の不変量で記述されることを示した。特に曲面結び目が2次元結び目、すなわち埋め込まれた曲面が2次元球面の場合にはCarterらの不変量は自明な値をとるので、カンドル2-コサイクルに付随したアレキサンダー行列の0次初等イデアルも常に自明になることが従う。

3つ目の結果は連結なカンドルについてである。カンドル2-コサイクルが与えられると自然に2次のカンドルホモロジー群からアーベル群への準同型が誘導される。今回、連結なカンドルのカンドル2-コサイクルに付随したアレキサンダー行列の0次初等イデアルはこの準同型を用いて記述できることを証明した。また2つ目の結果と3つ目の結果を組み合わせることにより、任意の2次元結び目の結び目カンドルの2次のカンドルホモロジー群が自明であることを示した。

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 (谷 口 雄 大)		
	(職)	氏 名
論文審査担当者	主 査	教授 鎌田 聖一
	副 査	教授 後藤 竜司
	副 査	教授 石田 政司
	副 査	准教授 大場 貴裕

論文審査の結果の要旨

カンドルは3つの公理を満たす2項演算を持つ代数である。その公理は結び目理論におけるライデマイスター変形に対応することから、結び目の不変量の構成などの応用ができ、これまでに多くの研究がなされてきている。特に、結び目カンドルと呼ばれる結び目の不変量は、群を用いた結び目の最も基本的な不変量である結び目群を自然に導出することが知られており、不変量としては結び目カンドルの方が結び目群よりも強力な不変量である。これまで群を用いて議論されていたさまざまな不変量について、カンドルを用いた類似の不変量が定義されるか、またそれらは群を用いた不変量よりも真に強力であるかという問題は重要な研究課題となっている。

本論文では結び目カンドル及び一般のカンドルをカンドルの2コサイクルに付随したアレキサンダー行列を対象に考察を行い、上記の問題に一定の解答を与えている。本論文の著者はカンドルの2コサイクルからアレキサンダー組と呼ばれる写像の対を構成し、それに付随した捩れアレキサンダー行列についてさまざまな考察を行っている。主定理の一つは、結び目カンドルに対して、ある2コサイクルに付随したアレキサンダー行列の0番初等イデアルが、Carter、Harris、Nikiforou、Saitoの意味のカンドル2コサイクル不変量から得られることを示したものである。その応用として、同じ結び目群を持つある結び目の組を、カンドルのアレキサンダー行列から得られる不変量で区別することに成功している。これはアレキサンダー行列から得られる不変量に関して、カンドルが真に群よりも強力であることを示している。

4次元空間に埋め込まれた有向閉曲面がなす曲面結び目についても結び目カンドルという不変量が定義されている。この場合もCarter、Saito、Satohの意味のカンドル2コサイクル不変量からアレキサンダー行列の0番初等イデアルが得られることが示されている。この結果の類推が、一般の連結カンドルの場合にも与えられている。このように、カンドルの2コサイクルに付随したアレキサンダー行列に関して著しい結果が多く示されている。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。