



Title	Study on commutative ring-theoretic and algebro-geometric properties of toric rings via combinatorics
Author(s)	松下, 光虹
Citation	大阪大学, 2024, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/98626">https://doi.org/10.18910/98626</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 論文内容の要旨

氏名 ( 松下 光虹 )	
論文題名	Study on commutative ring-theoretic and algebro-geometric properties of toric rings via combinatorics (組合せ論を用いたトーリック環の可換環論的及び代数幾何的性質の研究)
<p><b>論文内容の要旨</b></p> <p>トーリック環は多面体及び多面錐などの組合せ論的対象から生起する可換代数であり、組合せ論はもちろん、可換環論や代数幾何学、表現論など、様々な分野において興味を持たれている対象で、それぞれの観点から多種多様な研究が行われている。特に、トーリック環は可換環論的及び代数幾何的な良い性質を豊富に満たし、一般に、具体的に求めることが困難な不变量も容易に計算できる場合があるため、その意味で貴重な存在であると言える。本学位論文では、トーリック環の可換環論的及び代数幾何的性質の組合せ論的視点を通じた研究を遂行している。具体的にはトーリック環の「因子類群」、「Gorenstein性の一般化」、「conic因子的イデアルと非可換クレバント特異点解消」の3つに焦点を当てて研究が展開されている。</p> <p>トーリック環の因子類群は有限生成アーベル群であり、多面錐に含まれている格子点とその多面錐の面の情報を用いて記述することができる。後で説明するように、因子類群は非可換クレバント特異点解消の構成に応用出来ることが知られているが、その上で因子類群がねじれ自由であるかどうかが非常に重要な問題になる。本学位論文では、整凸多面体のトーリック環の因子類群がねじれ自由になるための十分条件を与え、系として、圧搾凸多面体から生起するトーリック環の因子類群はねじれ自由になることを示した。また、因子類群に着目した研究として、因子類群の階数が小さい日比環、安定集合環、エッジ環の3つのトーリック環の間の関係性を考察し、階数が2以下の場合は、これを完全に解明した。さらに、これらのクラスを含む(0,1)凸多面体に付随するトーリック環に拡張した場合も、その因子類群の階数が小さくなる場合に、そのトーリック環がどのような構造を持つのかについての様々な結果を与えた。</p> <p>可換環論において、Gorenstein性は非常に重要な性質であるが、近年、その一般化が様々な背景のもとで導入されており、その理論が発展している。本学位論文では、特に、level性、almost Gorenstein性、nearly Gorenstein性に着目し、トーリック環がいつ、そのような性質を持つかについて議論している。具体的には完全多部グラフのエッジ環がいつlevel、及び、almost Gorensteinになるかを完全に特徴づけた。また、多面体から生起するトーリック環を含む次数付き環について、その重複度を用いた条件から、almost Gorensteinになるための条件を導いた。さらに、トーリック環の一種である整凸多面体のEhrhart環がnearly Gorensteinになるための必要条件、十分条件を与え、(0,1)凸多面体においては完全な特徴づけを与えることに成功した。</p> <p>可換環の因子類群の各元は因子的イデアルの同型類に対応するが、トーリック環の場合、その中でもconic因子的イデアルと呼ばれる性質の良い加群が近年注目されている。実際、この加群は非可換クレバント特異点解消を構成するのに用いられるなど、可換環論の範疇にとどまらない重要な役割を担っていることが判明している。本学位論文では、与えられたトーリック環の因子類群の元の中で、conic因子的イデアルに対応する格子点を記述する領域を決定するためのアイデアを与え、それを用いて完全多部グラフのエッジ環と日比環、安定集合環でそれを実際に決定した。さらに、その結果を用いて、エッジ環と安定集合環のある特殊なクラスで非可換クレバント特異点解消をconic因子的イデアルを用いて構成することに成功した。</p>	

## 論文審査の結果の要旨及び担当者

氏 名 ( 松 下 光 虹 )	
	(職) 氏 名
論文審査担当者	主査 準教授 東谷 章弘 副査 教授 杉山 由恵 副査 教授 降幡 大介 副査 準教授 中嶋 祐介 (京都産業大学)

## 論文審査の結果の要旨

松下光虹氏は本論文において、多面体や多面錐に付随する『トーリック環』と呼ばれる対象に対し、代数的に重要な様々な性質の解明や例の構成について取り組んでいる。具体的には、トーリック環の

- (1) 因子類群の構造の解析
  - (2) Gorenstein性の一般化に関する議論
  - (3) conic因子的イデアルを用いた非可換クレバント特異点解消の構成
- の上記3課題が本論文の主題である。

(1) では、トーリック環の因子類群がどのような条件下で“ねじれ自由”になるか?という問いや、トーリック環の因子類群のランクが小さい時のトーリック環の構造の決定などに取り組んでいる。具体的には、(0,1)多面体に付随するトーリック環がねじれ自由になる十分条件を求めている。また、因子類群の階数が1以下になるような(0,1)多面体に付随するトーリック環の特徴付け、および、階数が3以上の場合にねじれ自由にならない例の構成など、様々な成果を挙げている。

(2) では、あるクラスのトーリック環に対し、Gorenstein性の一般化として知られるlevel性・almost Gorenstein性・nearly Gorenstein性などについて議論している。例えば、完全多部グラフに付随するエッジ環と呼ばれるクラスに対し、level性とalmost Gorenstein性を特徴付けることで、Gorenstein性との乖離を議論している。また、(0,1)多面体に付随するトーリック環がnearly Gorensteinになる必要十分条件を多面体の言葉で記述している。

(3) では、日比環や安定集合環などの特定のクラスの((0,1)多面体に付随する)トーリック環に対し、そのconic因子的イデアルの集合を記述している。さらにその応用として、例えば、ある特定のグラフに付随する安定集合環に対し、そのconic因子的イデアルをうまく取り出すことにより、非可換クレバント特異点解消を構成している。

上記の研究成果は、当該分野における研究の進展に大きく寄与するものであり、高く評価できる。これを踏まえ、本論文を博士（理学）の学位論文として相応しいものと認める。