Title	構造記述のための形式文法に関する研究
Author(s)	安部, 憲広
Citation	大阪大学, 1974, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/969
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

構造記述のための形式文法に関する研究

1974年2月

安　部　憲　広

構造記述のための形式文法に関する研究

安　部　憲　広

内　容　梗　概

本論文は．筆者が大阪大学大学院基礎工学研究科情報工学専攻博士課程在学中に行なった一次元構造および一般的構造を記述する形式文法に関する研究をまとめたものである。

緒論では，本論文の第1編と第2編の関連性について述べるとともに，本分野における研究の現状，工学上の意義，本研究により得られた結果について概説している。また各編第1章および各章第1節についても，各編および章に述べられている研究の現状や得られた結果について概説している。

第1編第2章は，データ構造や構造を有するパターンなどを記述する一モデルとしてのウエッブ文法が定義され，そのうち正規ウエッブ文法の関係記述能力が検討され，種々の形式の正規ウエッブ文法と，記述可能な構造との関係が解明され正規ウエッブ言語族の特性化が行なわれる。

第1編第3章では，前章で定義されたウエッブ文法に特徴的な非正規なうめこみを有する非正規ウエッブ文法によって生成される非正規ウエッブ言語族の性質の解明が行なわれる。非正規ウエッブ文法の記述能力は極めて高く，正規ウエッブ文法で記述不可能な構造も，非正規ウエッブ文法によれば簡単に記述可能であることが，典型的なグラフ構造の記述例とともに示される。そして，正規，非正規ウエッブ言語族間の関係が完全にもとめられている。

第1編第4章は，正規ウエッブ文法の記述能力を向上させるため，プログラムドウエッブ文法が定義される。構造記述にとって有利な非正規ウエッブ文法も，構造解析の目的には手続きがめんどうなため，記述・解析ともに簡潔に適用可能なプログラムド正規ウエッブ文法を提案し，一次元構造および一般的構造の記述能力を検討する。さらに適用条件のプログラム化に関しても考察し，プログラムド正規単調ウエッブ文法の記述能力が最も高いことを示し，一般的構造記述論の

完全解明を行なう。

第1編第5章は，第1編に対する結論であり，第1編で得た諸結果について検討を行ない，将来への見通しについて述べている。

第2編第2章は，一次元構造記述文法である種々の形式文法によって生成される言語族に対して，これまで考察されていなかった新らしい形式の演算を定義し，各言語族の閉包性を議論する。従来のＡＦＬ演算と異なり，記述能力の低い文法による言語族では閉包性は成立せずとも，いくつかの言語族に対しては閉包性の成立する演算を定義検討することは，数多く提案されている文法の整理にとって有効なものである。

第2編第3章は，上記の数種の文法より特に完全並列文法を選び，この文法と同じく並列システムのモデル化を目的とした同時導出文法，インデクスト文法などとの関係を検討し，完全並列言語族の諸性質を解明する。

第2編第4章は，第2編に対する結論であって，第2編で得た結果について考察を加えている。

結論では，第1編，第2編を通じて，本論文で得た諸結果を検討し，今後の見通しについて述べている。

関 連 発 表 論 文

(1) 安部憲広，水本雅晴，豊田順一，田中幸吉：“ウエッブ文法と二，三のグラフ”，信学論（C），Vol.54−C，No.12，P.1149.（昭和46年12月）

(2) 安部憲広，江沢義典，水本雅晴，豊田順一，田中幸吉：“分離可能なウエッブを生成するウエッブ文法”，信学論（D），Vol.55−D，No.4，P.294.（昭和47年4月）

(3) 安部憲広，水本雅晴，豊田順一，田中幸吉：“ウエッブ文法によるグラフの表現”，情報処理，Vol.13，No.7，P.452.（昭和47年7月）

(4) 安部憲広，水本雅晴，豊田順一，田中幸吉：“非正規ウエッブ文法に関して”，信学論（D），Vol.56−D，No.2，P.124.（昭和48年2月）

(5) 安部憲広，水本雅晴，豊田順一，田中幸吉：“いくつかの新しい演算のもとでの言語の閉包性について”，信学論（D），（昭和48年11月 採録決定）

(6) N. Abe, M. Mizumoto, J. Toyoda and K. Tanaka, "Web Grammars and Several Graphs", J. of Comput. System Sci., Vol. 7, No.1, p. 37. (February, 1973)

目　　次

緒　　　論

電子計算機の登場した時，その人間の何十倍という数値計算能力に驚かされた人間は，計算機に人間の知能と類似の能力を持たせ得ると期待し，それ以来人工知能に関する研究が数多く行なわれて来た。しかしこの研究はどのような点から着手すれば妥当であるかについての基本的方針はなく，とにかく実現可能であると想像されるものより手をつけてその結果をみて次に進んでゆくといった方法論をとりつづけてきた。そして現在，その部分的成功にもかかわらず，なお多くの問題に直面している。そのうちで最も基本的な難問題が図形認識であると一般に考えられるに到った。

図形認識の研究は，実用上の意義が大きいこともあり，現在その研究は広範囲にわたって進められている。そして今日では，基本的な文字図形，部分図形などに関してはある程度の解決を得ている。しかし少し複雑な図形の認識率は極めて低く，実用段階との距離はいくらも短縮されておらない。このような図形認識は一度に可能なものではなく，その局所的な基本的特徴の抽出と，それらの特徴間の関係を把握することによってはじめてその認識の可能性が生まれると考えられる。こうした認識に立って，構造を持ったデータを記述する形式化について考察し，認識すべき対象より抽出された構造記述を解析しその全体としての特徴を識別するといった研究が必要となる。

このような構造記述はパターン認識そのもの以外にも，構造を持ったデータ処理には不可欠なものである。今日，電子計算機の使用を必要とする分野は増々拡大し，その取り扱われるデータも大容量であり，しかも複雑な構造を有するものが多い。このデータを利用しよい形式で管理するために，色々なデータ構造が考案されている。そうした中には少し工夫すれば一次元のリスト形式で表現可能なものもあり，それらは従来より研究されている一次元の構造記述形式が適用可能

である。しかし，そうした工夫がめんどうであり，その取り扱いが容易でないものも少くない。このような対象に対しては，本来対象の持っている構造を自然な形で記述管理すべきである。計算機内部に，こうした対象の持つ構造をモデル化して表現するためにデータ構造なる概念が生まれ，データとプログラムの独立性のために各種のデータ記述言語が考案されている。この言語は，意図するデータベイスの論理構造，記憶構造，索引構造などを記述するものであるが，個々の言語で使用される論理構造などは，それぞれの目的によって異なっており，一般的な論理構造の記述という問題認識に欠ける点がある。いろいろなタイプの論理構造の指定可能性を有している述記形式に関する考察，および各種の構造に特有の典型的特徴を客観的に評価しうる形式化についての検討の必要性はこれからますます高まるであろうことは容易に推測でき，このような方向での研究推進を行なってゆかねばならない。

本論文では,構造記述の形式化として生成文法の概念を拡張したウエッブ文法による一般的構造の記述能力の検討と，従来より数多くの研究者によって考察が行なわれて来た一次元構造生成文法について検討を行なう。

第１編は，前述した図形構造の記述・解析の一モデルとしてPfaltz, Rosenfeld によって提案されたウエッブ文法の関係記述能力を検討する。その文法としての定義自体は従来の生成文法の拡張形式をとるが，一般的構造の記述のためにはさらにどのような形式化が必要であるかを検討し，本編で定義される文法系が一般的構造記述にとって必然的なものであることを示し，記述対象の構造と記述に必要な文法のタイプとの関係を議論する。

第２編においては，従来より数多く提案されて来た句構造文法の生成する言語族の特性化の一つである演算に関する閉包性といくつかの言語族の比較について議論する。生成文法モデルはChomsky による提案後，今日数理言語学としてその立場を確立しているが，その議論対象の大部分が数学的興味にもとづくもので

あり，現実への応用といった面での理論化が無視されている傾向がある。本編では，時分割などの問題記述をモデル化した演算を定義し，各言語族の閉包性を検討する。さらに並列動作をモデル化したいくつかの文法の生成する言語族の性質などの比較検討を行なう。

第　1　編

ウエッブ文法とその関係記述能力

第1編　ウエップ文法とその関係記述能力

第一章　緒　　論

近年の電子計算機技術の発展にともなって，大容量のしかも構造を有するデータ処理技術の必要性が唱えられている。

構造を有するデータの計算機内表現の手段として，ＤＢＤなどのデータ記述言語が提案され，その理念を実現するシステムも数多く構成されている。しかしそれらはすべて具体的な対象によって選択された格納形式，諸機能を有しており，統一的，客観的にどのシステムが良いかといった問題は取り扱いにくいのが現状である。

ここで，構造を有するデータの格納形式を議論する場合，少なくとも次のような基本的に異なる2つの立場の存在する点を無視することはできないだろう。

その1つは，構造をもったデータ処理部が一つの高速処理を要求されるシステムの完全な一部として構成されており，その処理速度が他部分の処理速度に比して優るとも劣らぬ速度を要求される場合である。こうした場合には，データの更新処理，探索時間，記憶容量なども可能な限り節減せねばならず，一般の使用者にとっての利用可能なシステムへの接近法も限定されざるを得ない。

いま1つは，使用者にとってその利用法が容易であり，種々の利用法が提供され，しかも計算機を思考の一部を補足するものとして計算機を利用しようとする場合を挙げることができよう。たとえば，ＣＡＤなどに見られるような人間と計算機の会話を期待するシステムなどがこれにあたるであろう。特に，図形などを介しての会話は，我々が処理手続きを考える際，図形のどの部分の修正が必要かといった点をあらかじめ理解することは容易ではなく　プログラムのダイナミック化は現状では困難である。こうした場合，我々としては処理の勝手な時点でのモデルの変更を必要とし，そのためには理解が容易であり，変更手続きも比較的

簡明なシステムが身近に存在することを期待する。この目的を達するには，少くとも計算機内部に構成されているモデルを表現する形式，しかも我々に理解しよい形式化が望まれよう。

我々にとって少くとも理解しよいものは ポインターの変更などの物理的なものよりはむしろその論理的な関係の変更であり，したがって論理的構造記述とその変換を指定しうる記述形式が望まれる。

ところで，現実のデータ構造では 各データセルに格納されるデータは種々雑多であり，データセル間の関係，すなわちポインターに付随する属性も一定ではない。しかし実際に使用される対象に関しては，各セルに格納される内容，属性などは可能な集合の一部であり，現実的要請にもとづき有限であると考えることができる。またデータセル間の関係については，その種類はデータセルの可能性の次数をはるかに越えるが，やはり有限と仮定して一般性を失うことはない。したがって，セルを頂点に，関係を頂点間の関係に，そしてそれらの属性をラベルとして表わすことによってデータ構造の論理的表現を与えることができる。

ウエッブ文法は各種の構造を表現しまた，解析することのできる関係記述方式の一つであり 上記の様なデータ構造をモデル化し記述することができる。それのみではなく，関係記述という点よりパターン認識などの問題とも密接な関連をもつことに注目しなければならない。

電子計算機の登場以来，その処理速度という面で人間を凌駕する点を生かし，人間のパターン処理能力を数値化して評価しようとする試みが多くの研究者によって行なわれ，基本的な性質を有する対象の認識は可能になっているといえる。しかし，直線，円弧，文字などは認識可能であっても 我々の視界に存在している対象は，これらの成果をむなしくするに足るだけ，十分に複雑であるともいえる。

複雑なパターンの認識を一度に解決することは極めて困難であり，可能な解決

法としては，パターン中の基本的特徴とそれらの特徴間の関係の抽出が是非必要であり，局所的特徴の認識は近い将来実現されると考え得る。こうした立場に立てば，パターン認識は基本的特徴とその関係の記述，および記述の解析手法の確立に帰着することができる。

少くともこのような考え方のもとに，多くの研究者によって，その関係記述を句構造文法，メタ表現を利用した記述方式にもとめる研究が行なわれて来たが，前者では記述可能な構造が限定されすぎるという欠点を，後者ではメタ表現の解釈の機械化が容易でないという欠点を有している。

これに対してウエッブ文法は，前者の拡張であるとともに，後者のメタ表現を文法自身で表現可能であり，そのパターン認識への適用が期待されている。

本編は，種々の構造を記述するのにウエッブ文法といった一手段を用いればどのような構造まで記述可能であるのか，また指定された構造を記述するにはどの程度の条件をウエッブ文法に与えることが必要であるかに関して理論的考察を行ない，ウエッブ文法を利用する関係記述とその解析システムの実現への基礎理論の確立を目的とする。

第二章　正規ウエップ言語族

2.1　序　言

人間の計算・記憶能力をはるかに凌駕する電子計算機の使用による計算の迅速化の実現について，一般的な図形の認識および広義のパターン認識の問題を含む研究が各所で計算機の応用として試みられて来た。文字パターン等対象パターンそのものへ何らかの制限を加えた場合の認識はある程度解明されるに到ったが，対象パターン中に多くの特徴が相互関係を有している場合などはパターンへの制限は容易でなく，その認識は極めて不十分である。このような問題解明には局所的な特徴とそれらの局所的関係の抽出によるパターン構造のモデル化と，それを計算機の言葉で記憶装置にどのような形式で格納し利用するかという問題が重要となる。

構造を有するデータ，パターン処理研究を単純な特徴とその一次元的関係記述によって解決しようとした数多くの研究が報告されている〔3〕が，その対象は染色体認識のような対象を限定したものであり，一般的な構造記述には適していない。より一般的な構造記述を試みた例として文献〔4〕に報告されているメタ表現を利用した方法があるが，このメタ表現された記述と対象構造との関係処理は必ずしも容易ではない。

ウエップ文法は，上記モデルの拡張として提案されたもっとも一般的な関係記述文法であり，従来の形式文法論とオートマトン理論と同様，ウエップ文法とその受理機械との対応が存在し，対象の記述とその解析過程を利用して種々の構造を持つパターンの認識への応用が期待される。

本章はウエップ文法という最も一般的な関係記述文法を用いれば，どのような構造が記述可能であるかに関して理論的考察を行なう。ウエップ文法はウエップと呼ばれる頂点にラベルを持つグラフ構造を生成する文法であり，頂点間の関係頂点ラベルの変更を指定するものである。したがってその基本的定義は句構造文

法のそれに類似しているが，関係づけといった点で重要な差異を認めることができる。関係づけを受ける頂点には，位置関係といったような最初から与えられた情報を何ら有しておらず（たとえば，句構造文法では左右の記号と連接という関係を持ち，文献〔6〕の文法では生成元が2つある自由アーベル群によって規定される4隣接という関係が与えられている），書き換え前後の頂点間の関係指定は，書き換え規則の形式とともに書き換えられる頂点の対応と書き換えを受けない部分との関係指定を必要とする。この点より従来の文法には定義されなかった「うめこみ」という概念が必要となる。

第2節では，本章で考察されるウエッブ文法の基本的定義を示し，第3章では書き換えを受ける頂点と書き換え後の頂点が一対一対応関係を持つ「正規なうめこみ」を有する正規ウエッブ文法の生成するウエッブ言語族の関係解明を検討する。

2．2　ウエッブ文法に関する諸定義

本論文に示すウエッブ文法とは，頂点にラベルを持つグラフ（ウエッブ）を生成する文法を意味する。

〔定義2.1〕　頂点にラベルを持つV上のウエッブWとは，（N_W, F_W, A_W）の3組で表わされる。ラベルの集合Vは有限の記号集合であり，

(1)　N_Wは頂点（vertices）集合

(2)　F_Wは，F_W；$N_W \rightarrow V$のラベル関数

(3)　A_Wは，弧（arc）と呼ばれるN_Wの要素の対であり，有向（directed）ウエッブでは順序対，無向（undirected）ウエッブでは単なる対とし，（P, Q）$\in A_W$のとき，頂点P, Qは隣接であるという。

〔定義2.2〕　ウエッブ文法Gは，$G=$（V, I, R）の3組で表わされ，

(1)　Vは有限記号集合

$V = V_{TG} \cup V_{NG}$, $V_{TG} \cap V_{NG} = \phi$,

$V_{NG} \neq \phi$, $V_{TG} \neq \phi$

(2) Iは初期ウエッブの有限集合

(3) Rは規則の有限集合であり，形式的に(α, C, β, E) の4組で与えられる。ここに，α，βはウエッブ，Cは規則の適用条件(applicable condition)と呼ばれる論理関数であり，ウエッブαとαの頂点に隣接な頂点に関する言明であると規定する。Eはうめこみ関数(embedding function) と呼ばれるもとのウエッブへのβのうめこみを指定する真なる論理関数の有限集合であり，αの頂点と，それに対応するβ中の点およびもとのウエッブ上でのαの頂点に隣接な頂点に関する言明であり，それらの隣接(順序)関係を保存しなければならないと規定する。

〔定義 2.3〕 V上のウエッブ$W = (N_W, F_W, A_W)$に対してV上のウエッブ$S = (N_S, F_S, A_S)$がWの部分ウエッブであるとは，

(1) $N_S \subseteq N_W$

(2) $X \in N_S$ ならば， $F_S(X) = F_W(X)$

(3) $P, Q \in N_S$に対し，$(P, Q) \in A_S$ ならば$(P, Q) \in A_W$, かつ$(P, Q) \notin A_S$ ならば$(P, Q) \notin A_W$ とする。

〔定義 2.4〕 規則(α, C, β, E) がウエッブWに適用可能(applicable)とは，

(1) αがWの部分ウエッブである。

(2) Wの中でのαに関するCが真である。

とする。

〔定義 2.5〕 ウエッブ文法Gによって，初期ウエッブから導出されるウエッブ上のすべての$A \in V_N$ が， $a \in V_T$に書き換えられるとき，導出は終了すると呼び，導出の終了するウエッブは，文法Gにより生成されると呼ぶ。当然，導出

の終了しないウエッブは，文法Gからは生成されていないことになる。

ウエッブ文法Gにより生成されるウエッブの集合(以後，単に言語と呼ぶ) L_Gとは，初期ウエッブIからの導出の終了したウエッブの集合であり，形式的に$L_G=\{W \mid I \overset{*}{\Rightarrow} W,\ F_W(X) \in V_T,\ {}^{\forall}X \in N_W\}$とかく。

導出過程，導出鎖などの意味は，従来の定義による意味とする。

〔定義2.6〕 文法Gの各規則(α, C, β, E)に関して，関数$Im: N_\alpha \to 2^{N_\beta}$を定義とするとき，$I_m(P)$を点$P \in N_\alpha$の像とよぶ。文法$G$の規則($\alpha$, C, β, E)が正規とは，${}^{\forall}P \in N_\alpha$, $|I_m(P)|=1$が成立することであり，規則(α, C, β, E)が非正規であるとは，${}^{\forall}P \in N_\alpha$, $|I_m(P)| \geq 1$の成立することであるとする。そして，文法Gが正規とは，そのすべての規則が正規，文法Gが非正規とは，そのすべての規則が非正規であることとする。

そして定義2.2により，規則(α, C, β, E)をウエッブWに適用する場合，${}^{\forall}P \in N_\alpha$, ${}^{\forall}S \in N_W - N_\alpha$に対して$(S, P) \in A_W$ならば，${}^{\forall}Q_i \in I_m(P)$に対し$(S, Q_i) \in A_{W-\alpha\cup\beta}$，$(S, P) \notin A_W$ならば$(S, Q_i) \notin A_{W-\alpha\cup\beta}$でなければいけない。

〔定義2.7〕 文法Gのすべての規則(α, C, β, E)において，$\alpha=(N_\alpha, F_\alpha, A_\alpha)$, $\beta=(N_\beta, F_\beta, A_\beta)$とする。

〔a〕：$N_\alpha \subseteq N_\beta$であり，Cが恒真であるとき文法$G$を単調(monotone)文法，略してmcswgと記す。

〔b〕：〔a〕かつ，$P \in N_\alpha$なる$F_\alpha(P) \in V_N$をみたす頂点Pの像Qに対し，

(1) $X \in N_\alpha - \{P\}$ならば，$F_\alpha(X)=F_\beta(X')$。

(2) X, $Y \in N_\alpha$に対し，$(X, Y) \in A_\alpha$ならば，$(X', Y') \in A_\beta$。

(ただし，X', Y'はそれぞれX, Yの像である)

である文法を文脈規定ウエッブ(context sensitive web)文法，略してcswg

と記す。〔a〕で，Cが恒真とは限らない論理関数ならば，mcswg, cswgは適用条件をもつ文法と呼ぶ。

〔c〕：αが一点Pよりなるウエッブであり，〔b〕をみたすとき，文法Gを文脈自由（context free）ウエッブ文法，略してcfwgと記し，とくに$F_{\beta}(X) \in V_N$なるXがN_{β}，Iにたかだか一つしか存在しないとき，線形（linear）ウエッブ文法，略してlwgと呼ぶ。また，それぞれの文法GによるL_Gを，たとえばcswgに対してcsw$L$，その族をcsw$\tilde{L}$とかくことにする。

〔定義2.8〕　文法Gが，L_G'を間接生成する（indirectly generate）とは，

(1)　L_G'のラベル集合がV_Lのとき，$V_L \subsetneqq V_{TG}$。

(2)　$L_G' = \{W' \mid I \overset{*}{\Rightarrow} W', F_W(X) \in V_L, {}^{\forall}X \in W'\}$。

(3)　$L_G = \{W \mid I \overset{*}{\Rightarrow} W, F_W(X) \in V_{TG}, {}^{\forall}X \in W\}$。

なるWに対して，$|N_{W'}| = N$のとき$|N_W| - |N_{W'}| \geq M(N)$をみたすとする。$M(N)$は$N$による整数である。また，たとえばncswgにより間接生成されるL_G'を，I—ncsw Lその族をI—ncsw$\tilde{L}$と略記する。

2．3　正規ウエッブ言語族の諸性質

〔定理2.1〕　任意のウエッブ文法$G=(V, I, R)$に対して，Iが一点ウエッブ$\{\dot{S}\}$である等価なウエッブ文法$G=(V', I', R')$が存在する。

（証明）　$V' = V \cup \{S\}$，$I' = \{\dot{S}\}$，$R' = R \cup \{\dot{S} \Rightarrow W_i\}$とする。ただし，$W_i \in I$，したがって，明らか（証明終）。

〔補題2.1〕　nlw$L$でないncfw$L$が存在する。

（証明）nlwgでは，任意の方向に書き換えられる点はたかだか一つであるため，たとえば任意のツリーは生成できない。（同様なことが，文献〔6〕に示されている。図1に示すncfwgは，文献〔8〕のancfwgに等価であり，すべてのツリ

ーが生成される。（証明終）

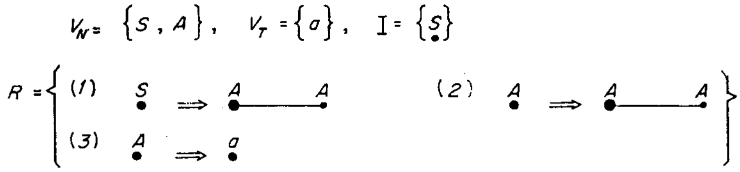


図1. すべてのツリーを生成するncfwg（右辺の黒点は像を表わす。）

カットポイントを持たない，連結なグラフは分離不可能（nonseparable）なグラフと呼ばれ，分離不可能な最大の部分グラフをブロックと呼ぶ。

〔補題2.2〕 初期ウエップIが一点ウエップであるncfwg$G$によって生成された言語L_Gに属する任意のウエップのブロックは，そのncfwg Gの規則のβか，βのブロックのみからなる*。

（証明） βは連結なウエップとする。（連結でないなら，αの像以外の部分ウエップは別に考えればよい）$W \in L_G$の導出において，ウエップWの一点αが$\alpha \Rightarrow \beta$（Cが恒真，Eが正規ゆえ，このように略記する）なる規則により，W'がW''に書き換えられたとする。このとき$\alpha_i = I_m(\alpha)$とすれば，βのタイプにより，四つの場合が存在する。

(i). βがブロックのとき：$W'' - (\alpha_i)$は二つの部分ウエップ$W' - (\alpha)$と$W'' - W'$とに分割され，$u \in N_{W''-W'}$, $v \in N_{W''-W'}$なるu, vに対し，すべての$u-v$パスはウエップW''においてα_iを通るので，α_iはカットポイントである(whitney, Th 5)。よってW''のブロックはW'，βである。

(ii). βがブロックではなく，α_iがβのカットポイントである場合：α_iがβにおいてβ_1, β_2, ..., β_m（$m>2$）なるブロックのカットポイントであるとすれ

---

*：ウエップのラベル関数は考えず，同形の意味で，ブロックのタイプが規則によって限定されることを意味している。

ば，$W''-(\alpha_i)$ は，$W'-(\alpha)$ と $\beta_j-(\alpha_i)$ $(1\leq j\leq m)$ に分割され，任意の二つの分割上の頂点は α_i を通るパスによって連結される。よって W'' のブロックは W' と β_1，β_2 …，β_m である。

(iii)．β がブロックでなく，α_i が β のカットポイントではない：(i)と同様に $W''-(\alpha_i)$ は $W'-(\alpha)$ と $W''-W'$ に分割されるため，W'' の一つのブロックは W' である。ところが β は α_i 以外のカットポイントを持つため，β はそのブロックに分割される。

(v)．(ii) と (iii) の混合の場合：(ii)，(iii)より明らか。

W' に対しても，まったく同様なことがいえる。よって，結果は明らかである。
（ 証明終 ）

〔系 2.1 〕　nlwg において，補題 2.2 が成立する。

〔系 2.2 〕　ncfwL，L_G に属する任意のウエップのブロックは，ncfwg G の初期ウエップに属するウエップとそのブロック，規則の β か，β のブロックのみからなる。

〔定理 2.2 〕図 2 に示す言語 L_G は ncfwL ではない。

（略証）　初期ウエップが一点ウエップである ncfwg G が L_G を生成すると仮定すれば，補題 2.2 より，L_G のブロックはすべて G の規則の β とそのブロックだけからなる。したがって，(1) β が最小のブロックだけからなる場合，(2)それ以外の場合を考えればよいが，どの場合も異なる枝の長さを文法は制御できないため，L_G に属さないウエップも生成される。初期ウエップが一点ウエップと限らず，一般に有限個のウエップからなる場合も議論はまったく同じである。

一次元の cfg は，語の間への系列のそう入を許すが，ウエップ文法ではそうしたことができないため，$\{a^n\ b^n \mid n\geq 1\}$ に対応する言語は ncfwL でなくなる。
（ 証明終 ）

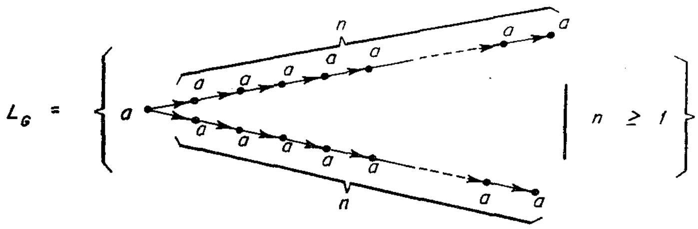


図 2. このウエッブはncfw Lではない。

〔補題 2.3〕 図3に示すncswg G_2は，すべての分離不可能なウエッブ，それのみを生成する。

（証明） 分離不可能なウエッブのみが生成されることを示す。V_T にかきかえられるのは，BだけであるためラベルC, D, Aをもつ点は必ずBに書き換えを受けなければならない。いま，(2)，(3)が適用された後，(4)が適用されれば，サーキットが導出される。もし，(4)が適用されなければ，(5)は適用可能ではなく，また，こうして導出されたサーキット上のB点に対して(8)が適用されたと仮定すれば，分離可能なウエッブができるが，それは，いつかは(10)～(13)，または(14)，(15)を適用されなければ，導出は終了しない。すなわち，すべてのラベルがaとなるためには，(4)が適用されれば(5)または(6)が，(8)が適用されれば(10)～(13)，または(14)，(15) が適用されなければならず，結局分離可能なウエッブは生成されない。つぎに，すべての分離不可能なウエッブが生成されることを示す。規則(1)によって2点よりなる最小の分離不可能なウエッブが生成される。Whitney (Th. 19) によれば，すべての分離不可能なグラフは，サーキットに弧または弧のチェインを加えて作成可能である。規則(2)，(3)，(4)によって任意のサーキットが生成されて，規則の(5)または(6)によって，B点上のサーキットができ，任意の弧は(7)によって，異なる2点間の弧のチェインは(8)～(13)または(14)，(15) によって書き加えることができる。前記のように，B以外のラベルが残されるような導出過程を採らぬ場合，Whitney の手順が実行可能である。したがって，証明

を終了する。

〔定理2.3〕 $ncfw\mathcal{L} \subsetneq ncsw\mathcal{L}$

ウエッブWの頂点Pの隣接する頂点の数を度数（degree）と呼び$\deg P$とかく。

〔定理2.4〕 ncswg では，すべての分離可能なウエッブのみを生成することはできない。

（証明） ncswg $G=(V, I, R)$が，すべての分離可能なウエッブを生成すると仮定する。いま，Iより導出されたウエッブの一つのブロック上の頂点の数をnとし，a_0を$|V|$に比して十分に大きな整数とし，$n>a_0$である場合を考える。この場合，これらのn個の頂点すべてが他のブロックとのカットポイントであるウエッブの導出を考える。こうしたウエッブの生成のためには，各頂点は，$A_j \Rightarrow C_i B_i$（A_j はブロック上の頂点のラベルであり，その像はC_i をラベルされ，C_i はブロックB_i と，もとのブロックとのカットポイントである）の規則を適用される。まず，一つの頂点が$m(m>a_0)$個のブロックとのカットポイントになる場合を考えて，それらのブロックをB_1i，B_2i，…，B_{ki}，…とする。$|V|$の有限性より$j \neq l$に対してB_{ji}とB_{li}とで同じ記号をラベルされた頂点がいくつも存在する。各ブロック上では，任意に頂点を加え，隣接しない頂点間に弧を加

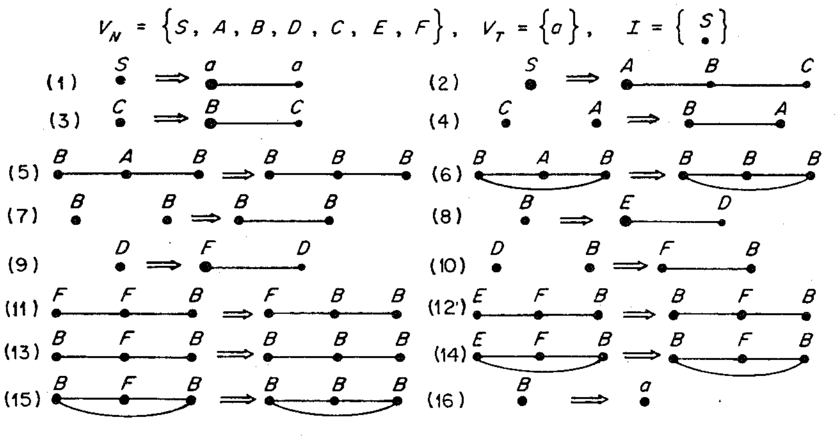


図3. すべての分離不可能なウエッブを生成するncswgの例。

える規則が必要である。しかし，これらの規則は，B_{ji}とB_{li}の 両頂点に対して適用可能なため，B_{ji}とB_{li} とが一つのブロックに書き換えられる場合が存在する。すなわち，もとのブロック上の一つの頂点が，一般に任意個のブロックとのカットポイントとならない場合が存在する。さらに，もとのブロック上の頂点で，同一のラベルを持つカットポイントがいくつも存在する。そのような頂点の二つをX，Yとすれば$F_W(X)=F_W(Y)$ である。いま，頂点XがカットポイントとなるブロックをB_1，B_2，・・・，B_m，・・・，Yに関してB_1' ，B_2'，・・，B_m'，… とする。このとき，異なるブロック上に同じラベルを持つ頂点は無数に存在する。また，各ブロックにおいて，頂点$X(Y)$とブロックB_K （B_K' ） 上の頂点P_K（P_K'）との間に弧を加える規則が必要である。 しかし，XとP_K に対して適用可能な規則は，YとP_K にも，XとP_K' に対しても適用可能である。そうすれば，もとのブロックと，ブロックB_K（B_K' ）は一つのブロックとなる。一般に，この議論をくり返せば，生成されるウエッブ自身がブロックとなり，分離不可能なウエッブが生成される。任意の2点が同一ブロック上の頂点であることを文脈に示すためには，同一ブロック上の頂点にマークを付さなければならないが，記号の有限性よりラベルでの表示は不可能である。したがって同一ブロック上のすべてに隣接な点を加え．その点に隣接な2点間に弧,弧のチェインを加えれば上記のような場合は存在しない。しかし，マークとなる頂点は必ず同一ブロック上のすべての頂点に隣接であり，ncswg では弧の消去は許されないので，すべてのブロックは実現されない。よって証明を終わる。

定理2.4は，ncswg が各ブロックのタイプが有限とは限らず，かつ分離可能であるウエッブを生成すると仮定すれば，そのブロック上の他のすべての頂点に隣接な頂点が少なくとも一つは存在しなければならないことを示している。この特殊な頂点を導出終了後消去することが許されれば，すべての分離可能なウエッブのみを生成することが可能であり，これが間接生成によって実現されることは

明らかであろう。

実際，任意のnmcswg（ncswg）を$G_1=(V_1, I_1, R_1)$とするとき（ただし，$V_1 = V_{T_1} \cup V_{N_1}$，$V_{T_1} \cap V_{N_1} = \phi$，$V_{T_1} \neq \phi$，$V_{N_1} \neq \phi$），新しく$V_{LT}$を導入して，$V_{T_2} = V_{T_1} \cup V_{LT}$．$V_{N_2} = V_{N_1}$，$I_1 = I_2$，$V_{LT} \cap V_{T_1} = \phi$，$V_{LT} \cap V_{N_1} = \phi$として，文法$G_2 = (V_2, I_2, R_2)$を作り，$R_2$は$(\alpha, C, \beta, E) \in R_1$ならば，$V_{LT}$よりなるウエッブ$\alpha'$を$\alpha$，$\beta$に$E$が正規となるように加えて作る（正規となるように，いつでもできる）。こうすればG_2はnmcswg（ncswg）であり，$V_L = V_{T_1}$とすれば，$V_{LT} \subsetneq V_{T_2}$であり，$L_{G_2}$の$V_{LT}$上の部分ウエッブは$L_{G_1}$に同形である。したがって，nmcsw $\mathfrak{L} \subseteq I-$nmcsw $\mathfrak{L}$，ncsw $\mathfrak{L} \subseteq I-$ncsw $\mathfrak{L}$である。

上記の定理などより，次の定理が成立する。

〔定理2.5〕　ncsw $\mathfrak{L} \subsetneq I-$ncsw $\mathfrak{L}$

つぎに，分離可能なウエッブの集合はnmcswgによって生成されることを示そう。

ホイール（wheel）とは，一つのサーキットに，そのすべての頂点に隣接な頂点を一つ加えたグラフをいい，加えられた頂点をホイールの中心と呼ぶ。

サスペンデッドチェインとは，$m+1$（$m \geq 2$）個の頂点列P_0，P_1，…，P_i，P_{i+1}…，P_mにおいてP_iとP_{i+1}が隣接であり，かつ$\deg P_j = 2$（$1 \leq j \leq m-1$）P_0，P_mは一つのブロック上の頂点であるものをいう。

(3)　グラフGの頂点数をv，弧の数をe，連結な成分数をpとするとき，グラフGのヌリティ（nullity）Nは，$N=e-v+p$で与えられる。

n（$n \geq 4$）点よりなるホイールは明らかに分離不可能である。すべての分離可能なウエッブを生成するためには，1本弧以外のブロックにはマーカが必要であった。このホイールの中心をそのマーカと考えよう。

ここで，Whitneyによって示された諸定理を考察してみよう。

(1)　ループ，多重路を持たない三角形以上のグラフにおいて，ヌリティ$N \geq 1$なる分離不可能なグラフ上の頂点は少なくとも2本の弧の上にある。

(2) ヌリティが$N=1$である分離不可能なグラフはサーキットである。

(3) ヌリティ$N \geqq 2$である分離不可能なグラフGに対して，Gから1本の弧またはサスペンデッドチェインを取り除いて，ヌリティが$N-1$である分離不可能なグラフを作ることができる。

(4) すべての分離不可能なグラフは，サーキットにサスペンデッドチェインまたは弧を加えて構成できる。

これらの定理に基づいて，まずホイールからサーキットを作ることを考えてみる。n（$n \geqq 4$）点のホイールWのヌリティNは$N=n-1$である。(2)によってWから$n-2$本の弧を取り除いてn点のサーキットを作ることが可能である。いっぽう，(1)によってホイールの中心をB点とすると$\deg B \geqq 2$でなくてはならない。したがってB点より取り除くことができる弧はたかだか$n-3$本であり，1本はホイールの周上より取る必要がある。このとき，上記の$n-3$本の弧を取り除いた後，その点の度数が3である点は2個しかない。したがって，その2点が隣接である場合に限ってその間の弧を取り除いてサーキットを作ることができる。上記以外の場合は，周上より弧を削除することはできないが，少なくともホイールからサーキットを構成する方法が一つは存在することが認識される。

以上の議論とWitney の定理4によって，つぎの補題が成立する。

〔補題2.4〕 n（$n \geqq 4$）点からなる分離不可能なグラフは，つぎの手順によって構成される。

(i) ホイールW_0を作る（ホイールの中心をB頂点とする）。

(ii) ホイールW_0の周上の頂点間に弧または弧のチェイン（チェイン上のすべての頂点はB頂点に隣接である）を加えたグラフW_1を作る*。

(iii) W_0またはW_1のB頂点から，$\deg B \geqq K$（$K \geqq 2$）を満足する限り，弧を消去したグラフW_2を作る。

---

*弧，弧のチェインはなん個でも加えてよい。

(iv)　W_0　，W_1　，W_2 上のB点に隣接であり，かつ互いに隣接である頂点間の弧を1本だけ消去したグラフW_3 を作る。

W_0, W_1, W_2, W_3　として得られたグラフが求めるグラフである。

（証明）　(i)の操作によって作られたホイールから中心頂点Bを消去したグラフW_0' は任意のサーキットであり，(ii)によって弧または弧のチェインがW_0' 上の頂点間に加えられるため，B頂点をW_1 から除いたグラフW_1' は任意の分離不可能なグラフである。中心頂点Bはこのグラフに一点を加えて，W_1' 上のすべての頂点との間に弧を加えたものである。したがって，B頂点は①一つのサーキットが弧のチェインを長さ1だけ伸ばした後，残りの頂点のすべての間に弧を加えて作られたか，または②新たな長さ2のチェインを加えた後，弧を加えたと考えることができる。よってB頂点に隣接となる二つのA頂点間に弧があれば，その弧を消去することも許される。これが(iv)の操作に対応している。弧を加える操作は(iii)の逆操作に対応している。特に，$\deg B = 2$（$K = 2$）であり，(iv)が実行可能な場合，サーキットが作られることに注意すれば，証明は明らかとなる。（証明終）

〔定理 2.5〕　図4に示すnmc swgは，すべての分離可能なウエッブの集合だけを生成する。

（証明）　図4の規則(1)－(9)を用いて，一本弧，三角形，4点ホイールのすべての組み合わせが実現されることは明らかである。また，B頂点は少なくとも一度は(7)，(8)または(9)のいずれかを適用されなくてはならないため，分離可能である。さらに，4点ホイールより任意の分離不可能なブロックを作る際，異なるブロック間に弧を加えることはないため，分離可能性は保存される。つぎに，4点ホイールより任意のn（$n \geq 4$）点ブロックが導出されることを示せば証明は終了する。規則(10)，(11)が前補題の(i)，(ii)の操作に対応する。そして，(12)が適用されれば(i)，(ii)の操作は終了し規則(19)が(iv)の操作に対応する。よってすべてのn（$n \geq 4$）点ブロックが実現される。（証明終）

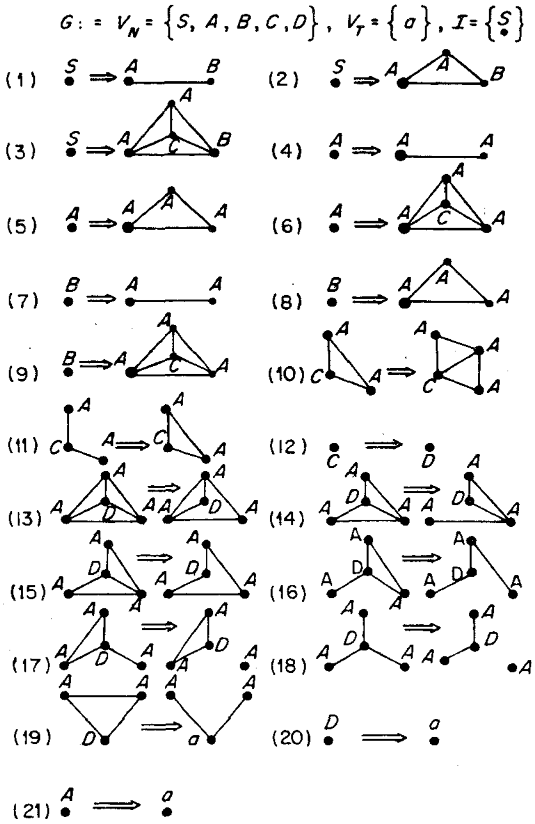


図 4. すべての分離可能なウエッブを生成する nmc swg 。

〔定理 2.7〕 分離不可能なオイラーグラフの集合は，いかなる ncswg によっても生成できない。

（証明） 分離不可能なオイラーグラフとして最も簡単なものはサーキットであるが，これは適当な ncswg により導出可能である。このサーキットに弧，弧のチェインを加えても分離不可能性は保存される。この際各頂点の度数が偶数となる時，導出を終了すればよい。偶数の度数，奇数の度数を表わすラベルの集合をそれぞれ V_E , V_O とし，$A \in V_E$ ， $B \in V_O$ とする。導出終了時には $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \underset{\bullet}{a}$

($a \in V_T$) が適用されると仮定して一般性を失なわない。そうしたとき L_G が ncswg によって生成されると仮定すれば，この文法はつぎのタイプの規則，すなわち，

二つの A (B)頂点間，または A，B 頂点間に弧を加える規則を持たない。

この規則を適用すれば，偶頂点（奇頂点）は奇頂点（偶頂点）に変わるが，ncswg では高々一つの頂点のラベルだけが書き換えられるにすぎない。したがって，奇頂点のラベルが A となる場合が存在する。このような奇頂点を含むウエッブは一般に有限と限らないことより，規則によって修正できない。すなわち，弧を書き加えて目的を達することができないことが認識される。したがって偶（奇）頂点は偶（奇）頂点として保存される規則のみが許される。このような規則としては，α が β の部分ウエッブであり，α は完全に分離したウエッブかまたは β と同じようにオイラーウエッブであるものだけである。このような規則の $|N_\beta|$ の最大値を M とするとき，$2(M+1) \leq K$ なる K 個の頂点を持つサーサット（頂点を一方向に名づけて P_1，P_2，…，P_K） を考える。このとき P_2, P_4, …, P_{2M}, P_j ($2(M+1) \leq j \leq k$) なる（ $M+1$ ）個の頂点が再びサーキット上にあるオイラーグラフを考えれば，この ncswg の規則を一度適用するだけでは目的は達せられない。ところがこうして導出された長さが M 以下のサーキットから（ $M+1$ ）の長さのサーキットは導出できない。なぜならば，弧の消去が許されないためである。したがって，いかなる ncswg もこのようなオイラーグラフの集合を生成することはできないことが認識される。（証明終）

オイラーグラフは nmcswg によって生成可能である。ncswg によって分離不可能なウエッブを生成する場合と同様なことを考え，ラベルを偶頂点のみが生じるようにコントロールすれば十分である。したがって，つぎのことが成立する。

〔系 2.3 〕 すべての分離不可能なオイラーグラフを生成する nmcswg が存在する。

〔系2.4〕 すべての分離可能なオイラーグラフを間接生成する nmcswg が存在する。

以上の定理をまとめて,

$$\mathrm{nlw}\mathcal{L} \subsetneq \mathrm{ncfw}\mathcal{L} \subsetneq \mathrm{ncsw}\mathcal{L} \subsetneq \mathrm{nmcsw}\mathcal{L},\ \mathrm{ncsw}\mathcal{L} \subsetneq I\text{-}\mathrm{ncsw}\mathcal{L}$$

が成立することがわかった。

2.4 結 言

本章では,一般的関係記述文法であるウエッブ文法に関して,その書き換え規則の形式,像指定形式によっていくつかのウエッブ文法が定義可能なことを示し,正規ウエッブ文法によって生成される正規ウエッブ言語族の特性を解明した。

記述される構造集合に出現するブロックの種類が有限個であり,かつそれらのブロック間の関係が特殊なものでなければ,そのような構造は正規 cfwg で記述可能であるが,ブロックの種類が有限と限らぬかまたは特別な繰り返し出現する部分構造をもつものの記述には正規 cswg の必要なことがわかった。

また構造が分離可能であることが記述能力と密接な関係を有することも理解されたが,特殊な記号を導入してそれを文脈として書き換え規則の適用を制御することが極めて有効であることが示された。しかし,このような記号を持つ頂点を有限個しか許さぬ場合,同様な効果が期待できるか否かは今後検討を行なう必要がある。

第三章　非正規ウエッブ言語族

3．1　序　言

前章2．2のウエッブ文法の像指定に示したように，書き換えられる頂点の書き換え後の対応頂点が一つとは限らぬ場合，記述される構造は正規ウエッブ文法によって記述される構造とどのような差を持つかに関して検討する。

本章で考察する非正規ウエッブ文法は，前章でも述べられているように，一般的構造記述にとって本質的なものであり，種々の構造記述を極めて簡潔な形式で行ない得るものであり，その記述能力の解明は重要である。

第2節では，非正規ウエッブ言語族の性質と，正規ウエッブ言語族との関係を明らかにする。非正規ウエッブ言語族のみについて考えれば，その書き換え規則の形式が正規ウエッブ文法のそれと同じことより，同様な結果の成立することは容易に理解される。しかし，いかに記述能力の高い正規ウエッブ文法によっても記述不可能な非正規ウエッブ言語の存在することを示し，非正規ウエッブ文法が必要であることが示される。

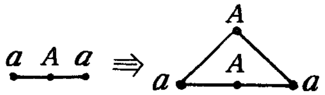
第3節では，上述の非正規ウエッブ文法の記述形式の簡潔さを示す典型例のいくつかを示す。

3．2　非正規ウエッブ言語族とその正規ウエッブ言語族との関係

本節では，非正規ウエッブ言語族の性質を解明し，さらに前章で明らかにされた正規ウエッブ言語族と非正規ウエッブ言語族との関係を明らかにする。

〔補題 3.1〕　初期ウエッブが一点ウエッブである **ancfwg** によって生成された **ancfw** L, L_G に属するウエッブのブロックは **ancfwg** G の規則の β か β のブロックだけからなるとは限らない。

（証明）　図5に示す **ancfwg** G_1 による L_{G_1} を考える。初期ウエッブより生成される $W \in L_{G_1}$ の導出過程において，$W' = \{\ a\ A\ a\ \}$ に規則(2)が適用されれば



と書き換えられ，以後このウエップの連結性は保存され，(2)の適用により無限のブロックの種類が生成され，これは規則のβに同形ではない。（証明終）

〔定理3.1〕 ncfw $\mathcal{L} \subsetneq$ ancfw$\mathcal{L}$

（証明） 補題2.2，補題3.1より，ncfwg で ancfw$L$ L_{G_1} を生成するには，規則の集合Rが有限でなくなることより，明らかである。（証明終）

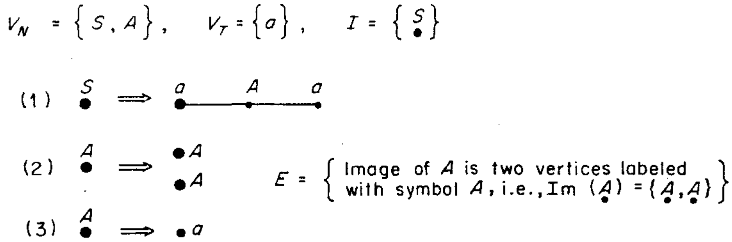


図 5. このancfwgはncfwgによっては生成できないウエッブを生成する。

この文法の規則(2)が非正規であることに注意せよ。

K_p を頂点数pの完全グラフとする。

〔定理3.2〕 anlw$\mathcal{L} \subsetneq$ ancfw$\mathcal{L}$

（証明） SK－グラフを，そのブロックがK_p（$p \geq 2$）のみよりなる分離可能なグラフとする。図6のancfwgがすべてのSK－グラフを生成することは明らかである。ここで，V_N に属する記号をラベルにもつ頂点は任意個数の完全ブロックのカットポイントになることに注意せよ。anlwg によって導出されるウエップは高々一点しか書き換えられぬため，すべてのSK－グラフは生成できないことは明らかである。（証明終）

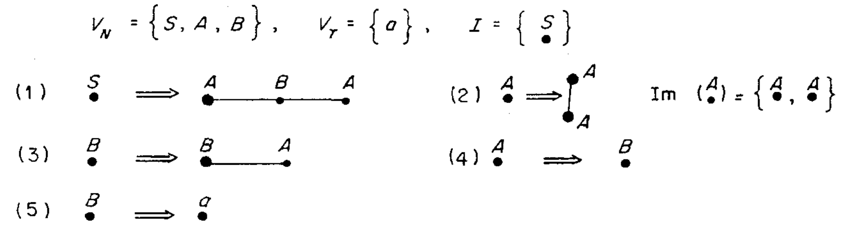


図 6. この ancfwg はすべての SK ーウエッブの集合を生成する。

〔補題 3.2〕 ancfwg では，すべての分離不可能なウエッブの生成は行なえない。

（証明） いま，任意な有限の n 個の点を持つすべての分離不可能なウエッブが導出可能と仮定する。このとき，$(n+1)$ 個の点を持つ分離不可能なウエッブに，I から導出できないウエッブの存在することを示す。

正規でない cfwg によれば，$(P, q_i) \in A_W$ $(1 \leq i \leq m)$ のとき $Q \in I_m(P)$ ならば，$(Q, q_i) \in A_{W'}$ $(1 \leq i \leq m)$ である。（ただし，$W \Rightarrow W'$）。いま W, W' 上で各頂点 P_j は $\deg P_j \geq 2$ である。ここで，W' が $(n+1, p)$* グラフとする。さらに，$\deg P_1 = 3$ と仮定すれば，$\deg Q = 3$ であるが，$\deg Q = 2$ でも，W' は分離不可能である。このような条件をみたすウエッブが，ancfwg によって導出されない場合が存在することを示す。実際，$(n+1, q)$ グラフ W' で，$\deg P_1 = 3$，$\deg P_2 = 3$，$(P_1, P_2) \in A_{W'}$，$\deg P_i = 2$ $(3 \leq i \leq n+1)$ とし，これから一点を除去した (n, q') グラフで分離不可能なウエッブ W を考えれば，除去される点は，$(P_1, P_j) \in A_{W'}$ かつ $(P_2, P_j) \in A_{W'}$ なる点 P_j であり，得られる (n, q') グラフは $\deg P_1 = 2$ $(1 \leq i \leq n)$

---

* グラフ G が (p, q) グラフとは，頂点数 $|N_G| = p$，弧数 $|A_G| = q$ をいう。

である。このサーキット上の点 P_k に対して，非正規の規則を適用すれば，$(P_k, P_{k-1}) \in A_W$，$(P_k, P_{k+1}) \in A_W$，$\{S_1, S_2\} = I_m(P_k)$ として，(1) $(S_1, S_2) \in A_{W''}$，$(S_j, P_i) \in A_{W''}$，(2) $(S_j, P_i) \in A_{W''}$，$(S_1\ S_2) \notin A_{W''}$ $(i=k-1, k+1, j=1, 2)$ のいずれかが考えられる。(1)では，$\deg S_j = 2$ $(j=1, 2)$ であるが，W' に同形ではなく，(2)では $\deg S_j \neq 2$ $(j=1, 2)$ より，明らかに同形ではない。すなわち ancfwg では，任意の分離不可能なウエッブの生成はできないことが示された。（証明終）

〔補題 3. 3〕 nmcsw $\mathcal{L}$ に属さない anlw L が存在する。

（証明） L_G として，すべての完全グラフ K_p を考える。図 7 に示した anlwg が，任意の完全グラフを生成することは明らかであろう。L_G が nmcswg によって生成できないことを示す。$A \Rightarrow a$ $(A \in V_N, a \in V_T)$ なる規則は存在できない。$P > a_0$ の場合，同一の記号をラベルとする頂点はいくつも存在するため，A をラベルとする頂点に上の規則が適用されたとすれば，A の度数は $P-1$ とは限らず，他の V_N をもつ頂点を書き換えるとき，上の規則を適用された頂点を含めて，弧を加える規則が必要であるが，この V_N はいつかは V_T にかき換えなければならないが，上の形では書き換えられないので，文脈とともに書き換える必要があるが，そのためには文脈が完全グラフ生成のための条件を示しておらなければならない。しかし a をラベルとする点の個数，その隣接関係の非有限性より，それらの記述に必要な規則の集合 R は有限でない。すなわち，各頂点の隣接関係をウエッブで表現すれば，すべてを記述するために必要な規則の集合 R は有限でなくなる。したがって，各点の度数をラベルで表現しなければならないが，これは V の有限性に反する。よって，すべての完全グラフを nmcswg では生成できない。（証明終）

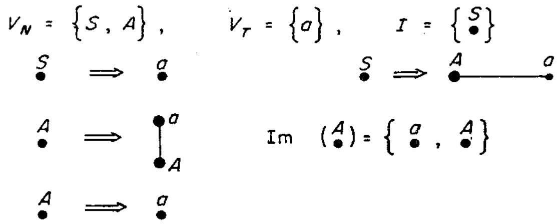


図 7.　この anlwg　はすべての完全ウエップ K_p （$p \geq 1$）を生成する。

〔定理 3. 3 〕　ancfw$\mathcal{L} \subsetneqq$ ancsw$\mathcal{L} \subsetneqq$ anmcsw$\mathcal{L}$

ancsw$\mathcal{L} \subsetneqq$ I−ancsw$\mathcal{L}$

（証明）　ウエップ文法 G によって生成されるウエップ集合を L_G と記すことにする。L_{G_1} として，すべての分離不可能なウエップの集合を，L_{G_2} として分離可能であり，そのブロックの少なくとも 1 つは完全グラフであるようなウエップの集合をとるとする。そうすれば $L_{G_1} \notin$ ancfw$\mathcal{L}$ であるが $L_{G_1} \in$ ancsw$\mathcal{L}$ である。また L_{G_1} には，完全グラフを持つウエップが存在するため L_{G_2} は正規系のウエップ言語ではなく，$L_{G_2} \notin$ ancsw$\mathcal{L}$ であるが，$L_{G_2} \in$ anmcsw$\mathcal{L}$, I−ancsw$\mathcal{L}$ であることが認識される。形式的包含関係は自明であるから，上記関係の成立が確認される。（証明終）

上記の諸定理，補題をまとめて，つぎの結果が得られる。

anlw$\mathcal{L} \subsetneqq$ ancfw$\mathcal{L} \subsetneqq$ ancsw$\mathcal{L} \subsetneqq$ anmcsw$\mathcal{L}$

anlw$\mathcal{L} \underset{\supset}{\subsetneqq}$ nmcsw$\mathcal{L}$,　ancfw$\mathcal{L} \underset{\supset}{\subsetneqq}$ nmcsw$\mathcal{L}$

ancsw$\mathcal{L} \underset{\supset}{\subsetneqq}$ nmcsw$\mathcal{L}$,　anmcsw$\mathcal{L} \supsetneqq$ nmcsw$\mathcal{L}$

3．3　　非正規ウエップ文法によるグラフの表現

本節では，非正規ウエップ文法の表現力を具体的に示すために，グラフ理論で取り扱われているグラフの代表的な構造を記述する文法例を与える。まずライン

グラフ記述の例を正規ウエッブ文法で行なったものについて考察し，同じ問題が非正規ウエッブ文法で記述すれば，後者は前者に比してきわめて簡潔に表現可能であることを示す。さらに正規ウエッブ文法での表現の困難な3ーコネクディドグラフを簡潔に表現する非正規ウエッブ文法の例を示す。

Sをある集合，Fを$F=\{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$なる$S$の異なる空でない部分集合の族とするとき，$F$のインターセクショングラフ（intersection graph）$\Omega(F)$を，$V(\Omega(F))=F$* かつ$S_i \cap S_j \neq \phi$ならば，$(S_i, S_j) \in A\,\Omega(F)$**であるグラフとする。グラフ$G$のブロックグラフ（block graph）$B(G)$とは，$F$を$G$のブロックとするインターセクショングラフであり，グラフGのライングラフ（line graph）$L(G)$を，グラフGの弧の集合A_Gを頂点集合N_Gの2点よりなる部分集合の族とするときの$\Omega(A_G)$とする。分離可能なグラフGのブロック・カットポイント・グラフ（block—cutpoint—graph）$bc(G)$を，$V(bc(G))=\{B_i\} \cup \{C_j\}$（$B_i$はブロック，$C_j$はカットポイント），$P$，$Q \in V(bc(G))$に対して，$(P, Q) \in A_{bc(G)}$であるのは$P(Q)$が$B_i$に，$Q(P)$が$C_i$に対応し，$C_j$が$B_i$上の頂点であるときと定義する。以下，すべてツリーの集合をTと書くことにする。

〔補題3.4〕 図8のncfwg G は$L_G=\{bc(G) \mid G=L(T)\}$を生成する。

（証明） グラフHが$H \in L(T)$である必要十分条件は，Hのカットポイントがただ2つのブロック上にのみ存在する連結なブロックグラフである。したがって，$bc(G)$のC点（カットポイントに対応している）は，ちょうど2つのI点（ブロックに対応する）にのみ隣接であるツリーでなければいけない。図に示した文法Gでは，C点は2つのA点のみに隣接でありすべてのツリーのみが生成されることは

---

* $\Omega(F)$上のラベルが，Fの要素S_i（$1 \leq i \leq P$）であるという意味。

** S_i，S_jをラベルとする頂点が隣接であるという意味。

明らかである。生成されたツリーの端点がI点であり，ツリー上でI点とC点とが交互に並んでいるため，生成されるウエッブは$bc(G)$である。又すべての$bc(G)$が生成可能なことは自明である。（証明終）

〔定理 3.4〕 図9の適用条件をもつnmcswg G は，$L_G = \{L(T)\}$を間接生成する。

（証明） 前補題に同じ規則1），2）を用いて任意の$bc(G)$が導出される。分離不可能なウエッブに対応する1点ウエッブに対しては，13)，14)，15)が適用される。

まず分離不可能なすべての$L(T)$の生成されることを示す。導出された$bc(G)$に対して，I点に対応するブロックが1本弧だけから成る時，4）を適用すればよい。すべてのブロックが1本弧である時，その$bc(G)$の端点を除いたすべてのI点は度数が2であり，その場合は端点のIに対して4)，他のI点に対して6）を適用すれば，その時点で12)の適用条件はいつも真であり，12)，11）と適用されて導出は終了する。I点の度数が2以上の時，そのI点に対して3)〜7）のいずれかが適用される。（4)，6）の適用後に8)，9)，10）が適用されれば，5)，7）の適用と同様な導出が行なわれる。）規則8)，9)，10）は新しくブロック上に点を加えたり弧を加えたりする操作を表わしており，この過程は任意のブロック生成に対応している。しかし，$L(T) \simeq B(T)$ であるため，各ブロックは完全グラフでなければならない。 しかし，nmcswgでは完全グラフは生成できないため，規則の適用条件によって完全なブロックを作る。すなわち同一ブロック上の任意の隣接でない2つのC点に対して，10)が適用されねばならないことが適用条件によって規定され，完全なブロックが導出され，導出の終了したウエッブは$bc(G)$から得られた分離可能なライングラフとなっている。分離不可能なライングラフは完全グラフ K_p を意味しており，1点から成る$bc(G)$から作られる。初期ウエッブに対し15）が適用されれば自明なライングラフが，14）により

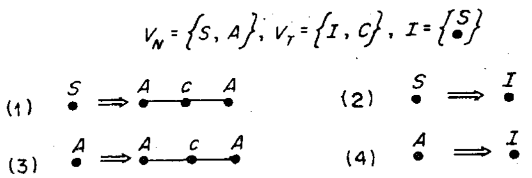


図 8.　この ncfwg は任意のツリーのライングラフのブロックカットポイントグラフを生成する。

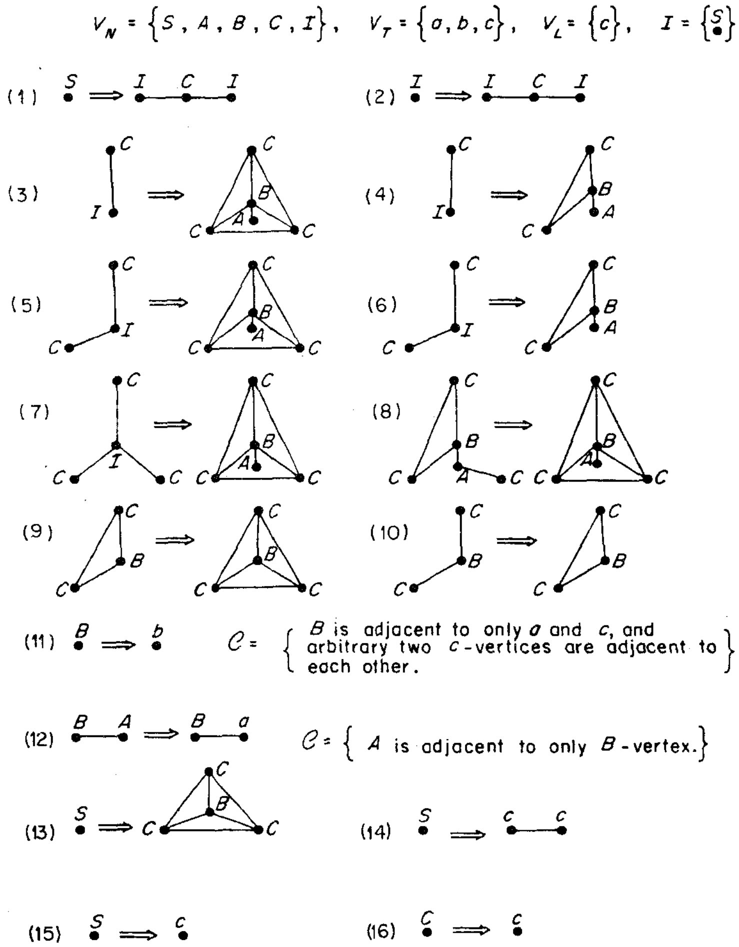


図 9.　この適用条件を持つ nmcswg はすべてのツリーのライングラフを間接生成する。

自明でない最小の分離可能なライングラフが，また 13)が適用されればK_3 が，その後9)，10)が適用されれば，前述の場合と同じくK_p（$p>3$）が生成される。よってすべての$L(T)$が生成可能である。$L(T)$以外のウエッブが生成されぬことは，$L(T)$の必要十分条件より明らかであろう。各ブロックは完全であり，1つのC点は，3)～7)のいずれの規則によっても高々2つのブロックとのカットポイントとなるのみであり，12)の適用条件によって，$bc(G)$ 上のC点は必ずいずれかのブロック上の頂点となるので，連結なウエッブのみが間接生成される。よって結果は明らか。（証明終）

つぎに，すべての$L(G)$ の生成を考える。グラフHがライングラフである必要十分条件は，そのグラフが完全グラフに分割でき，かつそうした完全グラフ上のどの頂点も3つ以上の完全な部分グラフ上にないことである。任意のライングラフ$L(G)\ni H$が与えられれば，その分割の族$F=\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$が存在する。いま，$i\neq j$（$1\leq i, j\leq n$）に対して，完全なブロック$B_i, B_j$の両ブロック上の共有点の集合を$C_{ij}$とするとき，多重路なしのウエッブに対して，次の補題が成立する。

〔補題3.5〕 $|C_{ij}|=1$

（証明） $|C_{ij}|=n(n>1)$とし，$C_{ij}=\{c_1, c_2, \cdots, c_3\}$ とすると，B_i, B_j は完全ブロック故，$(c_k, c_m)\in A_{Bi}$，$(c_k, c_m)\in A_{Bj}$（$1\leq k, m\leq n$, $k\neq m$)となり多重路を持つ。（証明終）

上の条件を満足するC_{ij}の集合を$\{C_{ij}\}$ と書くとき，ライングラフ$L(G)\ni H$のBDグラフを$bd(H)$ と書いて，$V(bd(H))=\{B_i\}\cup\{C_{ij}\}$とし，$P$, $Q\in V(bd(H))$ に対して，$(P, Q)\in A_{bd}(H)$ であるのは，$P(Q)$ がB_i（またはB_j)に，$Q(P)$ がC_{ij} に対応し，C_{ij}がB_i（またはB_j) に含まれるとする。ライングラフHが与えられるとき，その$bd(H)$ を生成すれば，そのB_i 点を完全ブロックに，c_{ij}をB_i, B_j の共有点とするライングラフがいつも，しかも無

数に生成可能である。1つのライングラフに対する分割の族は一意とは限らないが，可能なすべての$bd(H)$が生成可能ならば，すべての$L(G)$が生成可能である。

〔定理 3.5〕 図10.の適用条件を持つ nmcswg G はすべての$bd(H)$それのみを生成する。

（証明） すべての$bd(H)$の生成を示す。前補題より，C点（C_{ij}に対応する）はただ2つのI点（B_iに対応する）にのみ隣接であることは，各規則においてC点が2つのA点のみに隣接であり，それ以外の他の点とは隣接でないことより明らかである。また6）の適用条件により，異なるC点が同一の2つのA点に隣接となることが禁止されるので，やはり前補題を満足する。

また，2つのC点が隣接することはなく，C点は必らず2つのI点に隣接な場合のみが許されるため，C点と他のI点間に弧を加えることは$bd(H)$以外のウエッブの生成を生じる。したがって，可能な書き換えを受ける頂点の対としては，2つのA点間にそれらのA点が同一のC点に隣接でない時，新しくC点を加える（規則6）か，それらの間に新しいA点を含む弧のチェインを加える（規則3）か，A点とC点との弧の上に新しくC，A点を加えることのみが可能であり，他の規則は補題3.3に示した$bc(G)$の生成規則と同じである。したがって，すべ

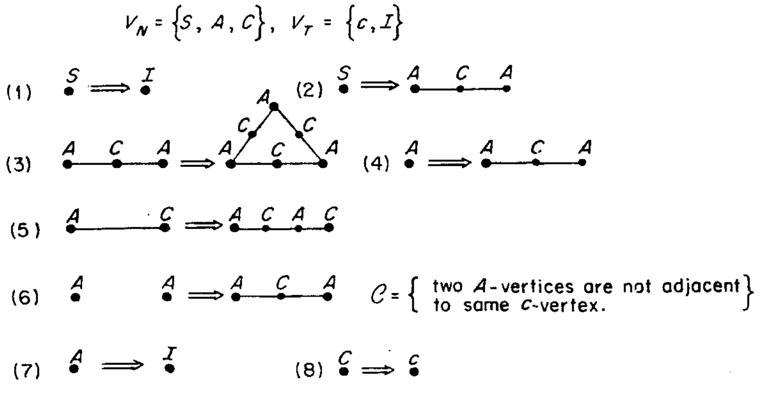


図10.　この適用条件を持つ nmcswg はすべてのBDグラフを生成する。

ての $bd(H)$ が生成される。（証明終）

〔定理 3.6〕 すべての $L(G)$ それのみを間接生成する適用条件を持つ nmc swg が存在する。

（証明） 図１１に示された文法より明らか。

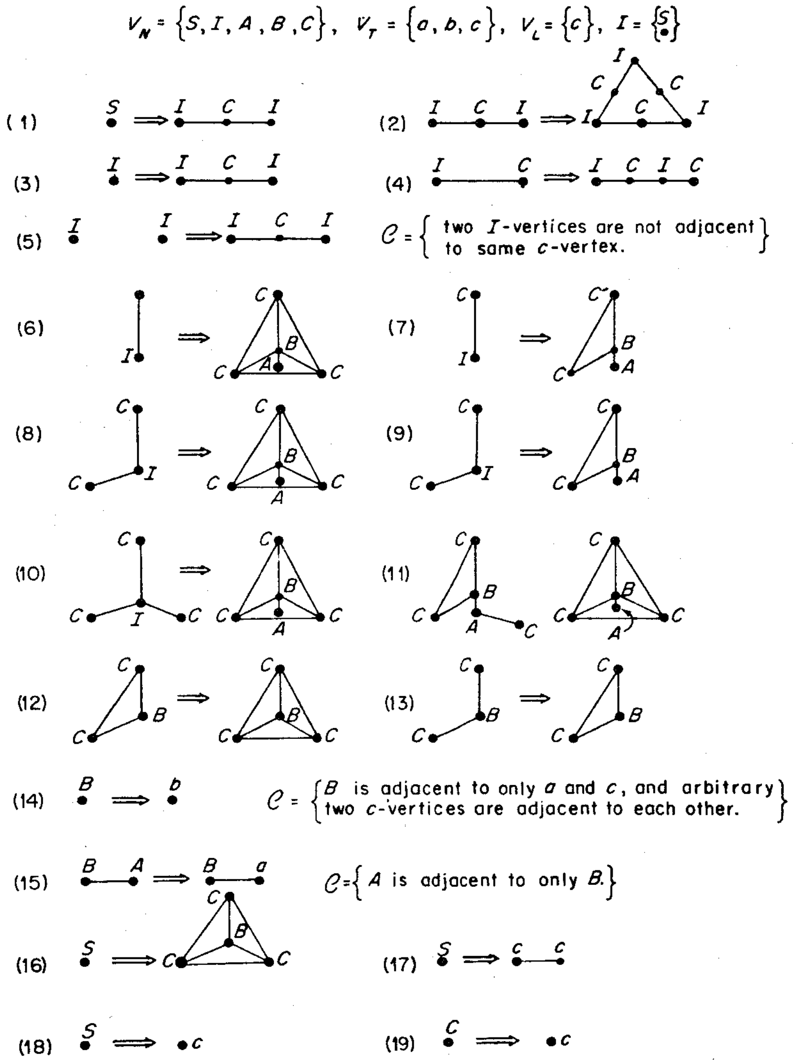


図 11.　この適用条件を持つ nmc swg はすべてのライングラフを間接生成する。

補題3.3より定理3.6は，正規系文法によるL(G)の生成を考察したが，非正規系によれば，より簡単に記述可能であることを示す。

〔定理3.7〕　図12.の ancfwg G は，すべてのツリーのライングラフ$L(T)$を生成する。

（証明）　1）により最小のライングラフが導出され，2）によって導出されたウエッブのA頂点へ3）をn（$n \geq 0$）回適用することによりK_{n+2}が生成され，A点が4）によってB点に書き換えられた後，6）が適用されれば，その頂点は他の完全ブロックとのカットポイントにはならず，5）が適用された場合に限り5）の規則の右辺のブロックとのカットポイントとなり，このブロック上のA点に3）を適用することにより，最初の完全ブロックの導出と同様な議論が成立する。よって，生成されたウエッブのブロックはすべて完全であり，また3つ以上のブロックとのカットポイントとなる頂点は存在しない。よって，結果は明らか。（証明終）

〔定理3.8〕　図13の anmcswg G はすべてのライングラフ$L(G)$を生成する。

（証明）　規則1）〜5)を用いれば，前述のようなツリーのライングラフを導出できる。それ以外のライングラフが規則6)，または7)によって生成されることを示せばよい。いま，導出された異なる2つの完全ブロック上の2点は，もうひとつの完全ブロックとの共有点になることができる。この完全ブロックが1本弧の場合に6）を適用し，それがK_{n+3}（$n \geq 0$）である場合，7）を1度適用し，n回3）を適用すれば良い。そうして，他のブロックとの共有点となった頂点のラベルは$a \in V_T$に書き換えられるため，さらに別のブロックとの共有点となることはない。この議論は，任意の2つのブロック上のラベルがa以外の頂点に対して繰り返し適用可能であるため，帰納法による詳細な証明は省略することにする。（証明終）

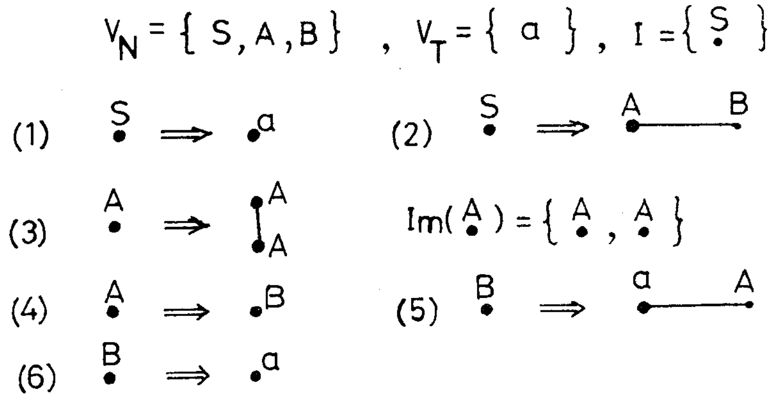


図 12. この ancfwg はすべてのツリーのライングラフを生成する。

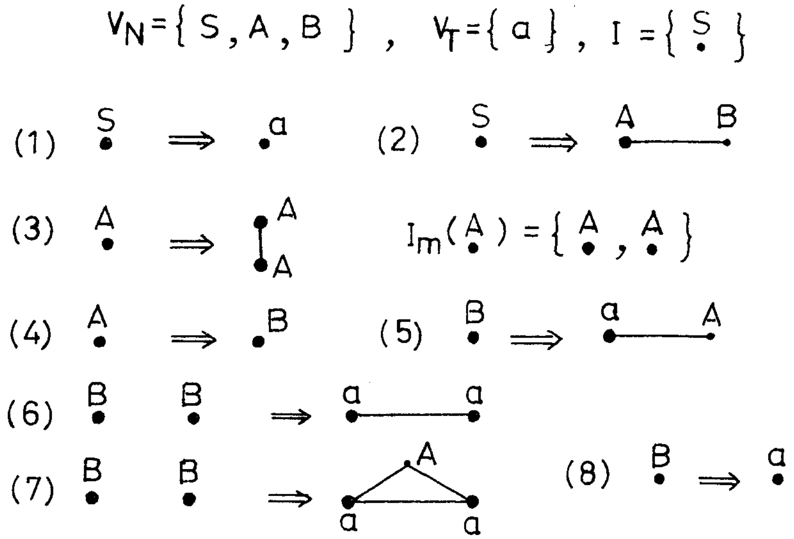


図 13. この anmcswg はすべてのライングラフを生成する。

つぎにTutte によって与えられた3−connected graphの表現をウエッブ文法で表現した例を示す。

グラフGのコネクティビティ(connectivity)$K=K(G)$とは，それらの頂点を取り除くことによって，分離されたグラフか自明なグラフを生じるような頂点数のうちで最小の数を意味し，グラフがn—connected とは，$K(G)\geq n$である場合をいう。そうすれば，自明でないグラフが1—connectedとは，それが連結である場合に限られ，2−connectedとは，それが1本弧以上のブロックである場合に限られることがわかろう。しかし，3—connectedである必要十分条件は，容易には理解しえない。この問題は，Tutte より解決された。まず，ホイールW_n(wheel) とは，$n\geq 4$ に対して，K_1+C_{n-1} として定義される。C_{n-1}は(n−1)点からなるサーキットであり，演算記号“+”は，K_1(1点グラフ)とC_{n-1}上のすべての頂点を結ぶことを表わしている。そうすると，W_n($n\geq 4$)は3—connectedであることがわかる。Tutte は，これより，グラフが3—connectedであるための必要十分条件を示している。

〔Tutteの定理(T13)〕　グラフGが3—connectedである必要十分条件はGがホイールであるか，ホイールから次の2種の操作を適当に行なって得られることである。(1)新たに弧を加える。(2)少なくとも度数が4である頂点Pを，隣接な2頂点P_1, P_2に分割し，Pに隣接であった頂点は，P_1かP_2の一方にのみ隣接であり，かつ$\deg P_1\geq 3$，$\deg P_2\geq 3$とする。

ウエッブ文法によって，3—connectedを表現するには，非正規であることが現在のところ必要である(他の方法でも3—connected graph はできるかもしれないが)，なぜならば，他の手法は未知である。

〔定理3.9〕　図14の anmcswg G は，すべての3—connectedウエッブのみを生成する。(適用条件は，文法表現の簡易化のため使用しているにすぎない。)

（証明）　規則 1), 2), 3)はホイールの生成に対応している。5）が頂点の分割に対応している。この時，5）によって導出されるウエッブは，書き換え前に A 点に隣接な頂点はすべて B 点，C 点に隣接となるが，6) または 7) によって適当に弧を消して(2)の操作に対応さすことができる。もちろん，6), 7) の規則を適用しても，B 点，C 点の両者に隣接な頂点の存在することはある。しかし，それは，4）の規則（(1)の操作に対応している。）が適用されたことに等価であり，6), 7）の適用条件が成立しなくなるまで，弧を消し続けた場合が，(2)の操作そのものに対応することになる。したがって，Tutte の定理に等価な導出を図の文法 G が行なえることがわかろう。（証明終）

なお，適用条件は，$\{\deg P \geq 4\}$ の形であるから，P と，P に隣接な他の 4 点（図中の C 点，A 点以外の 4 点）の可能なパターンを α，β に書き加えて表現可能であるため　本質的なものではない。

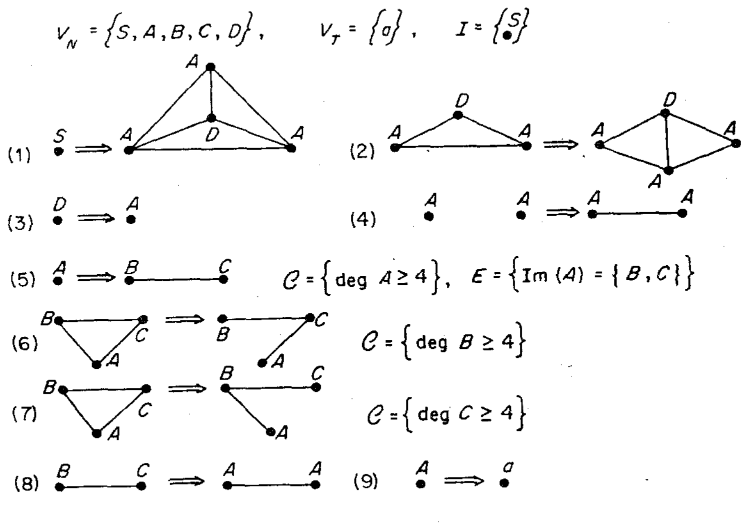


図 14.　この anmc swg はすべての 3 ーコネクティドグラフを生成する。

3．4　結　　言

本章では，非正規ウエッブ言語族と，前章で考察された正規ウエッブ言語族との関係を検討し，両者間の関係を完全に解明し得た。

また，3節では，両者の関係を示す典型例として，グラフ構造を例にとって，ウエッブ文法によるグラフ表現について述べた。ウエッブ文法の目的の一つとしてウエッブ文法の各タイプとグラフの構造との関係を求めることがある。これは必ずしもグラフ集合間の階層構造をグラフの特性によって分類するという意味にはならないが，グラフ間の階層を与える一方法であることは間違いない。本章で得られた結果として，一般的には完全なブロックを有するグラフは正規系に属さず，分離可能性が同一性質のグラフを異なる類に決めることなどがあげられる。グラフ理論は広い分野をカバーするため，どのような構造がどの類に対応するかは未解決な部分が少なくない。比較的簡単な構造を持つグラフに対するウエッブ文法を設定することにより，いくつかの種類の構造をもつグラフをそれに対するコンパクトな文法で特徴づけることが可能となる。ここで，こうした文法の対応づけを行なう際，従来のグラフ理論の結果だけでは不十分な場合が生じることが考えられる。従来の結果の中には，グラフを構成してゆくような方向でのグラフの必要十分条件が求められないものが少なくないし，すでに既知の命題に等価であり，それらよりも（生成などにとって）実用的命題の検討が行なわれていない点もある。グラフを文法によって体系化する方向をとろうとすれば，そのグラフの構成的な必要十分条件に等価な，より簡潔な条件を発見することが必要とされる。たとえば，本論文にも示したが，3—connected graph の生成に anmc swg が本質的であるか，それ以下のクラスの文法での生成可能性は存在しないかという問題を考えてみよう。Tutte は確かにその構成的条件を示しているが，ホイール以外のグラフからの構成の可能性を検討しなければ，この問題に結論をくだすことはできない。（もし，ホイールから出発する以外に方法が無いなら anmc swg が

本質的であることは容易に示し得る。）3—connected graph の特徴をさらに検討せねばならない。同様なことが他のグラフに関してもいえよう。そしてこれは非常に楽観的な見方であるが，新しいグラフの特徴の発見につながる結果を導くこともあろう。また，別の面の問題として，たとえばMontanari が四色問題の議論を二つの文法の等価性におきかえた（ただし，文法の問題に変換しただけで，本質的解決は行なわれていない）ように，グラフ理論のいくつかの問題を文法系の問題 —— 等価性，閉包性など —— に変換して，従来より研究されて来た句構造文法の結論を参照して，これらの問題を考察するといった点も注目に価するのではないだろうか。

最後に，グラフの認識に関する問題について言及すれば，与えられたグラフが指定されたいくつかの構造を持っているかという問題への解法の一つとして，ウエッブ文法をパーサーとして利用することが考えられる。与グラフの部分グラフが，グラフ理論の言葉で記述された条件をみたすか否かをチエックすることは，あまり容易であるとはいえない。たとえば，あるグラフがライングラフか否かをチエックする場合，特別な九種のグラフをそのインデュートサブグラフとして含まないか，オッドライアングルに関する条件が成立するかなどを調べることは容易でないことも少なくない。

したがって，グラフを新しく見なおして考察する必要性，ウエッブ文法の決定問題，ウエッブ認識機械構成などの必要性が認識されねばならない。

第四章　　プログラムドウエッブ文法の記述能力

4．1　序　　　言

前章では，正規ウエッブ言語族と非正規ウエッブ言語族の関係を解明し，非正規ウエッブ文法の記述能力の高いことを示した。しかし，非正規ウエッブ文法をパーサーとして使用する場合，そのうめこみ指定が今度は逆過程実行のための適用条件となる。たとえば，非正規文法の書き換え規則によって1つの点が2つの点を像として持つ場合，その逆過程実行時には，どの2点が1点に帰着されるか，その2点に関する隣接関係が同等か否かを調べる必要が生じる。これに対して正規ウエッブ文法では，書き換え規則の右辺ウエッブをそのまま左辺に書き換えるのみで逆過程を実行可能であり，構造解析には正規ウエッブ文法が適しているといえる。

しかしながら，正規ウエッブ文法では記述不能な構造もあり，これまでは正規ウエッブ文法に適用条件を付加してその記述能力の向上をはかって来たが，適用条件の成立の確認は必ずしも容易ではない。

比較的簡単な形式の文法を，規則の適用を制御することによってその記述能力を高めようとする試みが，句構造文法論で数多く行なわれている〔17〕，〔24〕。同様な工夫をウエッブ文法に対して行なえば，その記述能力が向上するであろうことは容易に推測できる。

本章では上述の種々の工夫のうち，Rosenkrantz〔24〕によって導入されたプログラムド文法を拡張したプログラムドウエッブ文法に関して考察を行なう。その主要な目的が正規ウエッブ文法にプログラムによる制御を与えることによって，非正規うめこみを実現し，このプログラムドウエッブ文法を構造記述・解析にとって最適のものであることを証明し，構造記述文法論を完成させることにあることはもちろんである。

第3節では，一次元系列，有向完全グラフのみに構造を限定した場合のウエッ

ブ文法，プログラムドウエップ文法に関して簡単な議論を行ない，4節ではプログラムドウエップ文法の記述能力の検討を，5節では種々の適用条件のプログラム化を考察し，プログラムドウエップ文法が最も強力な記述能力を有することを示す。

4．2　プログラムドウエップ文法の定義

〔定義4.1〕 プログラムドスキャッタードコンテキスト文法（programmed scattered context grammar (pscg)）とは，五組$G=(V_N, \Sigma, J, P, S)$であり，

(1) V_N，Σは定義2.2のV_{NG}，V_{TG}に同じであり，Jはルールのラベルの有限集合，$S\in V_N$とする。

(2) Pは，$(r)\ (A_1, \cdots, A_n) \rightarrow (w_1, \cdots, w_n)\ S\ (v)\ F\ (w)$

ここで，$n\geq 1$であり，$\forall_i\ (1\leqq i\leqq n)$，$A_i\in V_N$，$w_i\in V^+$ $(V=V_N\cup\Sigma)$，$r\in J$，v，$w\subseteq J$とする。

ルール$(r)\ (A_1, \cdots, A_n) \rightarrow (w_1, \cdots, w_n)\ S\ (v)\ F\ (w)\in P$に対して

$\xi = x_1\ \overline{A}_1\ x_2\ \overline{A}_2 \cdots x_n\ \overline{A}_n\ x_{n+1}$，$r\in J$，$w=x_1 w_1 x_2 w_2 \cdots x_n w_n x_{n+1}$，$p\in J$とするとき，$(\xi, r)\Rightarrow(w, p)$とは，

(1) $\forall_i\ (1\leqq i\leqq n)\ \overline{A}_i=A_i$，$x_i\in(V-A_i)^*$，$x_{n+1}\in V^*$のとき$\xi$が$w$に変換され，かつ$p\in v$であるか，

(2) ルール(r)がξに適用できず，$\xi=w$かつ$p\in w$である場合とする。

$(\xi, r)\overset{*}{\Rightarrow}(w, p)$は，の推移的閉包とする。そしてpscg Gによる言語$L(G)$を$L(G)=\{w\in\Sigma^+\ (s, r)\overset{*}{\Rightarrow}w\}$とする。

スキャッタードコンテキスト文法（scg）Gとは，pscgにおいて，$v=w=J$がすべてのルールに対して成立し，上記(1)を，$\forall_i(1\leqq i\leqq n)$，$\overline{A}_i=A_i$，$x_i\in V^*$，$x_{n+1}\in V^*$とした場合であるとする。

プログラムドコンテキストフリー文法（pcfg）Gとは，pscgにおいて，任意

のルールに対して $n=1$ が成立する。すなわちルールの核が $(A) \rightarrow (w)$* なる場合である。

scgのルールの適用は，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ がこの順にセンテンシャルフォーム $x \in V^+$（以後 s.f. x と記す）に出現しておれば適用可能であるが，pscg ではさらに各 A_i は可能な限り左端の記号に対してルールが適用されねばならないと規定される。

〔定義 4.2〕　SDG　G とは，n（$n \geq 1$）点よりなる有向グラフであり，$\forall i$（$1 \leq i \leq n-1$），$(P_i, P_{i+1}) \in A_G$ なるものとし，$SDCG$　G とは $\forall i < j \leq n$ に対して，$(P_i, P_j) \in A_G$ なるグラフとする。

SDW　w（$SDCW$　w'）とは，SDG　G（$SDCG$　G'）の各頂点 P に対して非空有限集合 V の要素をラベルとして与えられたウエッブをいう。また一次元の Σ 上の語 $w = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma^+$（$x_i \in \Sigma$）に対応する Σ 上の SDW（$SDCW$）w とは，$F_w(P_i) = x_i$ なるウエッブとする。同様にして，Σ^+ の非空部分集合 S（$S \subseteq \Sigma^+$）に対応する SDW（$SDCW$）の集合を $L(S)$（$L'(S)$）とかく。たとえば，L(cfg) とは，cfl に対応する SDW の集合を意味する。

〔定義 4.3〕　SDG を定義域とする正規スキャッタードコンテキストウエッブ文法（normal scattered context web grammar (nscwg)）G とは，scg のルール $(A_1, \cdots, A_n) \rightarrow (w_1, \cdots, w_n)$ において，$w_1 = \underset{\bullet}{B_l} \rightarrow \underset{\bullet}{B_{l-1}} \cdots \underset{\bullet}{B_2} \rightarrow \underset{\bullet}{B_1}$，$w_n = \underset{\bullet}{C_1} \rightarrow \underset{\bullet}{C_2} \cdots \underset{\bullet}{} \rightarrow \underset{\bullet}{C_k}$，$w_i = \underset{\bullet}{D_i}$（$l, k \geq 1$，$2 \leq i \leq n-2$）が成立する場合である。ただし，$I_m(\underset{\bullet}{A_1}) = \{\underset{\bullet}{B_1}\}$，$I_m(\underset{\bullet}{A_n}) = \{\underset{\bullet}{C_1}\}$，$I_m(\underset{\bullet}{A_i}) = \{\underset{\bullet}{D_i}\}$（$2 \leq i \leq n-1$）とする。

SDG を定義域とする右（左）側 nscwg（r（l）nscwg）とは，$w_k = \underset{\bullet}{C_1} \rightarrow \underset{\bullet}{C_2} \rightarrow \underset{\bullet}{C_{l-1}} \rightarrow \underset{\bullet}{C_l}$，$w_i = \underset{\bullet}{D_i}$ とかくとき，$k = n$，$1 \leq i \leq n-1$，$I_m(\underset{\bullet}{A_k}) = \{\underset{\bullet}{C_1}\}$（$k=1$，$2 \leq i \leq$

---

*　$(A) \rightarrow (w)$ を $A \rightarrow w$ と記すこともある。

n, $I_m(\underset{\bullet}{A_k}) = \{\underset{\bullet}{C_l}\}$) をみたすnscwg をいう。

〔定義4.4〕 SDGを定義域とする正規プログラムドコンテキストフリーウエッブ文法（pncfwg）とは，pcfg のルール（r） $\alpha \rightarrow \beta S(v)\ F(w)$ において，$\alpha = \{\underset{\bullet}{A}\}$, $\beta = \underset{\bullet}{B_1} \rightarrow \underset{\bullet}{B_2} \cdots\cdots \underset{\bullet}{B_{k-1}} \rightarrow \underset{\bullet}{B_k}$, $I_m(\underset{\bullet}{A}) = \{\underset{\bullet}{B_1}\}$又は$\{\underset{\bullet}{B_l}\}$をみたす場合をいう。右（左）側pncfwg （$r(l)$cncfwg）とは，任意のルールに対して$I_m(\underset{\bullet}{A}) = \{\underset{\bullet}{B_1}\}$ ($I_m(\underset{\bullet}{A}) = \{\underset{\bullet}{B_l}\}$) が成立するpncfwg を意味する。

非正規系ウエッブ文法に対しても同様な定義を行なうことができるが，特に記述しなくとも理解できると考えるので省略する。しかし，定義域を$SDCG$ にとる場合もあるため，定義域がSDG, $SDCG$,一般ウエッブであるようなwg をwg$_{SDG}$, wg$_{SDCG}$, wgと記すことにする。それぞれに対応して生成される言語とそのクラスを，たとえば SDG に対して wL_{SDG}, w$\mathcal{L}_{SDG}$というように記す。ここで定義域をSDG($SDCG$) にとるとは，ウエッブ文法$G_{SDG(SDCG)}$ によるウエッブとして，その導出されるウエッブがSDW($SDCW$)でないならば，そのウエッブはウエッブ文法 wg$_{SDG(SDCG)}$ によって生成されたものではないと考えることをいう。

つぎに定義は略すが，句構造文法においてよく知られている 3 型，2 型，1 型文法をそれぞれosIg, cfg, csg, と記し，それと対応する wg$_{SDG}$ (wg$_{DCG}$) によって生成されるwL_{SDG}(wL_{SDCG}) をL(osIg), L(cfg), L(csg)(L'(osIg), L'(cfg), L' (csg)) というように記す。言語の族についても同様な記法をとる。言語族に対しては，Lの代りに$\mathcal{L}$と記すことにする。

4．3 SDG, $SDCG$上でのプログラムドウエッブ文法

〔定理 4.1〕 ncfw$\mathcal{L}_{SDG} = \mathcal{L}$(osIg)。

文献〔6〕に比較的詳細な証明が示されているので証明は略すが文献〔6〕の証明は正しい。多くの方々は，「リニヤー文法は右側3型文法と左側3型文法の

混合型によって表現可能」との通常の言語理論の定理を想像されるであろうが，ウエッブ文法では，$\underset{\bullet}{A} \rightarrow \beta$（$|\beta| \geq 2$）なるルールは最右（左）端の$A$にのみ適用可能であることに注意して考えねばならない。定理 2.2 に示されるように，$\{a^n\ b^n \mid n \geq 1\}$に対応する$SDW$ の集合が ncswL_{SDG} となることも注意すべきである。（証明終）

〔定理 4.2〕　ancfw$\mathcal{L}_{SDCG}=\mathcal{L}'$（$\epsilon$-free cfg）。

（証明）　与えられたϵ-free cfg のルールを$A \rightarrow B_1B_2 \cdots B_n$（$n \geq 1$）とするとき，$n$点$P_1, P_2, \cdots, P_n$ よりなる$SDCG$で$F_w(P_i) = B_i$ である$SDCW$ wをルールの右辺に，左辺にはF_2（Q）＝Aなる点Qを持つルールを，I_m（Q）＝$\{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$　であるように作る。このようにして構成された ancfwg$_{SDG}$がϵなしの cfg によって生成される任意の語に対応する$SDCW$ をすべて生成できることは容易に確かめうる。

逆に，$SDCW$ を生成する ancfwg$_{SDCG}$ は一般に$\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \langle B_1B_2 \cdots B_n \rangle$（このルールの右辺は語$B_1B_2 \cdots B_n$に対応する$SDCW$ であるが，このような記法をとる）としてよく，かつI_m（$\underset{\bullet}{A}$）＝$\{\underset{\bullet}{B_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ としてよい。なぜならば，

P，I_m（$\underset{\bullet}{A}$）$\supsetneqq P$ならば，$\underset{\bullet}{A}$が初期ウエッブ以外の場合生成されるウエッブは$SDCW$ ではなく，またもし$\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \beta$なるルールで$\beta$が$SDCW$ でないならば生成されるウエッブは$SDCW$ ではないため，ancfwg$_{SDCG}$ のルールから除くことができる。したがって$\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \langle B_1 \cdots B_n \rangle$に対して$A \rightarrow B_1B_2 \cdots B_n$ なるルールを持つ cfg を構成すれば逆の関係も明らかである。

〔定理 4.3〕　ancsw$\mathcal{L}_{SDCG} \supseteq \mathcal{L}'$（scg）

（証明）　与えられた scg Gのルールは一般に（$A_1, A_2, \cdots, A_n$）$\rightarrow$（$B_{1(1)}$ $B_{1(2)} \cdots B_{1(m1)}, \cdots, B_{n(1)}\ B_{n(2)} \cdots B_{n(mn)}$）としてよい（$mi \geq 1$，$n \geq 1$）このとき語$A_1A_2 \cdots A_n$に対応する$SDCW$を左辺に，語$B_1(1)\ B_1(2) \cdots B_1(m1)\ B_2(1) \cdots B_n(1) \cdots B_{n(mn)}$ に対応する$SDCW$を右辺に持ち，I_m（$\underset{\bullet}{A_j}$）＝$\{\underset{\bullet}{B}_{j(1)}, \underset{\bullet}{B}_{j(2)}$

$\cdots, \underset{\bullet}{B}_{j(mj)}\}$ （ $1 \leqq j \leqq n$ ）を E とする ancswg G' を構成すれば上記の関係の成立は$\underset{\bullet}{容}$易に確かめられよう。（証明終）

ところで逆の関係が成立するか否かは未解決である。もし，$SDCW$ を生成する ancswg$_{SDCG}$ のルールが，$\alpha \Rightarrow \beta$ （ α，β は語 $A_1 \cdots A_n$, $B_1 B_2 \cdots B_n\ B_{n+1} \cdots B_{n+m}$ （ $m \geq 0$，$n \geq 1$ ）に対応する $SDCW$ ）であり，かつ $I_m(\underset{\bullet}{A}_1) = \{\underset{\bullet}{B}_1, \cdots, \underset{\bullet}{B}_{k(1)}\}$，$I_m(\underset{\bullet}{A}_j) = \{\underset{\bullet}{B}_{k}(j-1)+1, \cdots, \underset{\bullet}{B}_{k(j)}\}$，$I_m(\underset{\bullet}{A}_n) = \{\underset{\bullet}{B}(n-1)+1, \cdots, B_{n+m}\}$ が E であり，かつ $1 \leq k(1) \leq m+1$，$k(j-1) < k(j) \leqq m+j$ （ $2 \leqq j \leqq n-1$ ）が成立しているならば $(A_1, A_2, \cdots, A_n) \rightarrow (B_1 \cdots B_{k(1)}, B_{k(1)+1} \cdots B_{k(2)}, \cdots, B_{k(n-1)} \cdots B_{n+m})$ なる scg のルールを構成することによって，対応する語が生成可能であるが，このようなルール以外のルールについても検討を必要とすると考えられる。

〔系 4.1〕 (1) 任意の anlwg で生成される言語の共通集合が空か否かは決定不能であり，ancfw$L$ は $\cap$ のもとに閉じていない。

(2) ancswg に関する空集合問題は可解でない。その他多くの性質が成立するがそれらについては，ここでは省略する。

〔定理 4.4〕 nscwg$_{SDG}$ でその生成する SDW の集合が $L(\mathrm{cfg})$ でない $L(\mathrm{csg})$ であるようなものが存在する。

（証明） nscwg G を $G = \{\{S, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P = \{(\underset{\bullet}{S}) \Rightarrow (\underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{B\ \ C}), (\underset{\bullet}{S}) \Rightarrow (\underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{B\ \ D}), (\underset{\bullet}{C}) \Rightarrow (\underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{B\ \ D}), (\underset{\bullet}{B}, \underset{\bullet}{D}) \Rightarrow (\underset{\bullet}{a}, \underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{F\ \ D}), (\underset{\bullet}{B}, \underset{\bullet}{D}) \Rightarrow (\underset{\bullet}{a}, \underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{F\ \ E}), (\underset{\bullet}{F}, \underset{\bullet}{E}) \Rightarrow (\underset{\bullet}{b}, \underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{C\ \ E}), (\underset{\bullet}{F}, \underset{\bullet}{E}) \Rightarrow (\underset{\bullet}{b}, \underset{\bullet}{c})\}, \{\underset{\bullet}{S}\}\}$ とすれば，生成されるウェッブはすべて SDW であり，その SDW の集合は，$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ に 対応するものである。よって明らか。（証明終）

〔系 4.2〕 $\tilde{L}(\mathrm{oslg}) \subsetneqq r(1)\mathrm{nscw}\tilde{L}_{SDG} \subseteq \tilde{L}(\mathrm{csg})$

この系は，上記定理の G が rnscwg$_{SDG}$ であることから明らかである。

ところで nscwg$_{SDG}$ が任意の cfg と同様なことを行ない得るか否かは未解決で

ある。

$L^{\tau}=\{x^{\tau} \mid x\in L\}$とする（$\tau$は逆語演算）

〔系 4.3〕 nscwL_{SDG}のクラスは置換，逆語演算のもとに閉じており，また$(\mathrm{rnscw}L_{SDG})^{\tau}=\mathrm{lnscw}L_{SDG}$が成立する。

これらの証明は文献〔17〕と同様にして示すことができる。しかし，代入，準同型，消去などの演算については現在検討中であるが，たとえば準同型写像hを$h(a)=\{ad\}$とした場合，このaが s.f. xにおいて右（左）端の場合にしか準同型を実行するルールを適用できず，通常の証明方法を採ることはできない。非正規文法に対しては定理 4.2， 4.3 の結果より比較的自然に消去の概念を導入することが可能であるが，これらはすべて今後の検討を待たねばならないであろう。

〔系 4.4〕 $\mathcal{L}(\mathrm{oslg})\subsetneqq \mathrm{Pncfw}\mathcal{L}_{SDG}\subsetneqq\mathcal{L}(\mathrm{csg})$

$\mathcal{L}(\mathrm{oslg})\subsetneqq \mathrm{r(l)pncfw}\mathcal{L}_{SDG}\subsetneqq\mathcal{L}(\mathrm{csg})$

この証明も上述の事例よりほとんど明らかである。一つの具体例は文献〔24〕の例3に示されている$\{a^{p}\mid p$は素数$\}$を生成する pcfg がここにいう r(l) pncfwg である点である。rpncfw$L_{SDG}\subseteq$pncfwL_{SDG} は自明であるが，$\subseteq$が$\subsetneqq$であるか否かは不明である。しかしもう少し強力な制御を与えればその関係を明らかにすることができる。次にそういった点に関して考察を行なう。なお，次の補題 4.1 から補題 4.4 までは，*SDG* を定義域とするウエッブ文法に対しても，また通常の句構造文法に対しても成立するので，記法は通常の文法形式を用いる。

〔補題 4.1〕 $\mathrm{sc}\mathcal{L}\subseteq\mathrm{psc}\mathcal{L}$

（証明） 一見自明なようであるが，scgのルール$(A, B)\rightarrow(w_1, w_2)$（一般にscgのルールをこのように記すことができることに関しては文献〔17〕を参照されたい。また r(l)nscwg$_{SDG}$ についても同様であるので証明は略す）の適用は s.f. 中にAとBとがこの順にあればルールを適用されるが，pscg ではルールを適用されるA，Bの対は可能な限り左方において適用されねばならない

(r(l)nscwg$_{SDG}$ の場合には，さらに定義域がSDG でなければならないという制限がある）ことに注意せよ。

上の関係の成立を概略的手続きとして述べれば，まずpscgは，s.f. の左端よりAを調べてゆき適当なAを一つマークしたのち，そのマークより右にあるBを順に調べて適当なBを一つ選んでマークした後，両者をかきかえることによってscgのルールを表現する。

形式的記述を行なえばつぎのようになる。

(r)　$(A, B)\to(A, B)$　$S(r_1)$　$F(W)$，

(r_1)　$A\to A_1$　$S(r_1, r_2)\,F(r_3)$，(r_2)　$A\to A_2$　$S(r_4)$　$F(r_3)$

(r_3)　$A_1\to A$　$S(r_2)$　$F(W)$，(r_4)　$A_1\to A$　$S(r_4)$　$F(r_5)$

(r_5)　$(A_2, B)\to(A_2, B_1)$　$S(r_5, r_6)$　$F(r_7)$

(r_6)　$(A_2, B)\to(A_2, B_2)$　$S(r_8)$　$F(r_7)$

(r_7)　$(A_2, B_1)\to(A_2, B)$　$S(r_6)$　$F(r_{10})$

(r_8)　$(A_2, B_1)\to(A_2, B)$　$S(r_8)$　$F(r_9)$

(r_9)　$(A_2, B_2)\to(w_1, w_2)$　$S(r_{11})$　$F(\phi)$

(r_{10})　$A_2\to A_3$　$S(r_{10})$　$F(r_1)$，$(r_{11})\,A_3\to A$　$S(r_{11})$　$F(W)$

ここで，A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 は新記号とし，$W=J-\bigcup_{1\leq i\leq 11} r_i$ としておく。

s.f. $x=CBACBABDBA$に対するルールの適用状況を示して証明を終わることにする。

$x=CBACBABDBA\overset{*}{\Rightarrow}CBA_1CBA_1BDBAB\overset{*}{\Rightarrow}CBA_1CBA_1BDBA_2\overset{*}{\Rightarrow}CBACBABDBA_2\overset{*}{\Rightarrow}CBACBABDBA_3\overset{1}{\Rightarrow}CBA_1CBABDBA_3\overset{2}{\Rightarrow}CBA_1CBA_2BDBA_3\overset{*}{\Rightarrow}CBACBA_2B_1DBA_3\overset{6}{\Rightarrow}CBACBA_2B_1DB_2A_3\overset{8}{\Rightarrow}CBACBA_2BDB_2A_3\overset{9}{\Rightarrow}CBACBW_1BDW_2A_3\overset{11}{\Rightarrow}CBACBW_1BDW_2A$ となる。

なお，scgのルールが$(A)\to(w)$の場合も同様にして証明できるので省略する。

（証明終）

〔補題 4.2〕　pcf$\mathcal{L} \subseteq$ psc$\mathcal{L}$

これはpscg，pcfg の定義より明らかである。

〔補題 4.3〕　cs$\mathcal{L} \subseteq$ psc$\mathcal{L}$

（証明）　任意に与えられたcsg G_0 に等価なリニヤーバウンデッド文法（linear bounded grammar(lbg)）をG_1 とすれば，$G_1=(V'_N, V'_T, P', S')$ とかけて，そのルールは，$S \hookrightarrow S'A$, $C \to A$, $CD \to AB$, $C \to a$（$A, B \in V'_N - \{S'\}$ $C, D \in V'_N$, $a \in V'_T$）より構成されていると仮定できる。さらにG_1 によって導出された語xは，初めて$C \to a \in V'_T$が適用される以前は$x' \in (V'_N)^+$ であると仮定して一般性を失なうことはない。そうしたとき，三番目のルール以外のルールがpscg のルールで表現可能であり，適用場所も任意の場所を選ぶようにできる。したがって$CD \to AB$がpscgのルールによって表現可能であることを示せば証明は終了する。pscg は適当なC，Dの対を一つ選んでCとDとの間に何らかの記号または記号列の存在しない場合に限りC，DをA，Bにかきかえることができる。具体的手順を次に示しそのかきかえの状況を説明する。

まず$|V'_N|=n$ とし，以下においてC_1, D_1, C_2, D_2, X, Y, Z, W を新記号としておく。

(r_1)　$C \to C_1$ $S(r_1)$ $F(r_2)$，(r_2) $D \to D_1$ $S(r_2)$ $F(r_3)$

(r_3)　$C_1 \to C_1$ $S(r_4)$ $F(r_7)$，(r_4) $D_1 \to D_1$ $S(r_5)$ $F(r_8)$

(r_5)　$(C_1, D_1) \to (C_2, D_2)$ $S(r_6)$ $F(r_7)$

(r_6)　$(C_2, C_1, D_2) \to (C, C_2, D_2)$ $S(r_6)$ $F(r_9)$

(r_7)　$D_1 \to D$ $S(r_7)$ $F(r_8)$，(r_8) $C_1 \to C$ $S(r_8)$ $F(r_j)$

(r_{8+i})　$(C_2, X_i, D_2) \to (C, X_i, D)$ $S(r_3)$ $F(r_{9+i})$

を $\forall_i$ $(1 \leqq i \leqq n-2)$，$X_i \in V'_N - \{C, D\}$ に対して作る。

(r_{7+n}) $(C_2, D_2) \to (X, Y)$ $S(r_3)$ $F(\phi)$

(r_j)　$(X, Y) \to (X, Y)$ $S(r_{j+1})$ $F(W)$

$(\mathrm{r}_{j+1})\ (X,\ Y)\rightarrow(Z,\ W)\quad S(\mathrm{r}_{j+2})\ \ F(\phi)$

$(\mathrm{r}_{j+2})\ (X,\ Y)\rightarrow(X,\ Y)\quad S(\mathrm{r}_{j+3},\ \mathrm{r}_{j+4})\ F(\mathrm{r}_{j+8})$

$(\mathrm{r}_{j+3})\ (Z,\ W)\rightarrow(A,\ B)\quad S(\mathrm{r}_{j+5})\ \ F(\phi)$

$(\mathrm{r}_{j+4})\ (Z,\ W)\rightarrow(C,\ D)\quad S(\mathrm{r}_{j+1})\ \ F(\phi)$

$(\mathrm{r}_{j+5})\ (X,\ Y)\rightarrow(C,\ D)\quad S(\mathrm{r}_{j+5})\ \ F(W)$

Wはこのルール群以外のラベルの集合とする。また$j=8+n$としておく。

たとえば$|V_N|=4$として，s. f. $x=DBCABCDBCBADCDBADCCD$に対するルールの適用例を示そう。

$x=DBCABCDBCBADCDBADCCD\overset{*}{\Rightarrow}DBC_1ABC_1DBC_1BADC_1DBADC_1$
$C_1D\overset{*}{\Rightarrow}D_1BC_1ABC_1D_1BC_1BAD_1C_1D_1BAD_1C_1C_1D_1\overset{5}{\Rightarrow}D_1BC_2ABC_1D_2BC_1B$
$AD_1C_1D_1BAD_1C_1C_1D_1\overset{6}{\Rightarrow}D_1BCABC_2D_2BC_1BAD_1C_1D_1BAD_1C_1C_1D_1\xRightarrow{9,\ 10,\ 11}$
$D_1BCABXYBC_1BAD_1C_1D_1BAD_1C_1C_1D_1\xrightarrow{3,\ 4,\ 5}D_1BCABXYBC_2BAD_2C_1D_1B$
$AD_1C_1C_1D_1\xRightarrow{6,\ 9}D_1BCABXYBCBADC_1D_1BAD_1C_1C_1D_1\xRightarrow{3,\ 4,\ 5}D_1BCABXYBC$
$BADC_2D_2BAD_1C_1C_1D_1\xRightarrow{6,\ 9,\ 10,\ 11}D_1BCABXYBCBADXYBAD_1C_1C_1D_1\xRightarrow{3,\ 4,\ 5}$
$D_1BCABXYBCBADXYBAD_1C_2C_1D_2\overset{6}{\Longrightarrow}D_1BCABXYBCBADXYBAD_1CC_2$
$D_2\xRightarrow{6,\ 9,\ 10,\ 11}D_1BCABXYBCBADXYBAD_1CXY\xRightarrow{3,\ 7^*,\ 8,\ 12}DBCABXYBCBA$
$DXYBADCXY\overset{13}{\Longrightarrow}DBCABZWBCBADXYBADCXY\xRightarrow{14,\ 16}DBCABCDBCBA$
$DXYBADCXY\overset{13}{\Rightarrow}DBCABCDBCBADZWBADCXY\xRightarrow{14,\ 15}DBCABCDBCBA$
$DABBADCXY\overset{17}{\Rightarrow}DBCABCDBCBADABBADCCD$ として適当な一つのCDがABにかきかえられる。よって上記pscg のルール群はcsgのルール$CD\rightarrow AB$を表現可能であることが証明される。（証明終）

〔補題 4.4〕　psc$\mathcal{L}\subseteq$cs$\mathcal{L}$

（証明）　任意に与えられたpscg のルール$(\gamma)\ (A,\ B)\rightarrow(w_1,\ w_2)\,S(v)$ $F(w)$ において$(A,\ B)\rightarrow(w_1,\ w_2)$ がcsgのルール群によって表現可能なことは明らかである。そうすれば，上のpscg のルールはプログラムドコンテキスト

センシティブ文法（pcsg）によって表現されうるが，pcs$\mathcal{L}$= cs$\mathcal{L}$であることがすでに証明されていることより，補題の成立は明らかになる。（証明終）

〔定理 4.5〕 psc$\mathcal{L}$= cs$\mathcal{L}$

〔定理 4.6〕 lnpscw$\mathcal{L}_{SDG}$ = $\mathcal{L}$(csg)*

（証明） 補題 4.3 を lbg G_1を用いて証明したのは，lnpscwg のルールとしては，(γ) $(\underset{\bullet}{A}) \Rightarrow (\underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{B_1 B_2} \cdots \underset{\longrightarrow\bullet}{B_n})$ $S(v)$ $F(w)$，(γ) $(\underset{\bullet}{A}, \underset{\bullet}{B}) \Rightarrow (\underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{D_1 D_2} \cdots \underset{\longrightarrow\bullet}{D_m}, C)$ $S(v)$ $F(w)$ のみが許されることに関係のあることはすでに気づかれていることだろう。補題 3 の証明で用いられた文法のルールの核が，$(\underset{\bullet}{S'}) = (\underset{\bullet\longrightarrow\bullet}{S' \quad A})$ $(\underset{\bullet}{C}) \Rightarrow (\underset{\bullet}{A})$，$(\underset{\bullet}{C}) \Rightarrow (\underset{\bullet}{a})$，$(\underset{\bullet}{A}, \underset{\bullet}{B}) \Rightarrow (\underset{\bullet}{C}, \underset{\bullet}{D})$ なる lnscwg$_{SDG}$ のルールより構成されていることより補題 4.3 の証明に用いられた文法は lnpscwg$_{SDG}$ であると解釈できる。したがって定理は証明された。（証明終）

〔系 4.5〕 rnpscw$\mathcal{L}_{SDG}$ = lnpscw$\mathcal{L}_{SDG}$ = npscw$\mathcal{L}_{SDG}$

以上何の制御もない ncfwg$_{SDG}$は$\mathcal{L}$(oslg) しか生成できないが，一段，二段の制御を与えることによってその生成するクラスが後者では$\mathcal{L}$(csg)に一致するという結果を示した。

4．4 プログラムドウエッブ言語族の諸性質

一般の pwg では，最左端へのルールの適用は必ずしも意味を持たないので，本節では自由な頂点に対してルールの左辺が一致しておれば適用可とし，台ウエッブのどこにも与えられているルールの左辺のウエッブが存在せぬとき，次のルールを $F(w)$ なる w より選ぶものとする。その場合でも SDG（$SDCG$）を定義域とする wg に関する〔系 4.4〕などに示した性質には変わりない。

---

* lnpscwg$_{SDG}$ の詳細な定義は示さなかったが，定義 4.1，4.3，4.4 よりその定義は理解されると考える。

〔定理 4.7〕 (1) pnlw$\widetilde{\mathcal{L}}$ = nlw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (2) panlw$\widetilde{\mathcal{L}}$ = anlw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (3) pncfw$\widetilde{\mathcal{L}} \supsetneq$ ncfw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (4) pancfw$\widetilde{\mathcal{L}} \supsetneq$ ancfw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (5) pncsw$\widetilde{\mathcal{L}} \supsetneq$ ncsw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (6) pancsw$\widetilde{\mathcal{L}} \supseteq$ ancsw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (7) pnmcsw$\widetilde{\mathcal{L}} \supsetneq$ nmcsw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (8) panmcsw$\widetilde{\mathcal{L}} \supseteq$ anmcsw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (9) pncsw$\widetilde{\mathcal{L}}$ = pancsw$\widetilde{\mathcal{L}}$ (10) pnmcsw$\widetilde{\mathcal{L}}$ = panmcsw$\widetilde{\mathcal{L}}$

（証明） (1)(2)は文献〔24〕の定理1に同じである。(3)は系4.4による。(4)については，$L_1 = \{a^n\ b^n\ c^n \mid n \geq 1\}$に対応するSDCW の集合がancfw$\widetilde{\mathcal{L}}_{SDCG}$に属さぬがpancfw$\widetilde{\mathcal{L}}_{SDCG}$ に属することより証明できる。(9)，(10)については少し複雑となるが，まずつぎのようにして真に非正規なルールを$\alpha \Rightarrow \beta$とするとき，このルールがpwgのルール群によって表現可能なことを示す。

$\alpha = (N_\alpha,\ F_\alpha,\ A_\alpha)$，$\beta = (N_\beta,\ F_\beta,\ A_\beta)$，$N_\alpha = \{P_i \mid 1 \leq i \leq m\}$，$I_m(P_i) = \{Q_{ij} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$，$N_\beta = \bigcup_{1 \leq i \leq m} I_m(P_i) \cup \{S_t \mid t \geq 0\}$（$t = 0$の時は空集合）とする。$|V_N| = k$としておく。まず，$\alpha_0 \equiv \alpha$*，$\beta_0 = (N_\beta,\ F_{\beta_0},\ A_\beta)$としてルール

(r_0) $\alpha_0 \Rightarrow \beta_0$ $S(r_1)$ $F(w_0)$ を作る。

ここで，$\forall i\ (1 \leq i \leq m)$，$j \neq 1$ $F_\beta\ (Q_{ij}) = X_l$ ならば$F_{\beta_0}\ (Q_{ij}) = X_{il}$ $F_\beta(S_t) = X_l$ ならば$F_{\beta_0}(S_t) = \bar{X}_l$，$F_\beta\ (Q_{i1}) = X_l$ ならば$F_{\beta_0}\ (Q_{i1}) = X_l$ $(X_l \in V_N)$とし，$I_m(P_i) = \{Q_{i1}\}$と すればこのルールは正規であり，もとのルールのタイプを保存している。（台ウエッブはV_N 上のウエッブであると仮定しておく）

つぎに，$\forall i\ (1 \leq i \leq m)$ に対して，$\alpha_i \equiv \beta_{i-1}$，$\beta_i = (N_{\beta_0},\ F_{\beta i},\ A_{\beta_0})$として，$(r_i)$ $\alpha_i \Rightarrow \beta_i$ $S(r_{i+1})$ $F(\phi)$ とする。ここで，$F_{\beta_0}\ (Q_{i1}) = X_l$ ならば$F_{\beta i}\ (Q_{i1}) = X_{il}$，$F_{\beta i}\ (Q_{ij}) = F_{\beta i-1}\ (Q_{ij})$（$j \neq 1$）とする。

さらに，$\forall i,\ j\ (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq k)$に対して$f(i,\ j) = k(i-1) + j + m$（$= f$と以下では略記）として，

(r_f) $\alpha_f \Rightarrow \beta_f$ $S(r_f)$ $F(r_{f+j})$を作る。ここで，$\alpha_f = (N_{\alpha f},\ F_{\alpha f},\ A_{\alpha f})$，

---

* はラベルも含めての同型を意味するとする。

$\beta_f=(N_{\beta f},\ F_{\beta f},\ A_{\beta f})$ において，$N_{\alpha f}=N_{\beta f}=\{Q_j\}\cup\{Q_{il}\mid 1\leqq l\leqq n_i\}$, $F_{\alpha f}(Q_j)=F_{\beta f}(Q_j)=X_j\in V_N$, $F_{\alpha f}(Q_{il})=F_{\beta f}(Q_{il})=F_\beta(Q_{il})$, $A_{\alpha f}=\{(Q_j, Q_{i1})\}\cup\{(Q_{il},\ Q_{il'})\mid(Q_{il},\ Q_{il'})\in A_{\beta m}\}$, $N_{\beta f}=\{(Q_j, Q_{il})\mid 1\leqq l\leqq n_i\}\cup\{(Q_{il},\ Q_{il'})\mid(Q_{il},\ Q_{il'})\in A_{\beta m}\}$ とする。そうすれば $^{\forall}k'(1\leqq k'\leqq f(m,k))$ に対して $\alpha_{k'}\Rightarrow\beta_{k'}$ は正規なルール，ncswg のルールであることがわかる。

そして最後に $^{\forall}i,\ j\,(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq k)$ に対して，$h(i,\ j)=k(i-1)+j+f(m,\ k)$ とおくとき，ルール(r_h) $X_{ij}\rightarrow X_j$ $S(r_h)$ $F(r_{h+1})$ を作り，さらに $^{\forall}i\,(1\leqq i\leqq k-1)$ に対して，

$(r_{h(m,\ k)+i})$ $\overline{X}_i\rightarrow X_i$ $S(r_{h(m,\ k)+i})$ $F(r_{h(m,\ k)+i+1})$, $(r_{h(m,\ k)+k})$ $\overline{X}_k\rightarrow X_k$ $S(r_{h(m,\ k)+k})$ $F(w')$ とすれば，正規なルール群をプログラム制御して非正規なルールを表現できることが認識される。したがって，

pan(m)cswg のルールを(r) $\alpha\Rightarrow\beta\ S(\widetilde{v})\ F(\widetilde{w})$ とすれば，このルールに対して，(r_0) $\alpha_0\Rightarrow\beta_0\,S(r_1)$ $F(\widetilde{w})$として，上記のようにルール(r_i) $\alpha_i\Rightarrow\beta_i$ $S(v_i)$ $F(w_i)$を　$1\leqq i\leqq h(m,\ k)+(k-1)$ に対して構成し，最後に $t=h(m,\ k)+k$ として(r_t) $\overline{X}_k\rightarrow X_k$ $S(r_t)$ $F(\widetilde{v})$　とすれば，pan(m)csw$\widetilde{L}$ $\subseteq$ pn(m)csw$\widetilde{L}$ を示すことができることより，定理の成立を得る。(5)，(7)についての真なる包含関係は，完全グラフの集合が anlw$\widetilde{L}$ に属すが，n(m)csw$\widetilde{L}$ に属さぬ事実よりただちに得られる。（証明終）

〔系 4.6〕　p(a)mcsw$\widetilde{L}\supseteq$ p(a)csw$\widetilde{L}\supsetneqq$ p(a)cfw$\widetilde{L}\supsetneqq$ p(a)lw$\widetilde{L}$

4．5　適用条件のプログラム化に関する考察

前節にも示したように，pn(m)cswg は nmcswg も生成できない，非正規文法系によって生成されるウエッブを生成できる。文献〔11〕,〔12〕には適用条件 C を持つ文法例が示されている。3．3章において適用条件を持つ（以後 C を持つと記す）正規文法によるライングラフの生成が示されているが，一方それが非

正規文法ではきわめて容易に生成可能なことも示されている。このことは，Cを持つルールにはプログラム化されたルールで表現できる（以後Cはプログラム化可能という）ものが少なくないことを示すものであろう。

鳥居ら〔21〕，〔22〕は，グラフ生成変換システムに対して，はやくからプログラム表現をとり入れ，グラフ生成システムへのアルゴリズムのうめこみといった非常に興味ある研究を行なっている。本稿での立場は，彼等ほど実用的立場をとらず，理論的にCのプログラム化の問題を検討したいと考える。

≪例1≫ $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \beta$ with $C=\{A$点はB点に隣接でない$\}$なるルールはプログラム化可能。なぜならば，

(γ) $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \underset{\bullet}{A_1}$ $S(\gamma_1)$ $F(W)$，(γ_1) $\underset{\bullet}{B}\text{—}\underset{\bullet}{A_1} \Rightarrow \underset{\bullet}{B}\text{—}\underset{\bullet}{A_1}$ $S(\gamma_2)$ $F(\gamma_3)$

(γ_2) $\underset{\bullet}{A_1} \Rightarrow \underset{\bullet}{A}$ $S(W)$ $F(\phi)$，(γ_3) $\underset{\bullet}{A_1} \Rightarrow \beta$ $S(W)$ $F(\phi)$

によってA点の近傍条件をチェックできる（Wはこの群以外のラベル集合）ことによる。

≪例2≫ $\underset{\bullet}{A}\text{—}\underset{\bullet}{B} \Rightarrow \underset{\bullet}{C}\text{—}\underset{\bullet}{B}\text{—}\underset{\bullet}{D}$ with $C=\{A, B$点は同一のC点に隣接でない$\}$なるルールもプログラム化可能。

≪例3≫ $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \beta$ with $C=\{A$点は二つ以上のC点に隣接であり，どの二つのC点も互いに隣接である$\}$なるルールもプログラム化可能。

一般には次の命題が成立する。

〔命題4.1〕 一つのルール$\alpha \Rightarrow \beta$に対して，C_1 を持つルール$\alpha \Rightarrow \beta$ with C_1，C_2 をもつルール$\alpha \Rightarrow \beta$ with C_2がともにプログラム化可能であるならば，

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$ with $C_1 \vee C_2$ (2) $\alpha \Rightarrow \beta$ with $C_1 \wedge C_2$，

(3) $\alpha \Rightarrow \beta$ with $\widetilde{C}_1$ （$\widetilde{C}$はCの否定）もまたプログラム化可能である。

（証明略）

また，文献〔19〕に示されている一般的うめこみ関数gを持つウエップ文法（これは，本稿の非正規うめこみの一般化であることが示されている）もプログ

ラム表現可能であり，次の系を証明なしで与える。

〔系 4.7〕 一般的うめこみ関数 g を持つルール $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \beta$ は pnmcswg のルールによって表現可能である。

つぎに，ルール $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \beta$ を適用される A 点からある有限の距離（範囲）内にある頂点集合に関する一つの C がプログラム化可能であることを示して本章を終わる。

K を $K \geq 2$ なる定数とする。* $P_0 = P$，$P_K = Q$，$(P_i, P_{i+1}) \in A_W$ $(0 \leq i \leq K-1)$ かつ $i \neq j$ $(0 \leq i, j \leq K)$ に対して $P_i \neq P_j$ なる頂点 Q を，頂点 P に対して $Q \in A^K(P)$ とかくことにする。

〔定理 4.8〕 C を持つルール $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \beta$ with $C = \{ Q \in A^l(P),\ 1 \leq l \leq K,\ F_W(P) = B,\ F_W(P) = A \}$ はプログラム可能。

（証明） 台ウエッブ W の任意の頂点 Q は $F_W(Q) \in V_N$ と仮定しておく。さらに $V_N = \{ X_i \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{B\}$ とする。また，$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - 2)(x_1^2 + x_1) + x_1 + x_2 x_3 + x_4 + 2$ とする。そして次のような一連のルール群を構成すれば，上の C のチェックを行なうことができる。

(r_1) $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \underset{\bullet}{A_0}$ $S(r_2)$ $F(w)$

(r_2) $\overset{B}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\overset{A_0}{\bullet} \Longrightarrow \overset{B}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\overset{A_0}{\bullet}$ $S(\phi)$ $F(r_3)$ を作り，

${}^{\forall}j$ $(1 \leq j \leq m)$ に対して $J_j = f(0, 2, 0, j)$ として，

(r_{J_j}) $\overset{X_j}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\overset{A_0}{\bullet} \Rightarrow \overset{X_{j1}}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\overset{A_0}{\bullet}$ $S(r_{J_j}) F(r_{J_{j+1}})$ とする。

$(J_j + 1 = f(0, 2, 0, j+1)$ であることに注意せよ。）

つぎに，${}^{\forall}l, j$ $(1 \leq l \leq K-1,\ 1 \leq j \leq m)$ に対して，$J_{lj} = f(m, l, 0, j)$ として（簡単化のため $J_{lj} = J$ と記す）

(r_J) $\overset{B}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{X_{lj}}{\bullet} \Rightarrow \overset{B}{\bullet}\!-\!\!\!-\!\overset{X_{jl}}{\bullet}$ $S(\phi)$ $F(r_{J+1})$ とし，${}^{\forall}l, i, j$ $(1 \leq l \leq K-1,\ 1 \leq i, j \leq m)$ に対して $J = f(m, l, j, i)$ として，

---

* $K = 1$ の場合は，≪ 例 1 ≫ を参照のこと。

$(r_J)\ \underset{\bullet}{X_i}\text{——}\underset{\bullet}{X_{jl}} \Rightarrow \underset{\bullet}{X_{il+1}}\text{——}\underset{\bullet}{X_{jl}}\quad S(r_J)\ F(r_{J+1})$ とする。

さらに，$^{\forall}j\ (1 \leqq j \leqq m)$ に対して $J = f(m, K, 0, j)$ として，

$(r_J)\ \underset{\bullet}{B}\text{——}\underset{\bullet}{X_{jK-1}} \Rightarrow \underset{\bullet}{B}\text{——}\underset{\bullet}{X_{jK-1}}\quad S(\phi)\ F(r_{J+1})$ とし，また $^{\forall}i, j$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq K-1)$ に対して $J = f(m, K, j, i)$ として，

$(r_J)\ \underset{\bullet}{X_{ij}} \Rightarrow \underset{\bullet}{X_i}\ S(r_J)\ F(r_{J+1})$ を構成する。

そして，最後に $J = f(m, K, K-1, m)+1$ に対して，$(r_J)\ \underset{\bullet}{A_0} \Rightarrow \beta\ \ S(W)$ $F(\phi)$ とするルール群を作る。C の実行が行なわれることは容易に確認される。

(証明終)

〔系 4.8〕 K を一定の自然数とする。そのとき，

$C_1 = \{ Q \in A^K(P),\ F_W(Q) = B,\ F_W(P) = A \}$

$C_2 = \{ Q_{il} \in A^l(P),\ F_W(Q_i) = B,\ F_W(P) = A,\ 1 \leq i \leq n \}$

$C_3 = \{ Q_{il} \in A^l(P),\ F_W(Q_{il}) = B,\ F_W(P) = A,\ 1 \leq il \leq nl,\ 1 \leqq l \leqq k \}$ なる適用条件 C_m をもつルール $\underset{\bullet}{A} \Rightarrow \beta\ (m = 1, 2, 3)$ はいずれもプログラム化可能である。

この他にも多くのプログラム化可能な否定的 (negative) 適用条件が存在するが，ここでは省略する。しかし，本節での以上の議論よりプログラムドウエッブ文法の強力なことが理解されたと考える。

4.6 むすび

本章では，ウエッブ文法のルール適用に制御機構を与えた pwg, scwg を定義し，pwg と適用条件との関係，pwg のクラスなどに関して上述のような結果を得た。また一次元系列 (SDG) を生成する pscwg の言語族が cs$\tilde{L}$($\tilde{L}$(csg)) に一致することを示した。しかし，pncfwg，rpncfwg，lpncfwg 間の関係については未解決の点が少なくない。さらには，pan(m)cswg と an(m)cswg との

真なる包含関係の解明も残された問題である。定義域をSDGに限定すれば，pncfw$\widetilde{L}_{SDG} \subsetneq$ pncsw$\widetilde{L}_{SDG}$は明らかであるが，台ウエッブ各頂点の隣接頂点数に上限の規定されていない一般のウエッブに対して，ncswg のルール群がpncfwg のルールを常に表現することができるか否かも今後検討を要する問題である。

このようないくつかの問題点に関する解答は示し得ぬ点もあるが，何らの制御方式も持たない正規ウエッブ文法に対して，正規プログラムドウエッブ文法は非正規プログラムドウエッブ文法に等価な記述能力を有することを示し得たのは重要なことである。さらに，この文法は適用条件の大部分を表現可能であることも注目すべきである。ウエッブ文法をベースとしたグラフィックシステム構成などを考えれば，実際的運用面での適用条件の使用には疑問な点が少なくない。適用条件として与えられた論理式の内容を与えられた公理系より推測することは容易なことではない。適用条件を基本的な容易に真偽判別な論理式 ── ここでは部分ウエッブの存在 ── に分解管理すべきであると考える。

また，プログラムド正規ウエッブ文法が完全グラフのような一様な構造のグラフを記述可能であるかといった問題についても考察することは興味深いと考えられる。

第五章　結　論

本編においては，関係記述文法の一つであるウエッブ文法の構造記述能力解明に関して，第1章では，正規ウエッブ文法とその生成言語族の特徴解明を，第2章では，非正規ウエッブ言語族と正規ウエッブ言語族の関係を検討し，第3章では正規ウエッブ文法にプログラム制御を与えることによって非正規ウエッブ文法の生成言語族を生成可能であることなどについて述べた。

本編で得た結果は大略次の通りである。

(1)　一般的な関係記述文法であるウエッブ文法によって生成される言語族は，正規ウエッブ言語族と非正規ウエッブ言語族とが定義可能であり，前者は後者よりも定義自体は簡潔であるが，正規単調ウエッブ言語族と非正規リニヤーウエッブ言語族との間に包含関係は成立しないことを明らかにした。このことは，たとえば完全グラフのように極めて一様な構造を部分に持つ構造は正規ウエッブ文法では記述不可能なことを意味している。

またそれぞれの言語族に対しては，構造が分離可能か否か，各部分構造であるブロックの種類が有限か否かによって，さらにこれは句構造文法の場合も同様だが，部分構造の繰り返し配列によって，その記述に必要とする文法形式が規定されることが認識された。

(2)　正規コンテキストフリーウエッブ文法の生成域を一次元に限定すれば，その生成能力は低く，ウエッブ文法は句構造文法の拡張とはいえぬが，非正規ウエッブ文法は，完全な句構造文法の拡張であることを示した。さらに，ウエッブ文法を構造解析に適用する場合，そのうめこみ形式は正規であることが望ましいため正規ウエッブ文法にプログラム制御を与えることによって，その生成言語族が非正規ウエッブ言語族を含みうることを示し，最も強力な記述能力を有する文法が正規プログラムド単調ウエッブ文法であることを示した。さらにこの文法を用いることによって，これまでに議論されて来た適用条件や他の一般的うめこみとい

いった概念もすべて表現可能であることを示した。

残された主要な問題点としては，一般に文法というものが局所的な変更を指定するものであるため，まったく一様な構造をもつグラフ，たとえば群グラフなどをウェッブ文法が記述し得るかといった問題点がある。

さらに，ウェッブの表面的構造のみの記述ではなく，句構造言語の構造研究が木構造の研究によって行なわれたと同様に，表面的構造は同一でもその深層構造の差異を明確に表わし得る表現方法に関しての検討も必要であろう。本編では，これらの問題について言及しておらず，今後も検討をつづける必要性のあることを強調しておこう。

第　2　編

種々の言語族の関係と新演算のもとでの閉包性

第2編　種々の言語族の関係と新演算のもとでの閉包性

第一章　緒　　論

自然言語研究の目的のために，言語を数学的な立場で取り扱い，文法の再編成を試みたN. Chomsky は，社会に有意な文章は無限にあるが，その構造を説明する文法は有限であるとの立場にたち，いわゆる i 形（$i=0$，1，2，3）文法を提唱した。この生成文法モデルは，当時発展しつつあった計算機言語への応用性の点からも多くの研究者によって注目され，現在のように数理言語学としての立場を確立するに到った。

Ginsburg らに代表される今日の代表的数理言語学者は，言語の持つ構造的特徴と文法の関係，写像に関する言語の性質などの言語の数学的特徴に関する大部分の問題を解決し，さらにいくつかの言語に共通する性質に注目した言語族の再構成を行なっている。とくに，最近の流行ともいえる ***AFL*** を中心とした議論はその好例としてあげることができる。

しかし，このような言語理論研究の方向は，言語理論のための理論構成そのものであり，数理言語学的成果を応用するといった方向との距離は遠くなるいっぽうであるということができる。現在までは，こうした理論的研究に対する意義論としては，一般的に数理言語理論，オートマトン理論が，数ある対象をどのようにモデル化し，そこよりどのような数学的結果が導き出され，いかなる一般的結論がくだし得るかが重要であって，どのような対象を選んだかを第一義とする必要がないとされて来た。しかし現在のように理論がますますその理論に埋没してゆこうとしている時，数学的モデル化がどのような対象を選んでなされたかという点につい　，少なく　　工学的立場に立つ限り，ある程度の現実的動機の主張がなされる必要がある。

このような考え方よりすれば，数理言語学において導入されている多くの演算

はあまりにも数学的すぎるといえる。もちろん，それらの定義された時点では，それぞれ何らかの現実的意味を有していたであろうが，このような点での考察・主張は自然消滅してしまったようである。

言語の各文は，プログラムの制御の流れ，システム動作の表現に対応しているという考え方も可能である。プログラムの構造自体は第一編の構造記述文法と直接的関係を有するが，具体的な各々の流れに注目すれば，それは一次元系列の集合であるとも認識できる。

こうした研究例の一つとして茨木らによる動的計画法と言語理論との関連性の解明への研究があり，また計算機システム間の会話のモデル化といった問題が挙げられる。このような言語理論を応用した現実問題のモデル化を行なっていこうとする研究方向に注目することは価値あることである。

本編第二章で定義される演算もこうした考え方にもとづいて提案するものであり，計算機利用における時分割処理システム，並列動作システム，さらには計算機間の会話システムの形式化に対応している。そして，単独システム表現に対応する言語の属する言語族の範囲で上記のシステム表現が可能であるか否かについて考察する。

ところで今日まで，プログラミング言語の研究を通じて2形言語を含む言語を生成する簡潔な形式を持つ数多くの文法が提案されている。これは2形文法の記述能力が，言語の閉包性については特異な面が少なくないにもかかわらず，あまり高くないため，1形文法より簡潔な形式で1形言語族に近い言語族の記述を行なおうとする試みに源を有している。それらの個々についての性質や1形言語族との関係はよく研究されているが，それらの相互関係に関する研究は数少ない。その原因の一つとして，これらの研究の多くが*AFL*演算を中心とした，大部分の言語族に共通してその閉包性の成立する演算を取り扱っていることがあげられる。

本編第二章でとり扱う演算は，各言語族の関係を知ろうとする目的にも役立つ

ものである。

また第三章では，完全並列文法と，同時導出文法などによって生成される言語族の関係について考察する。

第二章　新演算に関する言語族の閉包性について

2．1　序　　言

Chomsky によって提案された生成文法モデルは，自然言語学者の手をはなれ，*G*insburgらを中心とした数理言語学者らによって数理言語学として，種々の文法が定義され，それらの文法によって生成される言語族と i 形言語族との関係，種々の演算に関する言語族の閉包性を通じて，互いの言語族の関係を解明しようとする研究が行なわれている。

それらの文法の多くが，2形文法に類似の比較的簡潔な形式に，2形文法自らは規定しえないルール適用を限定する機能を与え，その生成言語クラスを1形言語クラスに近づけようとするものである。そしてそれらの言語族の特徴をもとめるために，*AFL*演算のもとでの閉包性が検討されているが，*AFL*演算の内には言語族の特徴をもとめるには単純すぎるものもあり，また言語族が*AFL*であることを示すことを目的としているような研究も少なくなく，言語族相互の関係は明らかにされているとはいえない。

本章は，言語に対して定義可能な形式の演算をいくつか定義し，その閉包性を考察する。ここで定義される演算は単に数学的興味のみではなく，言語をシステム動作の表現，文をシステムの具体的な一つの動作の表現として評価した場合，二つのシステム間で相互に情報を授受して動作した場合の表現はいかなるものとなるか，二つのシステムの時分割運用に対する表現はいかなるものとなるか，並列動作などに関連して動作時間の等しくなる動作を選出した場合，その表現はどのようになるかといった点をモデル化したものであり，3形，2形言語族ではその閉包性が明らかに成立せぬものもあるが，いくつかの言語族の特性化には役立つものである。

第2節では，議論の対象となる文法と新たに定義される演算が示され，第3節においてそれらの文法による言語族の演算のもとでの閉包性が検討される。

2．2　種々の文法と演算の定義

本節では，新たに定義する演算と各種の文法の定義を行なう。

〔定義2.1〕　句構造文法を$G=(V,\ \Sigma,\ P,\ S)$とする。ここに(1)V：記号の有限集合，(2)$\Sigma\subseteq V$，(3)Pは$u\rightarrow v$なる形式のルールの有限集合，(4)$S\in V-\Sigma$.

文法$G=(V,\Sigma,P,S)$に対して，$x_1 u x_2\in V^+$，$x_1 v x_2\in V^+$，$u\rightarrow v\in P$（$u\in(V-\Sigma)$），$v\in V^+$ならば，$x_1 u x_2 \underset{G}{\Rightarrow} x_1 v x_2$が成立するとして，関係$\underset{G}{\Rightarrow}$の反射的・推移的閉包を$\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$とする（以後混同のおそれのない限り$\Rightarrow$，$\overset{*}{\Rightarrow}$と記す）とき，$G$の生成する言語を$L(G)=\{w\in\Sigma^* \mid S\overset{*}{\Rightarrow}w\}$とする。

以下で各種文法，言語を定義する際，V，Σ，Sなどの意味は上記に同じであり，$L(G)$もほぼ同様であるため，関係$\Rightarrow$の意味のみ定義する。

〔定義2.2〕　プログラムド2形文法（P—cfg）* を，$G=(V,\ \Sigma,\ J,\ P,\ S)$とする。$J$はラベルの有限集合，$P$は，$(r)\ A\rightarrow v\quad S(V_r)\ F(W_r)$なる形式のルールの集合である。ただし，$r\in J$，$V_r$，$W_r\subseteq J$とする。

このルールをセンテンシャルフォームに適用するとは，

(a)$A\rightarrow v$がxに適用可能なとき，Aをvにかきかえてyとし，次のルールをV_rより選ぶ（これを$x\Rightarrow y$と記す）か，(b)xにAが適用不可能ならば，かきかえを行なわずに次のルールをW_rより選ぶ（これを$x\Rightarrow x$と記す）ことであるとする。

ここで，$A\rightarrow v$がxに適用可能である意味として，

(1)　$x=u_1 A u_2$（u_1，$u_2\in V^*$）ならば適用可能とする場合，その$L(G)$を$L_f(G)$と記す。

(2)　$x=u_1 A u_2$（$u_1\in(V-A)^*$，$u_2\in V^*$）ならば適用可能とする場合には，その$L(G)$を$L_l(G)$と記す。

〔定義2.3〕　スキャッタードコンテキスト文法（scg）を$G=(V,\ \Sigma,\ P,\ S)$

---

*　i形文法（$i=0$，1，2，3）はよく知られているので定義は略す。

とする。Pは，$(A_1, A_2, \cdots, A_n) \rightarrow (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ なるルールの集合である。ただし，$A_i \in V-\Sigma$，$w_i \in V^*$ $(1 \leq i \leq n)$ とする。

$x_i \in V^*$ $(1 \leq i \leq n+1)$ とするとき，$x_1 A_1 x_2 A_2 \cdots x_n A_n x_{n+1} \in V^*$，$x_1 w_1 x_2 w_2 \cdots x_n w_n x_{n+1} \in V^*$，$(A_1, \cdots, A_n) \rightarrow (w_1 \cdots, w_n) \in P$ ならば，$x_1 A_1 x_2 A_2 \cdots x_n A_n x_{n+1} \Rightarrow x_1 w_1 x_2 w_2 \cdots x_n w_n x_{n+1}$ が成立として$\Rightarrow$を定義する。

〔定義 2.4〕 完全並列文法(absolutely parallel grammar(apg))を，$G=(V, \Sigma, P, S)$ とする。Pは，$(A_1, \cdots, A_n) \rightarrow (w_1, \cdots, w_n)$ なるルールの集合である。ここに，$A_i \in V-\Sigma$，$w_i \in V^*$，$x_i \in \Sigma^*$ $(1 \leq i \leq n+1)$ とするとき，$x_1 A_1 x_2 A_2 \cdots x_n A_n x_{n+1} \in V^*$，$x_1 w_1 x_2 w_2 \cdots x_n w_n x_{n+1} \in V^*$，$(A_1, \cdots, A_n) \rightarrow (w_1, \cdots, w_n) \in P$ ならば，$x_1 A_1 x_2 A_2 \cdots x_n A_n x_{n+1} \Rightarrow x_1 w_1 x_2 w_2 \cdots x_n w_n x_{n+1}$ とする。

apg Gのルールの左辺$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$のnをこのルールのオーダとよび，すべてのルールのオーダの最大値をGのオーダとよんで$O(G)$と記し，$O(G) = k$なるapgをapg$_{(k)}$，その生成言語族を$\mathcal{L}_{ap(k)}$と記す。

同様にして，i形言語族を$\mathcal{L}_i$，scl(scattered context language)，apl(absolutely parallel language)の族を$\mathcal{L}_{sc}$, $\mathcal{L}_{ap}$というように記す。

〔定義 2.5〕 新たに導入する演算として，次の五種類の演算を定義する。まず，$L(G_1) \subseteq \Sigma_1^*$，$L(G_2) \subseteq \Sigma_2^*$とし，$a_i \in \Sigma_1$ $b_i \in \Sigma_2$とするとき，

$L(G_1) * L(G_2) = \{ a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n \mid a_1 a_2 \cdots a_n \in L(G_1), b_1 b_2 \cdots b_n \in L(G_2) \}$,

$L(G_1) \Cap L(G_2) = \{ w \in L(G_1) \mid {}^{\exists} x \in L(G_2), |x| = |w| \} \cup \{ x \in L(G_2) \mid {}^{\exists} w \in L(G_1), |x| = |w| \}$,

$L(G_1) \,\bar{\underline{\cdot}}\, L(G_2) = \{ w \cdot x \mid w \in L(G_1), x \in L(G_2), |x| = |w| \}$,

$L(G_1^+) = \{ w_1 w_2 \cdots w_i w_{i+1} \cdots w_n \mid |w_i| = |w_{i+1}|, w_i \in L(G_1), n \geq 1 \}$,

$L(G_1^o) = \{ w^n \mid w \in L(G_1), n \geq 1 \}$ と定義する。

2．3　演算のもとでの閉包性

〔定理2.1〕　$L(G_1)$，$L(G_2)\in\widetilde{L}_1$ならば，$L(G_1)*L(G_2)\in\widetilde{L}_1$が成り立つ。

（証明）　$G_1=(V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$，$G_2=(V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$とし$(V_1-\Sigma_1)\cap(V_2-\Sigma_2)=\phi$としておく。$G_1$のルールは一般に$A\to B$，$AB\to CD$と仮定できる（$G_2$も同様）。新しい文法$G=(V, \Sigma, S, P)$をつぎのように構成する。$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$，$V=V_1\cup V_2\cup\{R, P, S, Q\}$として，$P$をつぎのようにする。まず，$S\to PR$，$P\to PRQ$，$PR\to S_1S_2$とする。そして，

(a)　$^{\forall}A\in(V_1-\Sigma_1)$，$QRA\to ARQ$，$ARQ\to QRA$，$QS_2A\to AS_2Q$，$AS_2Q\to QS_2A$　を作る。同様に，$^{\forall}X\in(V_1-\Sigma_1)$，$^{\forall}Y\in(V_2-\Sigma_2)$，$RXY\to YXR$，$YXR\to RXY$。

(b)　$A\to B\in P_1$ならば，$A\to B\in P$，$Z\to U\in P_2$ならば，$Z\to U\in P$とする。

(c)　$AB\to CD\in P_1$ならば，$ARB\to CRD$，$AS_2B\to CS_2D\in P$とし，$YZ\to UW\in P_2$ならば，$^{\forall}X\in(V_1-\Sigma_1)$，$YXZ\to UXW\in P$とする。

(d)　$A\to BC\in P_1$ならば，$ARQ\to BRC$，$AS_2Q\to BS_2C\in P$とし，$Z\to UW\in P_2$ならば，$^{\forall}X\in(V_1-\Sigma_1)$，$ZXR\to UXW\in P$とする。

このようにGを構成すれば，Gによる導出が，$S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}PR(QR)^n\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}S_1S_2(QR)^n\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}A_1S_2A_2RA_3R\cdots A_nR\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}A_1B_1A_2B_2\cdots A_nB_n\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}a_1b_1a_2b_2\cdots a_n\ b_n$の形に書くことができることを確認できる。（証明終）

〔系2.1〕　$L(G_1)$，$L(G_2)\in\widetilde{L}_0$とすれば，$L(G_1)*L(G_2)\in\widetilde{L}_0$が成り立つ。

（証明）　証明の大筋は1形文法に同じであるが，前証において，Vを$V=V_1\cup V_2\cup\{P, Q, S, R, T, E, \widehat{E}\}$として，最初に$S\to PRT$，$P\to PRQ$，$PR\to S_1S_2$として，(a)，(b)，(c)，(d)の構成につぎのルールを加えればよい。。すなわち，$A\to\Lambda\in P_1$ならば，$A\to E\in P$として，$ERQ\to QRE$，$ERX\to XRE\in P$とする。ただし，$^{\forall}X\in(V_1-\Sigma_1)$に対してルールを設定する。またもし，$Y\to\Lambda\in P_2$ならば，$Y\to\widehat{E}$，$\widehat{E}XR\to RX\widehat{E}$を$^{\forall}X\in(V_1-\Sigma_1)\cup\{Q, E\}$に対して作り，$^{\forall}X\in(V_1-\Sigma_1)\cup$

$\{Q, E\}$, ${}^{\forall}Z \in (V_2 - \Sigma_2) \cup \{R\}$ に対して，$\hat{E}XZ \to ZX\hat{E} \in P$ とする。そして最後に，$E\hat{E}T \to T$, $Q\hat{E}T \to T$, $ERT \to T$, $T \to \Lambda \in P$ とすればよい。（証明終）

〔定理 2.2〕 $L(G_1)$, $L(G_2) \in \tilde{L}_2$とするとき，$L(G_1) * L(G_2)$は2形言語とは限らない。

（証明） $L(G_1) = \{(ab)^n\ b^n \mid n \geq 1\}$, $L(G_2) = \{a^m\ b^m \mid m \geq 1\}$を考える。$w \in L(G_1)$, $x \in L(G_2)$, $|x| = |w|$なるx, wをとれば，$w = (ab)^{2k}\ b^{2k}$, $x = a^{3k}\ b^{3k}$ とかける。$k = 2l+1$とすれば，$w = (ab)^{3l+1}(ab)^{l+1}b^{4l+2}$ $x = (aa)^{3l+1}(ab)(bb)^l b^{4l+2}$ とかけ，$k = 2l$ とすれば，$w = (ab)^{3l}(ab)^l\ b^{4l}$, $x = (aa)^{3l}(bb)^l\ b^{4l}$ とかけるため，$L(G_1) * L(G_2) = \{(a^2ba)^{3l+1}\ (a^2\ b^2)(ab^3)^l b^{8l+4} \mid l \geq 1\} \cup \{(a^2ba)^{3l}(ab^3)^l b^{8l} \mid l \geq 1\}$ となるが，これは2形言語ではない。（証明終）

〔定理 2.3〕 $L(G_1)$, $L(G_2) \in \tilde{L}_{SC}$ とすれば，$L(G_1) * L(G_2) \in \tilde{L}_{SC}$ が成立する。

（証明） $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$とする。準同形写像$h_1$, h_2を，$h_1(b) = \bar{b}$ $(b \in \Sigma_1)$, $h_1(A) = A$ $(A \in V_1 - \Sigma_1)$, $h_2(a) = \hat{\bar{a}}$ $(a \in \Sigma_2)$, $h_2(B) = B$ $(B \in V_2 - \Sigma_2)$としておく。

構成するscgを$G = (V, \Sigma, P, S)$とする。

(1) $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{c, d, f\}$,

(2) $V = V_1 \cup V_2 \cup \{\bar{a}, \hat{a}, \bar{\bar{a}}, \tilde{a}, \tilde{\tilde{a}}, \check{a} \mid a \in \Sigma_2\} \cup \{\hat{\bar{b}}, \hat{\hat{b}}, \hat{\underline{b}} \mid b \in \Sigma_1\} \cup \{C, D, \bar{C}, \bar{D}, \hat{C}, \hat{D}, \tilde{C}, S, \tilde{D}, \tilde{\tilde{D}}, \check{D}\}$とする。

(3) (a) $(S) \to (S_2CS_1DS_2) \in P$とし，$(S_1) \to (w) \in P_1$ ならば，$(C, S_1, D) \to (C, h_1(w), D) \in P$, $(S_2) \to (y) \in P_2$ならば，$(S_2, C) \to (h_2(y), C) \in P$, $(D, S_2) \to (D, h_2(y)) \in P$とする。

$(A_1, A_2) \to (w_1, w_2) \in P_1$ならば，$(C, A_1, A_2, D) \to (C, h_1(w_1), h_2(w_2), D) \in P$, $(B_1, B_2) \to (y_1, y_2) \in P_2$ならば，$(B_1, B_2, C) \to (h_2(y_1), h_2(y_2),$

$C) \in P$, $(D, B_1, B_2) \to (D, h_2(y_1), h_2(y_2)) \in P$とする。

(b)　$^{\forall} a_1, a_2 \in \Sigma_2$, $^{\forall} b \in \Sigma_1$に対して,

$(\bar{a}_1, C, \hat{\bar{b}}, D, \bar{a}_1) \to (\hat{a}_1, \bar{C}, \hat{\hat{b}}, \bar{D}, \hat{a}_1)$, $(\hat{a}_1, \bar{a}_2, \bar{C}, \hat{\bar{b}}, \bar{D}, \hat{a}_1, \bar{a}_2) \to$ $(\bar{\bar{a}}_1, \hat{a}_2, \bar{C}, \hat{\hat{b}}, \bar{D}, \bar{\bar{a}}_1, \hat{a}_2)$, $(\hat{a}_1, \bar{C}, \bar{D}, \hat{a}_1) \to (\bar{\bar{a}}_1, \hat{C}, \hat{D}, \bar{\bar{a}}_1)$を$P$の元とする。

(c)　$^{\forall} a_1, a_2, a_3 \in \Sigma_2$, $^{\forall} b_1, b_2 \in \Sigma_1$に対して, $(\bar{\bar{a}}_1, \hat{C}, \hat{\hat{b}}_1, \hat{D}) \to (b_1, c, \tilde{a}_1, \tilde{\tilde{D}})$, $(\bar{\bar{a}}_1, \hat{C}, \hat{\hat{b}}_1, \hat{D}) \to (\tilde{\tilde{a}}_1, c, \hat{\bar{b}}_1, \tilde{D})$,

$(\tilde{\tilde{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2, \bar{\bar{a}}_3, \hat{\bar{b}}_1, \hat{\hat{b}}_2) \to (b_1, \tilde{a}_1, \tilde{\tilde{a}}_2, \bar{\bar{a}}_3, \hat{\bar{b}}_2)$,

$(\tilde{\tilde{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2, \hat{\bar{b}}_1, \hat{\hat{b}}_2, \tilde{D}) \to (b_1, \tilde{a}_1, b_2, \tilde{a}_2, \tilde{\tilde{D}})$ をPの元とする。

(d)　$^{\forall} a_1, a_2 \in \Sigma_2$に対して,

$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{\tilde{D}}) \to (\tilde{a}_2, \tilde{a}_1, \tilde{\tilde{D}})$,

$(\tilde{a}_1, \tilde{\tilde{D}}, \bar{\bar{a}}_1) \to (\check{a}_1, \check{D}, \check{a}_1)$,

$(\check{a}_1, \tilde{a}_2, \check{D}, \check{a}_1, \bar{\bar{a}}_2) \to (a_1, \check{a}_2, \check{D}, ff, \check{a}_2)$,

$(\check{a}_1, \check{D}, \check{a}_1) \to (a_1, d, ff)$ をPの元とする。

このようなscgによれば，まず (a) のステップの終わりに，$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} u_1 C u_2 D u_3$, $u_1, u_3 \in (\bar{\Sigma}_2)^+$, $u_2 \in (\hat{\bar{\Sigma}}_1)^+$ ならば，$u_1, u_3 \in h_2(L(G_2))$, $u_2 \in h_1(L(G_1))$ である系列を得ることができる。そして (b) のステップの終わりには，$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} u \hat{C} v \hat{D} u$, $u \in (\bar{\bar{\Sigma}}_0)^+$, $v \in (\hat{\hat{\Sigma}}_1)^+$ ならば，$|u| = |v|$が得られる。(c)の終わりでは，$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} b_1 \tilde{a}_1 b_2 \tilde{a}_2 b_3 \tilde{a}_3 \cdots b_K \tilde{a}_K\ c\ b_{K+1} \tilde{a}_{K+1} \cdots b_{2K} \tilde{a}_{2K}\ D\ u$ ならば，$b_1 b_2 \cdots b_{2K} \in L(G_1)$, $a_1 a_2 \cdots a_{2K} \in P(L(G_2))$が，$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} b_1 \tilde{a}_1 \cdots b_K c \tilde{a}_K b_{K+1} \tilde{a}_{K+1} \cdots b_{2K+1} \tilde{a}_{2K+1} \tilde{\tilde{D}}\ u$ ならば，$b_1 b_2 \cdots b_{2K+1} \in L(G_1)$, $a_1 a_2 \cdots a_{2K+1} \in P(L(G_2))$が，$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} b_1 C \tilde{a}_1 \tilde{\tilde{D}}\ u$ならば$u = \bar{\bar{a}}_1$が得られることが確認できる。ただし，$P$は置換を表わすものとする。最後に，($d$)のステップの終わりには，$L(G) = \{ b_1 a_1 \cdots b_K\ a_K\ c\ b_{K+1}\ a_{K+1} \cdots b_{2K}\ a_{2K}\ d f^{2K} | b_1 \cdots b_{2K} \in L(G_1),\ a_1 \cdots a_{2K} \in L(G_2) \} \cup \{ b_1 a_1 \cdots b_K c\ a_K\ b_{K+1} \cdots b_{2K+1}\ a_{2K+1}\ d$

$f^{2K+2} \mid b_1 \cdots b_{2K+1} \in L(G_1),\ a_1 \cdots a_{2K+1} \in L(G_2)\} \cup \{ b_1 c a_1 d f f \mid b_1 \in L(G_1),\ a_1 \in L(G_2)\}$ が得られる。

いま $h_3(a) = a\ (a \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{d, f\})$, $h_3(c) = \Lambda$ とすれば $h_3(L(G)) = \{ b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_n\ a_n\ d f^{2n} \mid b_1 \cdots b_n \in L(G_1),\ a_1 a_2 \cdots a_n \in L(G_2)\}$ も scl である。ところで，$L' \subseteq \{ d^K\ c\ w \mid |w| = K \geq 1,\ w \in \Sigma^+\}$ が scl ならば，$L'' = \{ w \mid \exists K,\ d^K c w \in L'\}$ もまた scl であることが知られている〔1〕。いまの場合，$h_3(L(G)) \subseteq \{ w d f^K \mid |w| = K \geq 1,\ w \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^+\}$ と書けるので，$L = \{ b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_n\ a_n \mid b_1 \cdots b_n \in L(G_1),\ a_1 \cdots a_n \in L(G_2)\}$ は scl である。以上の議論をもって証明を終わる。（証明終）

〔定理 2.4〕　$L(G_1), L(G_2) \in \tilde{\mathcal{L}}_3$ とすれば，$L(G_1) * L(G_2) \in \tilde{\mathcal{L}}_3$ が成立する。

（証明）　$G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$, $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ に対して，3形文法 $G = (V, \Sigma, P, S)$ をつぎのように構成すればよいことは明らかである。

(1)　$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $V = V_{N1} \cup V_{N2} \cup V_{N3} \cup \Sigma$，ここに，$V_{N1} = \{ [AB] \mid A \in V_1 - \Sigma_1,\ B \in V_2 - \Sigma_2\}$, $V_{N2} = \{ [AB] \mid A \in V_2 - \Sigma_2,\ B \in V_1 - \Sigma_1\}$, $V_{N3} = \{ [C] \mid C \in V_2 - \Sigma_2\}$ であり，$S = [S_1 S_2]$ とする。

(2) まず，$S_1 \to aA \in P_1$ ならば，$[S_1 S_2] \to a[S_2 A] \in P$, $S_1 \to a \in P_1$ ならば，$[S_1 S_2] \to a[S_2] \in P$ とする。そして一般的には，$[XY] \in V_{N1}$ に対して，

$X \to aZ \in P_1$ ならば，$[XY] \to a[YZ] \in P$,

$X \to a \in P_1$ ならば，$[XY] \to a[Y] \in P$ とする。

また，$[UW] \in V_{N2}$ に対しては，

$U \to bZ \in P_2$ ならば，$[UW] \to b[WZ] \in P$ とし，$[U] \in V_{N3}$ に対しては，$U \to b \in P_2$ ならば，$[U] \to b \in P$ とする。（証明終）

さてつぎに，二番目の演算 $\Cap$ について考察してみよう。いま $L(G_1) \subseteq a^*$, $L(G_2) \subseteq a^*$ ならば，$L(G_1) \Cap L(G_2) = L(G_1) \cap L(G_2)$ となることに注意しておこう。

（これ以外にも，$\Cap$ が $\cap$ の意となる例は少なくない）。

〔定理 2.5〕　$L(G_1)$，$L(G_2) \in \widetilde{L}_3$ とすれば，$L(G_1) \Cap L(G_2) \in \widetilde{L}_3$ が成り立つ。

（証明）　$G_i = (V_i, \Sigma_i, P_i, S_i)$（$i=1, 2$）に対して，$G^1 = (V, \Sigma, P, S)$ を，$V-\Sigma = \{[XY] \mid X \in V_1 - \Sigma_1, Y \in V_2 - \Sigma_2\}$，$\Sigma = \Sigma_1$，$S = [S_1 S_2]$ とし，P はつぎのように構成する。前定理の構成方法に類似した仕方で，$[XY] \in V - \Sigma$ に対して，$X \to aZ \in P_1$ かつ $Y \to bU \in P_2$ であるならば，$[XY] \to a[ZU]$ とし，$[XY] \in V - \Sigma$ に対して，$X \to a \in P_1$ かつ $Y \to b \in P_2$ であるならば，$[XY] \to a$ とし，これら以外の場合についてはルールを構成しない。そうすれば，明らかに $L(G^1) = \{x \in L(G_1) \mid {}^{\exists}y \in L(G_2),\ |x| = |y|\}$ が成立し，G^1 は3形文法である。まったく同様にして，$L(G^2) = \{y \in L(G_2) \mid {}^{\exists}x \in L(G_1),\ |y| = |x|\}$ なる3形文法 G^2 を構成することによって，$L(G) = L(G^1) \cup L(G^2)$ なる3形文法 G を得ることができる。（証明終）

演算 $\Cap$ に関する言語族の閉包性を調べるのに，演算$\equiv$に関する性質を利用すれば議論が簡潔となるため，演算$\equiv$に関する種々の言語族の閉包性について考察する。つぎの定理は自明である。

〔定理 2.6〕　$\widetilde{L}_i$（$i=2, 3$）は演算$\equiv$のもとに閉じていない。

〔補題 2.1〕　$\widetilde{L}_{SC}$ は演算$\equiv$のもとに閉じている。

（証明）　$G_i = (V_i, \Sigma_i, P_i, S_i)$，（$i=1, 2$）に対して，$G = (V, \Sigma, P, S)$ を，$V = V_1 \cup V_2 \cup \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 \cup \{C, S\}$，$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{c\}$ として，P を $(S) \to (S_1 C S_2)$，$(S_1) \to (w_1) \in P_1$ ならば $(S_1, C) \to (h(w_1), C)$，$(S_2) \to (y_1) \in P_2$ ならば $(C, S_2) \to (C, h(y_1))$，$(A_1, A_2) \to (w_1, w_2) \in P_1$ ならば，$(A_1, A_2, C) \to (h(w_1), h(w_2), C)$，$(B_1, B_2) \to (y_1, y_2) \in P_2$ ならば $(C, B_1, B_2) \to (C, h(y_1), h(y_2))$ とする。ここで，h は $h(a) = \overline{a}$（$a \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$），$h(A) = A$（$A \in (V_1 \cup V_2) - (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$）なる準同形写像とする。そして，${}^{\forall}a \in \Sigma_1$ ${}^{\forall}b \in \Sigma_2$ に対して，$(\overline{a}, C, \overline{b}) \to (a, C, b)$，$(\overline{a}, C, \overline{b}) \to (a, c, b)$ とすれば，$L(G) =$

$\{xcy \mid x \in L(G_1),\ y \in L(G_2),\ |x| = |y|\}$となる。（証明終）

〔補題 2.2〕 $\widetilde{L}_i\ (i=0,1)$は演算$\doteq$のもとに閉じている。（証明略）

〔定理 2.7〕 $\widetilde{L}_{SC}$は演算$\Cap$のもとに閉じている。

（証明） $G_i\ (i=1,2)$をscgとすれば，$L(G_1) \doteq L(G_2)$はsclであるから，$S_0 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} (h_1(x))c(h_2(y))$，$|h_1(x)| = |h_2(y)|$，$h_1(x) \in h_1(L(G_1)) \subseteq (\Sigma_1)^+$，$h_2(y) \in h_2(L(G_2)) \subseteq (\Sigma_2)^+$，$(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi)$とできるようなscg Gが存在する。したがって定理 2.3 の証明に示したように，$h_2(y)$の記号の一つずつを$h_1(x)$の記号の間に挿入するようなscg G'を得ることができ，$h_1(x)$の記号間のΣ_2の元を消去する（これはkー限定消去が可能なことより明らか）ことができる。この事実より，$S_3 \overset{*}{\underset{G_3}{\Rightarrow}} x \in L(G_1)$，$^{\exists} y \in L(G_2)$，$|x| = |y|$とできるscg$G_3$ を得る。よってその閉包性は明らか。（証明終）

上記の議論はそのまま$\widetilde{L}_1$に適用できる。G_iを1形文法とし，$S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} x \in \Sigma_1^*$, $S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\Rightarrow}} y \in \Sigma_2^*$ であるとすれば，$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} (h_1(x))c(h_2(y))$なる1形文法が存在し，さらに，$L_0 \subseteq \{xcw \mid |x| = |w| \geq 1,\ x \in \Sigma_1^*,\ w \in \Sigma_2^*,\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi\}$が1形言語ならば，$L = \{x \mid {}^{\exists}k,\ xcw \in L_0,\ |x| = |w| = k \geq 1\}$も1形言語となるため，scgの場合と同様な結果を導びくことができる。

この議論を0形文法に適用するのは容易であって，cより後にある記号系列を消去するだけで簡単にLを得ることができる。よって次の系を得る。

〔系 2.2〕 $\widetilde{L}_i\ (i=0,1)$は演算$\Cap$のもとに閉じている。

〔定理 2.8〕 $\widetilde{L}_2$は$\Cap$のもとに閉じている。

（証明） $L(G_i) \subseteq \Sigma_i^*$, $h_i(w_i) = a^{|w_i|}$ $(w_i \in L(G_i))$とし，$h_i(L(G_i)) = R_i$ $(i=1,2)$とすれば，R_iは3形言語ゆえ，

$((\Sigma_1^* \Cap R_2) \cap L(G_1)) \cup ((\Sigma_2^* \Cap R_1) \cap L(G_2)) = L(G_1) \Cap L(G_2)$となる。

ただし$a \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_2$とする。（証明終）

〔補題 2.3〕 $G = (V, \Sigma, J, P, S)$を任意のP−cfgとすれば，$L(G) =$

$L(G^1)^*$ となるつぎのようなP－cfg G^1 が存在する。ここで，$G^1=(V^1,\ \Sigma^1,\ J^1$
$P^1,\ S^1)$ とすれば，

(1) $V^1=V\cup\bar{\Sigma}\cup\{C\}$，$\Sigma^1=\Sigma$，$S^1=S$。

(2) $J^1=J_1\cup J_2\ (J_1\cap J_2=\phi)$ とかけて，Pの元 $(r)\ A\to u\quad S(V_r)\ F(W_r)$ において，

(a) $r\in J_1$ならばV_r，$W_r\subseteq J$，$u\in V^+$，

(b) $r\in J_2$ならばV_r，$W_r\subseteq J_2$，$u\in\Sigma\cup\{\Lambda\}$。

（証明） hを$h(a)=\hat{a}\ (a\in\Sigma)$，$h(A)=A\ (A\in V-\Sigma)$なる準同形写像としておく。

(1) $(r)\ A\to\psi\ S(V_r)\ F(W_r)\in P$ かつ$\psi\in V^+$ならば，$(r)\ A\to h(\psi)\ S(\bar{V}_r)$
$F(\bar{W}_r)\in P^1$とする。ただし，$\bar{V}_r\ (\bar{W}_r)=V_r\ (W_r)\cup\{r_N\}$，$r_N\notin J$とする。
もしも$\psi=\Lambda$ならば，$(r)\ A\to C\ S(\bar{V}_r)\ F(\bar{W}_r)\in P^1$ とする。

(2) $\Sigma=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_l\}$とするとき，$(r_N)\ C\to\Lambda\ S(r_N)\ F(r_{N+1})$として，
$V_i\ (1\leqq i\leqq l)$に対して，
$(r_{N+i})\quad \hat{a}_i\to a_i\quad S(r_{N+i})\quad F(J_2)\in P^1$ とする。ここに，$J_1=\bigcup_{r\in J}(V_r\cup$
$W_r)$，$J_2=\{r_i\mid N\leqq i\leqq N+l\}$とする。（証明終）

〔定理 2.9〕 G_1，G_2をP－cfgとすれば，$L(G_1)\Xi L(G_2)=L(G)$ なる
P－cfgが存在する。

（証明） $G_i=(V_i,\ \Sigma_i,\ J_i,\ P_i,\ S_i)\ (i=1,\ 2)$とする。ただし$G_i$は上記補題により得られる$P$－cfg とする。したがって$V_i-\Sigma_i=V_{i1}\cup V_{i2}\cup\{S\}$，$V_{i1}$
$=\{\bar{a}\mid a\in\Sigma_i\}$，$J_i=J_{i1}\cup J_{i2}$とかけることに注意せよ。そこで，$S\to S_1S_2\in P$
とし，

---

* 導出 の意味として，定義 2 の(1)，(2)のいづれをとっても成立するときは一般にこのように記す。

(1) $(r)A \to \psi \quad S(V_r) \quad F(W_r) \in P_1$かつ$r \in J_{11}$ならば，$(r)A \to \psi \quad S(\hat{V}_r)$ $F(\hat{W}_r) \in P$とする。ただし，$\hat{V}_r(\hat{W}_r) = V_r(W_r) - \{r \mid r \in J_{12}\} \cup \{r' \mid (r')$ $S_2 \to \psi \quad S(V_{r'}) \quad F(W_{r'}) \in P_2\}$とする。

(2) $(r)B \to w \quad S(V_r) \quad F(W_i) \in P_2$かつ$r \in J_{21}$ならば，$(r)B \to w \quad S(\hat{V}_r)$ $F(\hat{W}_r) \in P$とする。ここで，$\hat{V}_r(\hat{W}_r) = V_r(W_r) - \{r \mid r \in J_{22}\} \cup \{r_{N0} \notin J_1$ $\cup J_2$ 。ただし，上記において$(V_1 - \Sigma_1) \cap (V_2 - \Sigma_2) = \{C\}$, $J_1 \cap J_2 = \phi$ であるものとする。

(3) $\Sigma_1 = \{a_1, \cdots, a_n\}$, $\Sigma_2 = \{b_1, \cdots, b_m\}$とするとき，$(r_{N0})\ C \to A\ S(r_{N0})$ $F(r_{N+1})$として，

$\forall i\ (1 \leq i \leq m-1)$に対して，

$(r_{N+i})\bar{a}_i \to a_i \quad S(r_{N+m+1}) \quad F(r_{N+i+1})$

$(r_{N+m})\bar{a}_m \to a_m \quad S(r_{N+m+1}) \quad F(\phi)$として，

$\forall j\ (1 \leq j \leq n-1)$に対して，

$(r_{N+m+j})\ \hat{b}_j \to b_j \quad S(r_{N+1}) \quad F(r_{N+m+j+1})$

$(r_{N+m+n})\ \hat{b}_n \to b_n \quad S(r_{N+1}) \quad F(\phi)$とする。

ここで，$(V_1 - \Sigma_1) \cap (V_2 - \Sigma_2) = \phi$の仮定によって，補題 2.3 の準同形写像$h_i$は，$h_1(\Sigma_1) \cap h_2(\Sigma_2) = \phi$と選ばれていて，本証では，$h_1(a) = \bar{a}\ (a \in \Sigma_1), h_2(b) = \bar{b}$ $(b \in \Sigma_2)$と記していることに注意されたい。（証明終）

〔定理 2.10〕 G_iをP−cfgとするとき，$L(G_1) \cap L(G_2) = L(G)$となる$P$−cfgが存在する。ただし，$\exists\ (r)A \to \Lambda \quad S(V_r) \quad F(W_r) \in P$とする（$G = (V, \Sigma, J, P, S)$としている。）

（証明） G_iがP−cfgであるので$L(G_1) \equiv L(G_2)$もP−cfl である。よって$L = \{h_1(w)h_2(x) \mid |h_2(x)| = |h_1(w)|,\ h_2(x) \in h_2(L(G_2)),\ h_1(w) \in h_1(L(G_1))\}$ $(h_1(\Sigma_1) \cap h_2(\Sigma_2) = \phi)$となる$P$−cfg Gが存在する。この文法Gを修正して，$h_1'(a) = a\ (a \in \Sigma_1)$, $h_2'(b) = \hat{b} \in V - \Sigma$, $(b \in \Sigma_2)$とし，$\hat{b} \to$

Λをルールの核にもつP−cfg G'を構成すると，$L(G')=\{x\in L(G_1)\mid {}^{\exists}w\in L(G_2),\ |x|=|w|\}$とできることは明らかである。まったく同様にして$L(G'')=\{w\in L(G_2)\mid x\in L(G_1),\ |x|=|w|\}$なるP−cfg G'を構成し．$L(G''')=L(G')\cup L(G'')$なるP−cfg G'''を得ることができる。（証明終）

文献〔1〕には，$L\subseteq \Sigma^{+}c\Sigma^{+}(c\notin\Sigma)$がscl ならば，$L\cap\{wcw\mid w\in\Sigma^{+}\}$もsclであることが示されており，このことより，一般に$\{ww\mid w\in L(G)\}$はGがscgであれば，sclとなる。詳細は略すが，i形文法（$i=0,1$）についても同様なことが成立する。ここでは，P−cfg について考察する。

〔定理 2.14〕 GをP−cfgとするとき，$\{ww\mid w\in L_l(G)\}=L_l(G')$となるP−cfg G'が存在する。

（証明） $G=(V,\Sigma,J,P,S)$に対して，$G'=(V',\Sigma',J',P',S')$をつぎのように構成すればよい。

(1) $V'=V\cup(\overline{V-\Sigma})\cup\{S\}$，$\Sigma'=\Sigma$，$J'=J\cup\hat{J}\cup\{r_0\}$（$\hat{J}=\{\hat{r}\mid r\in J\}$）とする。

(2) hを$h(A)=\overline{A}\ (A\in V-\Sigma)$，$h(a)=a\ (a\in\Sigma)$なる準同形写像としておく。

Pの元は次のように作る。

$(r_0)\ S'\to SS\quad S(V_{r_0})$，$V_{r_0}=\{r\mid (r)\ S\to\phi\, S(V_r)\ F(w_r)\in P\}$として，

$(r)\quad A\to w\ S(V_r)\ F(W_r)\in P$ならば，

$(r)\quad A\to w\ S(\hat{V}_r)\ F(W_r)$，$\hat{V}_r=\{\hat{r}'\mid r'\in V_r\}$

$(\hat{r})\quad \overline{A}\to h(w)\ S(V_r)\ F(\phi)$とする。

上の構成方法と，文法G，G'による導出方式を考えれば，定理の成立は明らかである。（証明終）

つぎに、P−cfg Gに対して$L_l(G)\supseteq L_f(G)$*なる言語$L_f(G)$を少し考察しよう。一般に$\{ww\mid w\in L_f(G)\}=L_f(G)$なるP−cfg G'が存在するか否かは答え得ないが，ルールの核が擬線形文法のルール形であれば答は容易に示すことができる。ここで、文法Gが擬線形であるとは，${}^{\forall}A,B\in V-\Sigma$，$\neg(A\gg B\wedge B\gg A)$

が成立することである。ただし，$A \gg B$とは，$\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in V^*$, $A \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha B \beta B \gamma$であることとする。〔8〕

〔系 2.3 〕 Gをそのルールの核が擬線形文法のルール形であるようなP—cfgとすれば，$\{ww \mid w \in L(G)\} = L(G')$ となるP—cfg G'が存在して，Gのルールの核も擬線形文法のルール形となる。

（証明） ルールの核が擬線形であるから，$S \stackrel{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x \in V^*$中に同じ$A \in V - \Sigma$が二度以上出現することはない。よって$L_f(G) = L_l(G) = L(G)$が成立する。上記定理と同様な方法によって$G'$を構成すれば，$G'$の形式が系の形になることは容易に確かめうる。（証明終）

系のようなP—cfg の例としては文献〔2〕の例1が典型的なものである。ところでルールの核が一般のcfgのルールである場合$\{ww \mid w \in L_f(G)\} = L_f(G')$となる$P$—cfg G' が構成可能か否かは現在考察中である。いま$A \to \psi$の適用後$\hat{A} \to \psi$を適用するものとし，s. f. が$uAvAwu\hat{A}v\hat{A}w$ であるとすれば，$uAvAwu\hat{A}v\hat{A}w \Rightarrow u\psi vAwu\hat{A}v\psi w$というように必ずしも$xx$（$x \in V^+$）の形をとらない語が導出される場合が存在する。この点をより一般的に考察することによって，GがP—cfgの場合$L_l(G) \supsetneq L_f(G)$が証明できるだろうと推測されるが，本章では断定的な議論は行なわない。

演算$\dot{\cap}$に関して一般的結果を示すためにMORIYA〔4〕の方法を用いよう。πを$u \to v$（$u \in (V - \Sigma)^+, v \in V^*$）なるルールとするとき，$x_1 u x_2 \underset{G}{\overset{L}{\underset{\pi}{\Rightarrow}}} x_1 v x_2$ が成立するのは$x_1 \in \Sigma^*$であるときに限るとした場合の$L(G)$を，$L_L(G)$と記すことにし，$w_0 \underset{\pi_1}{\overset{L}{\Rightarrow}} w_1 \underset{\pi_2}{\overset{L}{\Rightarrow}} w_2 \Rightarrow \cdots \underset{\pi_K}{\overset{L}{\Rightarrow}} w_K$（$\alpha = \pi_1 . \pi_2 \cdots \pi_K \in P^+$, $\pi_i \in P$）なることを$w_0 \overset{*}{\underset{\alpha}{\overset{L}{\Rightarrow}}} w_K$とかくとき，$A_L(G) = \{\alpha \in P^+ \mid S \overset{*}{\underset{\alpha}{\overset{L}{\Rightarrow}}} w \in \Sigma^*\}$と定義しておこう。

---

* この関係の成立は，文献〔2〕による。

〔定理 2.12.〕 G_i（$i=1, 2$）を勝手な句構造文法とする。
$L_L(G_1) \cap L_L(G_2)$ が空か否かは決定可能である。

（証明） G_i に対して $A_L(G_i)$は2形言語である〔4〕。いまG_i のルール $\pi_j: u \to v$ において，v 中の $^{\forall}a \in \Sigma_i$ 以外の記号を消去して得られる記号列を$e(v)$ とかくとき，$|e(v)|=k$（$k \geq 1$）が成立すれば，準同形写像hを$h(\pi_j)=\pi_j{}^k$と定義する。$|e(v)|=0$ならば，$h(\pi_j)=\Lambda$とする。いま$w \in L_L(G_i)$に対応する$A_L(G_i)$の元を$\mathrm{a}(w)$と記すことにすれば，$|w|=l$ ならば $|h(\mathrm{a}(w))|=l$ となる。$h_i(A_L(G_i))$ が2形言語であることにより定理が得られることは明らか。（証明終）

〔定理 2.13〕 G_i（$i=1, 2$）を1形文法とする。$L(G_1) \cap L(G_2)$ が空か否かは決定不能である。

（証明） $G_1=G_2$とすれば，$L(G_1) \cap L(G_2)=L(G_1)$ となり，問題は1形文法の 空集合問題に帰着される。（証明終）

〔系 2.6〕 G_i（$i=1, 2$）を scg（P−cfg）とすれば，定理 2.13 に同意なことが成立する。

定理 2.13の証明において， 定理 2.8 の証明と同じようにして$h_1(L(G_1))$, $h_2(L(G_2)) \subseteq a^*$ とした場合，問題はΣが1記号よりなる1形文法の空集合問題に帰着される。この問題が可解でないことは，文献〔7〕の〔P 1〕と同様に，2一計数機械をシミュレートするループフリーリニヤーバウンデッドオートマトンを構成して，この受理テープが空か否かが可解であれば，2一計数機械の停止問題が可解となってしまうことより得ることもできる。

〔定理 2.14〕 G_1 を scg とすれば，$L(G_1^+)$，$L(G_1^\circ)$ は scl である。

（証明） $G_1=(V_1, \Sigma_1, S_1, P_1)$に対して，$G=(V, \Sigma, S, P)$を$V=V_1 \cup \{\overline{a}, \hat{a} \mid a \in \Sigma_1\} \cup \{d, C_1, C_2, D, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \hat{C}_1, \hat{C}_2\}$，$\Sigma=\Sigma_1 \cup \{d\}$とし，$P$をつぎのように構成すればよい。

(1) $(S)\to(DS_1C_1S_1C_2)$

$(S_1)\to(w)\in P_1$ならば，$(D,\ S_1,\ C_1)\to(D,\ h(w),\ C_1)$，$(C_1,\ S_1,\ C_2)\to$ $(C_1,\ h(w),\ C_2)\in P$とする。

$(A,\ B)\to(w,\ y)\in P$ならば，$(D,\ A,\ B,\ C_1)\to(D,\ h(w),\ h(y),\ C_1)$，$(C_1,\ A,\ B,\ C_2)\to(C_1,\ h(w),\ h(y),\ C_2)\in P$とする。$h$は$h(a)=\overline{a}\,(a\in\Sigma_1)$，

(2) $^{\forall}a,\ b\in\Sigma_1$に対して，

$(D,\ \overline{a},\ C_1,\ \overline{b},\ C_2)\to(D,\ a,\ C_1,\ \hat{b},\ C_2)$，

$(D,\ \overline{a},\ C_1,\ \overline{b},\ C_2)\to(d,\ a,\ \overline{C}_1,\ \hat{b},\ \overline{C}_2)$，

$(\overline{C}_1,\ \hat{b},\ \overline{C}_2)\to(D,\ \overline{b},\ C_1S_1C_2)$，

$(\overline{C}_1,\ \hat{b},\ \overline{C}_2)\to(\overline{C}_1,\ \overline{b},\ \overline{C}_2)$，$(\hat{C}_1,\ \overline{b},\ \hat{C}_2)\to(\hat{C}_1,\ b,\ \hat{C}_2)$，

$(\overline{C}_1,\ \hat{b},\ \overline{C}_2)\to(\hat{C}_1,\ \overline{b},\ \hat{C}_2)$，$(\hat{C}_1,\ \overline{b},\ \hat{C}_2)\to(d,\ b,\ d)$，

このようにすれば，$L(G)=\{dw_1dw_2\cdots dw_id\cdots d\mid |w_i|=|w_1|,\ w_i\in L(G_1)\}$が得られる。よって$d$を消去すれば，$L(G^+)$が scl であることが確かめられる。

演算○については，上記(2)をつぎのように訂正すればよい。ただし，Vとしては$\{\overline{\overline{a}}\mid a\in\Sigma\}$を加えておく。

$(D,\ \overline{a},\ C_1,\ \overline{a},\ C_2)\to(D,\ \hat{a},\ C_1,\ \hat{a},\ C_2)$，

$(D,\ \hat{a},\ \overline{b},\ C_1,\ \hat{a},\ \overline{b},\ C_2)\to(D,\ a,\ \hat{b},\ C_1,\ \overline{\overline{a}},\ \hat{b},\ C_2)$，

$(D,\ \hat{a},\ \overline{b},\ C_1,\ \hat{a},\ \overline{b},\ C_2)\to(d,\ a,\ b,\ \overline{C}_1,\ \overline{\overline{a}},\ \overline{b},\ \overline{C}_2)$，

$(\overline{C}_1,\ \overline{\overline{a}},\ \overline{C}_2)\to(\overline{C}_1,\ \overline{a},\ \overline{C}_2)$，$(\overline{C}_1,\ \overline{\overline{a}},\ \overline{C}_2)\to(D,\ \overline{a},\ C_1\ SC_2)$，

$(\overline{C}_1,\ \overline{\overline{a}},\ \overline{C}_2)\to(\hat{C}_1,\ a,\ \hat{C}_2)$，$(\hat{C}_1,\ \overline{\overline{a}},\ \hat{C}_2)\to(\hat{C}_1,\ a,\ \hat{C}_2)$，

$(\hat{C}_1,\ \overline{\overline{a}},\ \hat{C}_2)\to(d,\ a,\ d)$とすれば，$L(G)=L(G_1^{\circ})$であることが確かめられる。（証明終）

〔系 2.7〕 $\mathcal{L}_i\ (i=0,\ 1)$は演算○，＋のもとに閉じており，P－cfl の族も演算＋のもとに閉じている。また，GをP－cfg とするとき，$\{w^n\mid w\in L_l(G),\ n\geq 1\}=L_l(G')$なる$P$－cfg C'が存在する。（証明略）

2.4 結　　言

言語に関する新たな演算をいくつか定義し，それらの演算に関する言語の閉包性について述べた。演算 * が序言に述べた時分割システム表現に，演算 $\dot{\cap}$ が並列システムに，○は構造を持ったデータ処理の同一部分構造処理の表現に，そして＋は同一のステップ数を必要とする構造解析の表現を考慮して定義されたことは明白であり，これ以上の解説の必要はないだろう。

本章のような考え方を進めることによって，従来定義され得なかった数多くの演算が定義可能となり，多くの言語族の関係解明に役立つことが期待できる。

本章では，$L_{P\text{—}cf}$ の演算 *，○のもとでの閉包性は明らかにできなかったが，これらの問題の解明は重要な問題であり，今後とも検討を行なう必要性がある。また自由導出２形プログラムド文法と最左導出プログラムド文法の差異も，前者が $\{ww \mid w \in L(G)\}$ を生成しにくい点を考えれば，近い将来明らかにされると考えられ，本章のような考えに基づく新演算の提案，その演算に関する言語族の閉包性の検討は未解決の問題のいくつかを解決へ導びくと考えている。

第三章　2，3の言語族の性質とその階層関係

3．1　序　言

前章に述べられたように，1形文法と2形文法との生成能力差は極めて大きく，2形文法の生成能力を高めるために種々の文法が提案された。

このうち，同時導出文法，インデクスト文法，完全並列文法はそれぞれが並列動作を行なう機械をモデルとして提案されたものであり，前二者の関係がある程度研究されている〔10〕。第2節では，完全並列言語族の性質に関して，前章で定義された演算のもとでの閉包性などを検討する。第3節では，完全並列文法にプログラムによる制御を与えた場合の生成言語族を検討するとともに，その形式化という点で類似しているスキャッタードコンテキスト文法のプログラム化についても考察する。そして第4節では，完全並列文法とインデクスト文法などとの関係をもとめ，完全並列言語族が1形言語族の特殊な部分集合であることが示される。

3．2　完全並列言語族の諸性質

本節では，完全並列文法に関して，前節で定義された新演算に関する閉包性などについて考察する。まずRajlich によって明らかにされた2方向有限変換機械と完全並列文法の関係を示す。

〔定義3.1〕　apg $G=(V, \Sigma, P, S)$ の標準形は，

(1)　各ルール $(A_1, \cdots, A_n)\rightarrow(y_1, \cdots y_n)\in P$ に対して，$i\neq j$ ならば，$A_i\neq A_j$ であり，

(2)　2つのルール $(A_1, \cdots, A_n)\rightarrow(y_1, \cdots, y_n)\in P$，$(B_1, \cdots, B_m)\rightarrow(Z_1, \cdots Z_m)\in P$ に対して，$A_1\cdots A_n=B_1\cdots B_m$ か，または各 i，j について $A_i\neq B_j$ であり，

(3)　各ルール $(A_1, \cdots, A_n)\rightarrow(y_1, \cdots, y_n)$ に対して S は $y_1\cdots y_n$ に現われ

ないものをいう。

〔定義3.2〕 2方向非決定性有限変換機械（2nft）Fとは$F=(M, S, K_1)$で与えられる。

ここに，Mは，5対$\mu=(P, a\uparrow b, q, a_1\uparrow b_1, y)$なるルールの集合であり，$p$，$q\in K$，$a$，$b\in X\cup\{\lambda\}$，$ab=a_1b_1$，$y\in Y^*$（$K$は状態集合，$X$は入力記号集合，$Y$は出力記号集合）であるとする。また$S$は初期状態，$K_1$は受理状態である。

Fのコンフィギューレーションは$(p, x\uparrow x', w)$で与えられる。ここに$p\in K$，x，$x'\in X^*$，$w\in Y^*$である。

〔定義3.3〕 2nft $F=(M, S, K_1)$のコンフィギュレーションU，Vと$\mu\in M$に対して$U\underset{\mu}{\vdash}V$とは，$U=(p, xa\uparrow bx', Z)$，$V=(q, xa_1\uparrow b_1x', Zy)$となる$x\ x'\in X^*$，$Z\in Y^*$の存在する時に限るとし，$\overset{*}{\vdash}$を$\vdash$の反射的かつ推移的閉包とする。

もし，Fにおいて$(S, \uparrow x, \lambda)\overset{*}{\vdash}(p, x\uparrow, y)$が$p\in K_1$をみたせば，$x$は$F$に受理され，$y$が$F$によって生成されたといい，$x$の集合を$\Sigma(F)$，$y$の集合を$\Gamma(F)$と記す。

〔定義3.4〕 2方向決定性有限変換機械（2ft）とは，

(1) 各コンフィギュレーションUに対して，$U\underset{\mu}{\vdash}V$となる$\mu\in M$が高々1つであり，

(2) $(p, a\uparrow b, q, a_1\uparrow b_1, y)$で$p\in K_1$なるルールは$M$に存在しない2nftとする。

〔定義3.5〕 左2ft$E=(N, t, L)$とは，xがEに受理され，yがEによって生成されるのは$(t, \uparrow x, \lambda)\overset{*}{\vdash}(P, \uparrow x, y)$が$p\in L$をみたす時とする2ftとする。

以上の定義のもとに，つぎの基本的な性質が成立する。

〔定理3.1〕〔Rajlich〕

(1)　2 ft と左 2 ft によって生成される言語族は等しい。

(2)　2 ft によって生成される言語族は apl の族 ($\widetilde{\mathcal{L}}_{ap}$) に等しい。

〔定義 3.6〕　$x \in V^*$ に対して、$d(x)$ を x より V_T の元をすべて消去してできる語を表わすとするとき、$D: S = x_0 \Rightarrow x_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_k = w$ なる導出に対して，$\mathrm{ind}(D, G) = \max |d(x_j)|$ とし，　$w \in L(G)$ に対して $\mathrm{ind}(w, G) = \min \mathrm{ind}(D, G)$ とする。文法 G が有限指数を持つとは，任意の $w \in L(G)$ に対して，$\mathrm{ind}(w, G) \leq u$ なる自然数 u が存在することとする。言語 L の指数は，$\mathrm{ind}(L) = \min \mathrm{ind}(G)$ とする。

〔定理 3.2〕　Dyck 言語は apg では生成できない。

（証明）　Dyck 言語のインデックスは有限でないが，$L \in \widetilde{\mathcal{L}}_{ap}$ なる L のインデックスは必らず有限であることより自明である。（証明終）

〔例 1〕　apg $G_0 = (\{S\}, \{a, b, c\}, S, P)$，$P = \{(S) \to (SS), (S, S) \to (asb, cs), (S, S) \to (ab, c)\}$ を考えれば，$L(G_0) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ となり，　$L(G_0) \in \widetilde{\mathcal{L}}_1$ である。この例では，そのオーダーが 2 であることは自明であり，オーダー 1 の apg は線形文法であることより，

$\mathcal{L}_l = \mathcal{L}_{ap(1)} \subsetneq \mathcal{L}_{ap(2)}$　が成立する。このことより一般に $\mathcal{L}_{ap(k)} \subsetneq \mathcal{L}_{ap(k+1)}$ の成立が推測でき，次の定理が得られる。

〔定理 3.3〕　$\mathcal{L}_{ap(k)} \subsetneq \mathcal{L}_{ap(k+1)}$ ($k \geq 1$)。

（証明）　$L_{(k)} = \{a_1{}^n a_2{}^n \cdots a_k{}^n \cdots a_{2k}{}^n a^n{}_{2k+1} \mid n \geq 1\}$ を考える（ただし $a_i \neq a_{i+1}$, $1 \leq i \leq 2k$）。明らかに，$L_{(1)} \notin \widetilde{\mathcal{L}}_{ap(1)}$，$L_{(1)} \in \widetilde{\mathcal{L}}_{ap(2)}$ である。

一般に $L_{(k)} \notin \widetilde{\mathcal{L}}_{ap(k)}$ であるが $L_{(k)} \in \widetilde{\mathcal{L}}_{ap(k+1)}$ であることを示せば証明は終わる。

$|w| = (2k+1)m$ なる語 $w = a_1^m a_2^m \cdots a_k^m \cdots a_{2k}{}^m a^m{}_{2k+1}$ が apg(k) によって生成可能とすると，$D: S \underset{G}{\Rightarrow} w_1 \underset{G}{\Rightarrow} w_2 \underset{G}{\Rightarrow} \cdots \underset{G}{\Rightarrow} w_K \overset{\pi}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$，（ここで w_K は，$w_K = B_0\ a_1{}^{m-i_1}\ B_1\ a_2{}^{m-i_2} \cdots\cdots B_{2k}\ a_{2k+1}^{m-i_{2k+1}}\ B_{2K+1}$）なる導出 D が存在する。ただし，$B_i \in V_N \cup \{\lambda\}$ であり高々 k 個の B_i のみが λ ではない。そのような B_i

を $B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \cdots, B_{\nu l}$ ($l \leqq k$, $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_l$)とする。いま $\nu_1 = t$ としておくと，$w_K = a_1^{m-i_1} a_2^{m-i_2} \cdots a_{t-1}^{m-i_{t-1}} a_t^{m-i_t} B_{\nu 1} \cdots\cdots a_{2k+1}^{m-i_{2k+1}} \cdots$ とかけて，π は $(B_{\nu 1}, \cdots, B_{\nu l}) \to (a_t^{i_t} a_{t+1}^{i_{t+1}} \cdots, y_{\nu l})$ とかけるが，このような π によれば $w_K \overset{\pi}{\Rightarrow} w'$ なる w' は w とはならない。$w=w'$ となるには，少くとも $i_1 = i_2 = \cdots = i_{t-1} = 0$ でなくてはならない。ところが w_K が上のような形であれば，いかなるルール π' によっても，$w_K \overset{\pi'}{\Rightarrow} x$ なる $|x| = \{2(k+i)+1\}m$ をみたす語 x の形は $a_1^m a_2^m \cdots a_{l-1}^m a_l^{m+i} a_{l+1}^{m+i} \cdots a_{2k+1}^{m+i}$ となるのみである。したがって apg (k) によって $L(k)$ を生成することはできない。$L(k)$ が apg $(k+1)$ によって生成可能なことは，$G = (\{S\}, \{a_1, a_2, \cdots, a_{2k+1}\}, S, P)$，$P = \{(S) \to (\overbrace{SS \cdots S}^{k+1}), (\overbrace{S, S, \cdots, S}^{k+1}) \to (a_1 S a_2, a_3 S a_4, \cdots, a_{2k-1} S a_{2k}, S a_{2k+1}), (\overbrace{S, S, \cdots S}^{k+1}) \to (a_1 a_2, a_3 a_4, \cdots, a_{2k-1} a_{2k}, a_{2k+1})$ なる apg $(k+1)$ を考えれば，$L(G) = L(k)$ である。(証明終)

〔系 3.1〕 G を apg とすれば，$L(G^0)$, $L(G^+)$ は apl とは限らない。

(証明) $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ は apl である。ところが，$L(G^+) = \{(a^n b^n c^n)^m \mid m \geq 1, n \geq 1\} = L(G^0)$ は前補題より，オーダが有限の apg によって生成することはできないことがわかる。(証明終)

〔系 3.2〕 G_1, G_2 を apg とすれば，$L(G_1) \cap L(G_2)$ は apl である。

(証明) 定理 2.12 と同様に準同形写像をとって，一文字上の apl $h_i(L(G_i))$ の同長語の存在を考えれば，$L \subseteq a^*$ なる apl L は 3 形言語であるため，問題が自明であることが知られる。(証明終)

〔系 3.3〕 G を apg とする $L(G) = \phi$ か有限か無限かは決定可能である。

(証明) G のルール $(A_1, A_2, \cdots, A_n) \to (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対して ($y_1 y_2 \cdots y_n = Z_1 B_1 Z_2 B_2 \cdots Z_m B_m Z_{m+1}$, $B_i \in V - \Sigma$, $Z_i \in \Sigma^*$ とする)，$[A_1 A_2 \cdots A_n] \to [B_1 B_2 \cdots B_m] Z_1 Z_2 \cdots Z_m Z_{m+1}$ ($[A_1 \cdots A_n]$ を一つの変数と考える) なるルールを (これは文献〔3〕と同様な方法である) 作れば，このルール

は左線形文法のルールである。このようにすれば，$L(G)=\phi$か否かの問題は，このようにして構成する左線形文法の生成言語が空か否かに同値であることは明らかであるため，系を得る。（証明終）

〔系 3.4〕 $\tilde{\mathcal{L}}_{ap}$は$\cap$のもとに閉じていない。

（証明） $\tilde{\mathcal{L}}_{l} \subseteq \tilde{\mathcal{L}}_{ap}$であるが，$L_1$，$L_2 \in \tilde{\mathcal{L}}_{l}$に対して$L_1 \cap L_2=\phi$か否かは決定不可能である。$L_3=L_1 \cap L_2$となるaplが存在すると仮定すれば，$L_3=\phi$か否かは決定可能であり，これは矛盾（証明終）

〔系 3.5〕 $\tilde{\mathcal{L}}_{ap}$は補集合をとる演算のもとに閉じていない。

$L(G^{-1})=\{b_1 b_2 \cdots b_n \mid a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n\ b_n\ c \in L(G),\ a_i,\ b_i \in \Sigma,\ c \in \Sigma \cup \{\lambda\}\}$と定義する。

〔定理 3.4〕 Gをapgとすれば$L(G^{-1})$はaplである。

（証明） 証明中xは$x=a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n\ b_n (n \geq 1)$かまたは$x=\Lambda$なる偶数長語を，$y$は$y=a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n\ b_n\ a_{n+1} (n \geq 0)$なる奇数長語を表わすとし，

$\bar{x}=a_1 a_2 \cdots a_n$，$\tilde{x}=b_1 b_2 \cdots b_n$，

$\bar{y}=a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$， $\tilde{y}=b_1 b_2 \cdots b_n$を表わすとする。

$L(G)$を生成する左2f.t.を$E=(N, S, L)$とするとき，つぎのような左2f.t. $E'=(N', S', L')$を構成する。

(1) $S'=S$， $L'=\hat{L} \cup \bar{L}$，

(2) (i) $(S, \uparrow uv, q, u_1 \uparrow v_1, x) \in N$ならば

$(S, \uparrow uv, \hat{q}, u_1 \uparrow v_1, \bar{x}) \in N'$とし$q \in \hat{K}$とする。

(ii) $(S, \uparrow uv, q, u_1 \uparrow v_1, y) \in N$ならば

$(S, \uparrow uv, \bar{q}, u_1 \uparrow v_1, \bar{y}) \in N'$として$q \in \bar{K}$とする。

(iii) ${}^{\forall} p \in \hat{K}$に対して，

$(p, u \uparrow v, q, u_1 \uparrow v_1, x) \in N$ならば$(\hat{p}, u \uparrow v, \hat{q}, u_1 \uparrow v_1, \bar{x}) \in N'$，

$(p, u\uparrow v, q, u_1\uparrow v_1, y)\in N$ならば$(\hat{p}, u\uparrow v, \bar{q}, u_1\uparrow v_1, \bar{y})\in N'$

とする。

(IV) $^{\forall}p\in\bar{K}$に対して，

$(p, u\uparrow v, q, u_1\uparrow v_1, x)\in N$ならば$(\bar{p}, u\uparrow v, \bar{q}, u_1\uparrow v_1, \tilde{x})\in N'$,

$(p, u\uparrow v, q, u_1\uparrow v_1, y)\in N$ならば$(\bar{p}, u\uparrow v, \hat{q}, u_1\uparrow v_1, \tilde{y})\in N'$

とする。

このように構成すれば$a_1b_1a_2b_2\cdots a_n\ b_n\ c\in\Gamma(E)$ならば，$b_1b_2\cdots b_n\in\Gamma(E')$であることを帰納法を用いることにより示すことができる。（証明終）

〔系3.6〕 Lをaplとすれば$L'=\{ww\mid w\in L\}$もaplである。

3．3　プログラム制御をもつ2，3の文法の生成能力

本節では，apg，scg，片側scgにプログラム制御を付与した場合，それぞれの文法によって生成される言語族がどのようなものとなるかに関して簡単に考察する。

〔定義3.7〕 片側scg(oscg)Gは、scgのすべてのルール$(A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n)\to(w_1, \cdots, w_{n-1}, w_n)$において，$A_i=w_i\ (1\leq i\leq n-1)$が成立するものとする。

プログラムドscg（P−scg）Gを，$G=(V, \Sigma, J, P, S)$とする。ここにPは$(r)(A_1, \cdots, A_n)\to(w_1, \cdots, w_n)\ S(V_r)\ F(W_r)$なるルール集合とする。$P$−cfgの場合と同様に，この形のルールがs．f．$x$に適用可能である意味として，(1) $^{\forall}i\ (1\leq i\leq n)$，$x_i\in V^*$，$x_{n+1}\in V^*$の場合，

(2) $^{\forall}i\ (1\leq i\leq n)$，$x_i\in(V-A_i)^*$，$x_{n+1}\in V^*$の場合とし，

(1)の条件のもとでは$L(G)$を$L_f(G)$と，(2)の条件のもとでは$L(G)$を$L_l(G)$と

＊その詳細な定義については，たとえば文献〔14〕を参照。

記す。対応する言語族を$\mathcal{L}^{f}_{p-sc}$, $\mathcal{L}^{l}_{p-sc}$と記す。

プログラムドoscg (P—oscg) についても同様とする。また，P—scg (P—oscg) のすべてのルールに対してそのW_r が空集合 ($^{\forall}{}_{r\in j}$, $W_r=\phi$) ならば，その文法を$\hat{P}$—scg ($\hat{P}$—oscg) と記す。プログラムドapg についても同様に定義するが，apgの定義によって，$L_f(G)=L_l(G)$が成立することに注意されたい。

〔定理 3.5〕 $\mathcal{L}_{osc}$ は AFL^* である。(証明略)

〔補題 3.1〕 $\mathcal{L}^{f}_{\hat{p}-sc} \subseteq \mathcal{L}_{sc}$。

(証明) $\hat{P}$—scg を$G=(V, \Sigma, J, P, S)$とする。scg $G'=(V', \Sigma', P', S')$を$V'=V\cup\{S'\}\cup \hat{J}$, $\Sigma'=\Sigma\cup \hat{J}$とし ($\hat{J}=\{\hat{r}\mid r\in J\}$), $(r_i)(S)\to(w)$ $S(V_{ri})$ $F(\phi)\in P$ ならば, $(S')\to(S\hat{r}_i)\in P$とする。もし，$(r_i)(A_1, \cdots, A_n)\to(w_1, \cdots, w_n)$ $S(V_{ri})$ $F(\phi)\in P$ならば，$(A_1, \cdots, A_n, \hat{r}_i)\to(w_1, \cdots, w_n, \hat{r}_j)\in P'$とする。ここで$r_j\in V_{ri}$とする。(ただし$V_{ri}=\phi$ならば$\hat{r}_j=r_i$に選ぶとしておく。) そして$^{\forall}r_i\in J$, $(\hat{r}_i)\to(r_i)\in P'$ とすれば，$L(G')=L(G)\cdot r_i$ とかける。よって$L_f(G)$ は scl である。(証明終)

〔補題 3.2〕 $\mathcal{L}_{sc} \subseteq \mathcal{L}^{f}_{\hat{p}-osc}$

(証明) scgのルール $(A, B)\to(w_1, w_2)$ に対して，$(r_0)(A, B)\to(A, h(w_2))\,S(r_1)$ $F(\phi)$, $(r_1)(A)\to(h(w_1))$ $S(r_2)$ $F(\phi)$, $(r_2)(\bar{X}, \bar{Y})\to(\bar{X}, Y)\,S(r_3)$ $F(\phi)$, $(r_3)(\bar{X})\to(X)$ $S(J-\{r_i \mid 0\leqq i\leqq 3\})$ $F(\phi)$ とすればよい。ただし，$w_1=Xw_1'$, $w_2=Yw_2'$ ($X, Y\in V-\Sigma, w_1', w_2'\in V^*$) であり，$h(w_1)=\bar{X}w_1'$, $h(w_2)=\bar{Y}w_2'$ であるものとする。(証明終)

〔定理 3.6〕 $\mathcal{L}^{f}{}_{\hat{p}-osc}=\mathcal{L}^{f}_{\hat{p}-sc}=\mathcal{L}^{f}{}_{sc}$ 。

(証明) $\mathcal{L}^{f}{}_{\hat{p}-sc}\supseteq\mathcal{L}^{f}_{\hat{p}-osc}$, $\mathcal{L}^{f}{}_{\hat{p}-sc}\supseteq\mathcal{L}^{f}{}_{sc}$ は自明であり，上記2つの補題より$\mathcal{L}^{f}_{\hat{p}-osc}\supseteq\mathcal{L}_{sc}\supseteq\mathcal{L}^{f}{}_{\hat{p}-sc}$ が成立することより定理を得る。(証明終)

〔補題 3.3〕 $\mathcal{L}^{f}{}_{p-osc}\supseteq\mathcal{L}^{f}{}_{p-sc}$。

(証明) P—scg のルール(r_i) $(A_1, \cdots, A_n)\to(w_1, \cdots, w_n)$ $S(V_{ri})$

$F(W_{ri})$ は文献〔1〕の scg のルールの分解方法と同様にして，$(r_j)(B_1,\ B_2)$ $\to(y_1,\ y_2)\ S(V_{rj})\ F(W_{rj})$ がルールの一般形であるような$P-$scg に変換できる。このルールに対して，補題 3.2 と同様な手法で$P-$oscg を構成すれば，補題の関係が成立することはきわめて容易に認識できる。（証明終）

〔補題 3.4〕 $\mathcal{L}^f{}_{p-sc} \supseteq \mathcal{L}_1$。

（証明） 1形文法Gのルールは一般に，$A\to BC$, $A\to B$, $AB\to CD$ の形式と仮定してよく，Gによる導出は，はじめて$A\to a$（$a\in\Sigma$）が適用される以前はすべて$A\to BC$（$B,\ C\in V-\Sigma$），$AB\to CD$（$C,\ D\in V-\Sigma$）の形式のルールのみが適用され，$A\to a$の適用以後はすべてこの形式のルールが適用されると仮定して一般性を失なうことはない。$AB\to CD$を$P-$scg のルール群によって表現可能なことを示せばよい。そのためには，

(r_0) $(A,\ B)\to(\bar{A},\ \bar{B})$ $S(r_1)$ $F(J)$, (r_m) $(\bar{A},\ A_m,\ \bar{B})\to(\bar{A},\ A_m,\ \bar{B})$ $S(\phi)$ $F(r_{m+1})$を$\forall m(1\leqq m\leqq n)$に対して作る（ただし，$V-\Sigma=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$としている）。そして$(r_{n+1})$ $(\bar{A},\ \bar{B})\to(A,\ B)$ $S(J)$ $F(\phi)$とすればよいことは明らかである。ここに，Jは構成する$P-$scg のラベル集合とする。（証明終）

〔定理 3.7〕 $\mathcal{L}^f{}_{p-osc}=\mathcal{L}^f{}_{p-sc}=\mathcal{L}_1$

（証明） $P-$scg をGとすれば，$L_f(G)\subseteq L_l(G)$ が成立することより，一般に$\mathcal{L}^f{}_{p-sc}\subseteq\mathcal{L}^l{}_{p-sc}$ が成立することは明らかである。前編定理 4.5 により $\mathcal{L}^l_{p-sc}=\mathcal{L}_1$が成立するため，$\mathcal{L}^f_{p-sc}\subseteq\mathcal{L}_1$が成立する。補題 8 より$\mathcal{L}^f_{p-sc}=\mathcal{L}_1$となる。また補題 3.3 より$\mathcal{L}^f{}_{p-osc}=\mathcal{L}^f{}_{p-sc}$が得られることは自明である。（証明終）

〔定理 3.8〕 $\mathcal{L}_{ap}=\mathcal{L}_{pap}$。

（証明） $\mathcal{L}_{ap}\subsetneq\mathcal{L}_{pap}$ は自明であるから，逆を示す。任意の papg Gのルールが，次の〔a〕の形とする。

$(r_i)(A_1, A_2, \cdots, A_n) \to (w_1, w_2, \cdots, w_n) S(V_i)\ F(W_i) \cdots$ 〔a〕

このルールr_iの適用が成功したのち，一連のルール$r_{\nu_1}, r_{\nu_2}, \cdots, r_{\nu_{m-1}}$が適用失敗に終わり，ルール$r_{\nu_m}$がはじめて適用可能であるとするとき，$r_{\nu_m}$を集合$R_i$の要素とする。そのとき，$r_j \in R_i$なるルール$r_j$を

$(r_j)(B_1, B_2, \cdots, B_m) \to (y_1, y_2, \cdots, y_m) S(V_j)\ F(W_j)$とするとき，

〔a〕のルールの右辺にはちょうどm個の$B_1, B_2, \cdots, B_m$がこの順に出現することに注意して，上のルールに対して，ルール

$(r_i, A_2, \cdots, A_n) \to ([w_1], \langle w_2 \rangle, \cdots, \langle w_n \rangle)$を構成する。ここで，$w_l = x_{1,l}\ u_{1,l}\ x_{2,l} \cdots x_{p(l),l}\ u_{p(l),l}\ x_{p(l)+1,l}$

$(x_{i,l} \in V_T^*,\ u_{i,l} \in V_N)$と表わすとき，$[w_1] = x_{1,1}\ r_j\ x_{2,1}\ B_{r(1)} \cdots x_{p(1),1}\ B_{q(1)}\ x_{p(1)+1,1}$, $\langle w_K \rangle = x_{1,k}\ B_{r(k)}\ x_{2,k} \cdots x_{p(k),k}\ B_{p(k)}\ x_{p(k)+1,k}$を意味するとし，かつ$B_2 \cdot B_3 \cdots B_m = B_{r(1)} \cdots B_{q(1)}\ B_{r(2)} \cdots B_{q(2)} \cdots B_{r(k)} \cdots B_{r(k)} \cdots B_{r(n)} \cdots B_{q(n)}$であるものとする。

もし，〔a〕のタイプのルールで$\forall i (1 \leq i \leq n)$に対して，$w_i \in V_T^*$であるならば，上の構成の代わりに，$(r_i, A_2, \cdots, A_n) \to (w_1, w_2, \cdots, w_n)$とする。さらに$(r_i)(S) \to (w) S(V_i)\ F(W_i)$に対しては，$S' \to r_i$を新らしく加える（$S'$は新たに構成しようとしているapg の初期記号）。構成されるapg が，papg の行なう導出をみちびけることが，以上の構成方法によって認識される。（証明終）

3．4　　数種の言語族の相互関係

前章，前節を通じて数種の言語族のいくつかの演算のもとでの閉包性について考察したが，そこで得られた結果を参考にしつつ，$\mathcal{L}_{ap}$と$\mathcal{L}_{sc}$，インデクスト文法による言語族，同時導出２形言語族の関係について，ごく簡単に検討を行なう。

〔定義 3.8 〕 I_0 文法は，つぎのような５組$G = (V, \Sigma, F, P, S)$をいう。

(1) $V=V_p \cup V_f \cup \Sigma$ なる有限集合

(2) Σ は有限集合

(3) F は

$$N \to \psi \,;\, N \in V_f,\ \psi \in (V_f \cup \Sigma)^*$$

なる形のフラッグ（または，インデスクルール）と呼ばれる書き換え規則の集合であり， $f \in F$, f :〔$A_1 \to w_1, \cdots, A_n \to w_n$〕に対して $i \neq j$ ならば $A_i \neq A_j$ とする。

(4) P は $A \to M\,;\, A \in V_p,\ M \in V_f$

および， $A \to B_f\,;\, A, B \in V_p,\ f \in F$

なる形の書き換え規則（ルール）の集合

この文法における導出は，つぎのように定義される。$\alpha \Rightarrow \beta$ であるとは，つぎの(I)，(II)のいずれかが成立するとき，そのときに限る。ただし，α，β，γ，$\delta \in ((V-\Sigma)F^* \cup \Sigma)^*$，$\zeta$，$\theta \in F^*$

(I) $\alpha = \gamma A \delta$

$A \to X\eta \in P\,;\, \eta \in F$ または， $\eta = \lambda$

$\beta = \gamma X \eta \delta$

(II) $\alpha = \gamma A f \zeta \delta$

$A \to X_1 X_2 \cdots X_k$; F 中のフラッグ

$\beta = \gamma X_1 \theta_1 X_2 \theta_2 \cdots X_k \theta_k \delta$

ただし，$X_i \in V_f$ のとき　$\theta_i = \zeta$
　　　　$X_i \in \Sigma$ のとき　$\theta_i = \lambda$　　$(1 \leq i \leq k)$

$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n$ を導出と呼び Σ のみの系列が現われたとき，導出は終了する。

I_0 文法は明らかにインデクスト言語族の部分クラスである。*

〔定理 4〕〔鳥居〕 同時導出 cfpg は，I_0文法と等価である。

〔定義 3.9〕 $\hat{I}_0$ 文法とは，$|V_p|=1$ であり，ただ1つの i を除いて $w_j=A_j$ である I_0文法とする。

I_1 文法とは，$|V_p|=1$ であるが，$^{\forall}f\in F$ に対して，f：〔$A_1\to w_1$, …, $A_n\to w_n$〕 中に同じ A_i が何度出現してもよいような I_0形式の文法とする。

I_1文法とは，$|V_p|=1$ であるような I_0文法とする。

〔定理 3.9〕 $\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{I}_0}$ と同時導出2形言語族は等価である。

（証明） 同時導出2形文法 $G=(V, \Sigma, P, S)$ に対して，

$\hat{I}_0$ 文法 $G'=(V', \Sigma, F, P', S')$ をつぎのように構成する。

$V'=V\cup\{S'\}$, C を $C: P\to\{n \mid 1\leq n\leq |P|\}$ なる関数とするとき $F=\{C(A\to\alpha) \mid A\to\alpha\in P\}$ として，

P' を $S'\to S'_{C(A\to\alpha)}$, $S'\to S$ とし，

F を $C(A\to\alpha)$：〔$A\to\alpha$, $B_1\to B_1$, …, $B_{n-1}\to B_{n-1}$〕とする。

ただし，$A\neq B_i$ かつ $i\neq j$ ならば $B_i\neq B_j$ とする。

逆に，$\hat{I}_0$ 文法 $G=(V, \Sigma, F, P, S)$ が与えられたとき，各 $f\in F$ 中の $A\to\alpha$ なるルールを持つ同時導出2形文法を構成すればよい。（証明終）

〔定理 3.10〕 $\tilde{\mathcal{L}}_{ap}\subsetneqq\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{I}_1}$

（証明） 標準形の apg $G=(V, \Sigma, P, S)$ に対して，$\hat{I}_1$ 文法 $G'=(V', \Sigma, F, P', S')$ を

$V'=\{S'\}\cup V$, $F=\{[(A_1, \ldots, A_n)\to(w_1, \ldots, w_n)] \mid (A_1, \ldots, A_n)\to(w_1, \ldots, w_n)\in P\}$ として，

P' を $S'\to S'_{[(A_1, \ldots, A_n)\to(w_1, \ldots, w_n)]}$, $S'\to S$ とし，

F を $[(A_1, \ldots, A_n)\to(w_1, \ldots, w_n)]$：〔$A_1\to w_1$, …, $A_n\to w_n$〕とすれば，

$L_{ap}\subseteq L_{\hat{I}_1}$ は自明であり，いっぽう，$P=\{S'\to S'_{f_i}, S'\to S \mid 1\leq i\leq 3\}$

---

* 詳細なインデクスト文法の定義は文献〔11〕を参照。

f_1：〔$S\rightarrow A$〕，f_2：〔$A\rightarrow AA$〕，f_3：〔$A\rightarrow a$〕なるI_1文法を考えれば，その生成語は$\{a^{2^n} \mid n\geq 0\}$となり，これは$\mathcal{L}_{ap}$に属さない。（証明終）

〔系 3.7〕 $\mathcal{L}_{\hat{I}_1} \subsetneqq \mathcal{L}_{I_1}$

（証明） $\mathcal{L}_2 \subsetneqq \mathcal{L}_{I_1}$であるが，$\mathcal{L}_{\hat{I}_1}$にはDyck言語は属し得ぬことが文献〔10〕の〔補題3〕と同様な手法を用いて証明できる。

$\mathcal{L}_p$ をプログラムド2形言語の族を表わすとする。

〔系 3.8〕 $\mathcal{L}_{ap} \subsetneqq \mathcal{L}_{sc}$, $\mathcal{L}_{ap} \subsetneqq \mathcal{L}_p$

（証明） $\mathcal{L}_{ap} \subseteq \mathcal{L}_{sc}, \mathcal{L}_{ap} \subseteq \mathcal{L}_p$は，apgの標準形を考えれば自明であり，真なる包含関係は，前章と本章の演算○，＋のもとでの言語族の閉包性より明白である。（証明終）

〔系 3.9〕 $\mathcal{L}_{ap} \cup \mathcal{L}_2 \subsetneqq \mathcal{L}_{sc} \cap \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{I_0}$

3．5　結　　言

完全並列文法を中心に二，三の文法の生成能力を検討した。完全並列言語族がそれ自身の中に無限の階層を有しており，文法のプログラム制御によってその言語族は変化せぬことを示した。また，完全並列言語族は2形言語族とは包含関係を持たないが，プログラムド言語族，インデクスト言語族の真部分集合，スキャッタードコンテキスト文法の共通集合に真に含まれる特殊な言語族であることが判明した。

本章で定義された片側スキャッタードコンテキスト文法の諸性質，片側1形文法〔9〕との関係などについては，スキャッタードコンテキスト文法と1形文法との関係解明と同様，今後検討すべき問題である。

第四章　結　論

本編では，一次元構造を記述する種々の文法によって生成される言語族に対して定義可能な演算のもとでの閉包性の検討，二，三の言語族の比較検討を行なった。

今日の形式文法研究の流れは，Ginsburgらによって提案された*AFL*にどのような言語族が属するかといった方向にある。*AFL*演算には∩が入っていないのを考慮して最近は∩のもとに閉じている最小の*AFL*の研究も行なわれているが，こうした数学的すぎる考察よりもむしろ，現実問題のモデルとして提案された種々の文法に対して現実問題を背景にもつ演算のもとでの閉包性を検討することによって，各言語族の比較を検討することこそ重要なことである。

第２章では，このような基盤にたっていくつかの演算のもとでの閉包性を検討した。しかし本章で考察の対象に選ばれた文法は，今日までに提案されている文法の一部にすぎず，考察対象を拡張することが今後必要であり，この研究を通じて未解決な問題点の解決，新たな問題の提起が期待される。

第３章では，上記文法より特に完全並列文法を選び，同様な立場で定義された文法との関連を検討し，完全とはいえぬが，ある程度の関係をもとめた。本章で議論対象として選ばれた文法はこれまであまり考察されておらないものであり，よく研究されて来た文法との比較検討を今後行なってゆく必要があると考えられる。

結　　論

第１編，第２編を通じて，構造記述文法の記述能力の検討を行なった。特に第１編では、最も一般的な関係記述文法の記述能力を検討し，第２編では構造を一次元系列に限定した場合の問題点に関して考察を行なった。

各編の結論において，各編で得た成果，今後の課題等について述べたので，ここでは総括的問題について述べる。

本論文は，関係記述文法に関する諸問題の理論的解明をその第一義的目的としており，現実に存在する諸問題を抽象化した一モデルを取り扱った情報科学の名で呼ばれる学問分野に属するものである。いっぽう，我々がモデル化を行なった対象それぞれに関する具体的な問題解決に必要な技術は計算機科学に属しているといえる。現在これら両者の距離は近いものだとはいえない。本論文で考察したウエッブ文法が，図形処理，データ構造の管理のモデルを記述し得る点で密接な関係を有することはすでに述べた。しかし，具体的な議論は本論文に記述することができなかった。今後我々にとって必要なことは，このようなモデルで得られた成果を具体的問題解決にいかに利用してゆくかを積極的に考察することである。

この目的完遂のためには，情報科学および計算機科学を含む広い学問的視野に立って，解決を必要とされている問題を実際に経験として知ることが必要である。

本論文によって得られた理論的成果を背景として，図形処理，データベース管理に内在する諸問題点の解明を今後行なってゆかねばならないと考えている。

謝　　　辞

本研究に関して，直接，懇切なる御指導をいただき，励ましていただいた田中幸吉教授に衷心より御礼申し上げます。

大学院修士および博士課程において，御教示御指導いただいた情報工学科，木沢誠教授，藤沢俊男教授，嵩忠雄教授，電気工学科，牧本利夫教授，藤沢和男教授，難波進教授，末田正教授，ならびに制御工学科，辻三郎教授に対して心から深謝します。

また，研究の全過程において終始，適切な御助言，御討論いただいた豊田順一助教授に心から感謝の意を表わします。

さらに，志村正道助教授，都倉信樹助教授，的場進助教授の御指導，御討論に心より感謝いたします。

第1編，第2編を通じ，数々の御教示，御助言を頂いた田中研究室の水本雅晴工学博士，北橋忠宏工学博士および田村進一工学博士に厚く感謝いたします。

また，修士および博士課程を通じ，ともに研究し励ましあって来た学友である落水浩一郎氏，辻秀一氏，竹内昭浩氏らの有益な御助言，御討論に対し心より感謝します。

さらに，筆者の在学中，種々の面で御協力いただいた田中研究室の方々，ことに，江沢義典氏，金孝行氏，三上和敬氏，山本順人氏に対して心よりの感謝の意を表します。

文　　献

第1編に関する文献

(1) R. A. Kirch: "Computer interpretation of English text and picture patterns", IEEE Trans., vol EC−13, p. 363(Aug. 1964).

(2) R. Narasimhan: "Labeling schemata and syntactic descriptions of pictures", Inf. & Cont., vol. 7, p. 151(1964).

(3) W. F. Miller and A. C. Shaw: "Linguistic methods in picture processing—a survey", Proc. FJCC, p. 279, (Dec. 1968).

(4) A. C. Shaw: "A formal picture description scheme as a basis for picture processing systems", Inf. & Cont., vol. 14, p. 9(1969)

(5) M. F. Dacey: "The syntax of a triangle and some other figures", Pattern Recognition, vol. 22, p. 11(1970)

(6) 淀川，本多："2次元図形生成文法の性質"，信学会オートマン研資（昭44−06）

(7) 淀川，本多："二次元図形生成文法について"，信学論(C), vol. 53−C, 3, p. 141（昭45−03).

(8) J. L. Pfaltz and A. Rosenfeld: "Web grammars", Proc. Inter. J. C. on Artificial Intelligence, Washington, D, C., p. 609, (May 7−9, 1969).

(9) U. G. Montanari: "Separable graphs, planar graphs and web grammars", Inf. & Cont. vol. 16, p. 243(1970)

(10) J. Feder: "Languages of encoded line Patterns", Inf. and Cont. vol. 13, p. 230. (1968),

(11) 安部，水本，豊田，田中："ウエッブ文法と2・3のグラフ"，信学論(C), vol. 54−C, №12, p. 1149（昭46−12).

(12) 安部，水本，豊田，田中："ウエッブ文法によるグラフの表現"，情報処理，vol. 13, №7, p. 452（昭47−07).

(13) 安部，水本，豊田、田中：“非正規ウエッブ文法に関して”，信学論(D) vol. 56—D, №2, p. 123 (昭48—03).
(14) 江沢，安部，水本，豊田，田中：“ウエッブ文法とウエッブオートマトン”，信学論(A), vol. 56—A, №4, p. 234 (昭48—04).
(15) 安部，江沢，水本，豊田，田中：“分離可能なウエッブを生成するウエッブ文法”，信学論(D), vol. 55—D, №4, p. 294 (昭44—04).
(16) J. E. Hopcroft, J. D. Ullman: “Formal languages and their relation to automata,” Addison Wesley Publishing Company.
(17) S. Greibach and J. Hopcroft: “Scattered centext grammars”, JCSS, vol. 3, p. 233 (1969).
(18) D. Milgram, A. Rosenfeld: “A note on scattered context grammars”, Inf. Proces. Letters, vol. 1, p. 47 (1971).
(19) A. Rosenfeld and D. Milgram: “Web automata and web grammars”, U. of Maryland, TR. —181, (March. 1972).
(20) D. Milgram: “Web automata”, U. of Maryland, TR. —72—182 (April, 1972).
(21) K. Tori, Y. sugito, Y. Mano: “GMS/I: An interactive graph manipulation system”, 1st USA—Japan Computer Conference, proceeding, p. 593. (1972)
(22) 鳥居，杉藤，真野：“グラフ処理用二次元言語GMLとその機能について”，信学会オートマトン研資(昭48—01).
(23) 鳥居，有沢：“同時導出による句構造言語”，信学論(C), vol. 54—C, 2, p. 124 (昭46—02).
(24) D. J. Rosenkrantz: “Programmed grammars and classes of formal languages”, J. ACM, vol. 16, 1, p. 107 (Jan. 1969).
(25) S. Y. Kuroda: “Classes of languages and linear bounded automata”, Inf. & Cont., vol. 7, p. 207 (1964).
(26) W. E. Underwood, L. N. Kanal: “Structual description. trans-formational rules, and pattern analysis” 1st Int'l Conf. on pattern Recognition, p. 434 (1973)

(27) 伊藤，稲垣，福村： "片側文脈規定形文法について"，信学論(D), vol. 55-D, №9, p. 609 (昭47-09).

(28) 伊藤，稲垣，福村： "文脈規定形文法の導出木の特性化—分散文脈規定形木生成システム—"，信学論(D), vol. 56-D, №3, p. 178 (昭48-03).

(29) A. L. Rosenberg: "Data graphs and addressing schemes", JCSS, vol. 5, p. 193 (1971).

(30) F. Harary: Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company. (1969).

(31) H. Whitney: "Non-separable and planar graphs", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 34, p. 339 (1932).

(32) N. Abe, M Mizumoto, J Toyoda and K. Tanaka, : "Web grammars and several graphs", J of Comput. system Sci. vol. 7, p. 37 (1973)

(33) K Tanaka, J, Toyoda and N. Abe: "Some studies on web grammars", 1st Int'l. Conf. on pattern Recognition, washington D. C. p. 433 (October, 1973)

第2編に関する文献

(1) S. Greibach and J. Hopcroft: "Scattered context grammars", JCSS, vol. 3, p. 233 (1969).

(2) D. J. Rosenkrantz: "Programmed grammars and classes of formal languages", JACM, vol. 16, p. 107 (1969).

(3) V. Rajlich: "Absolutely parallel grammars and two way finite-State transducers", JCSS, vol. 6, p. 325 (1972).

(4) E. Moriya: "Associate languages and derivational complexity of formal grammars and languages", Inf. & Cont. vol. 22, p. 139 (1973)

(5) S. Y. Kuroda: "Classes of languages and linear bounded automata", Inf. & Cont., vol. 7, p. 207, (1964).

(7) 谷口，嵩："二次元テープオートマトンに関するいくつかの決定問題"，信学論(C), vol. 54-C, 7, p. 578 (昭46-07).

(8) 野下，高岡："文脈自由言語の木の高さについて"，信学論(D), vol. 54-D, 5, p. 298 (昭48-05).

(9) 伊藤，稲垣，福村："片側文脈規定形文法について"，信学論(D), vol. 55-D, 9, p. 609 (昭47-09).

(10) 鳥居，有沢："同時導出による句構造言語"，信学論(C), vol. 54-C, 2. p. 124 (昭46-02).

(11) A. V. Aho: "Indexed grammars—an extension of context-free grammars" J. ACM, vol. 15, 4, p. 647 (Oct. 1968).

(12) S. Cinsburg: "The mathematical theory of context-free languages", McGraw-Hill, New York (1966).

(13) I. Fris: "Grammars with partial ordering of the rules", Inf. & Control., vol. 12, p. 415 (1968).

(14) S. Ginsburg and E. H. Spanier: "Control sets on grammars", Math. Sys. Theory, vol. 2, p. 157 (1968).