Grenier, J-P
Osaka J. Math.
32 (1995), 799-815

REPRÉSENTATION DISCRÈTE DES DISTRIBUTIONS STANDARDS

JEAN-PIERRE GRENIER

(Received October 4, 1993)

On se place dans un modèle non standard de l'analyse. On utilisera le vocabulaire et les notations de la théorie IST de Nelson tels qu'ils sont présentés dans le livre [1] de F. Diener et G. Reeb. Le vocabulaire introduit dans la définition 1 est à rapprocher de celui utilisé par M. Oberguggenberger dans [6] et K. D. Stroyan dans [8].

Les notations $\mathscr{D}$ ensemble des fonctions C^∞ à support compact, $\mathscr{D}'$ dual topologique de $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ ensemble des fonctions C^∞, $\mathscr{E}'$ dual topologique de $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$ ensemble des fonctions C^∞ qui pour tout entier $p>0$ tendent vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées plus vite que $\|x\|^{-p}$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, $\mathscr{S}'$ le dual topologique de $\mathscr{S}$ sont les notations habituellement utilisées dans la théorie des distributions ; voir par exemple Schwartz [7].

1. Notations

Soit n un entier naturel standard. On note $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\boldsymbol{R}^n$. Soit un élément $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}^n$, sa norme $\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ est notée $|x|$; sa norme euclidienne $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ est notée $\|x\|$. Pour tout réel positif k, on pose $(|x|\leq k)=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid |x|\leq k\}$ et $(\|x\|\leq k)=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid \|x\|\leq k\}$. Soit $f:\ \boldsymbol{R}^n\longrightarrow\boldsymbol{C}$ une application interne et $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ un multi-entier ; on note $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ (longueur de α) ; la notation $\partial^\alpha f$ désigne, (si elle existe), la dérivée : $\dfrac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\cdots\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}f$.

On considère :

Un entier illimité pair ω et on pose $\varepsilon=\dfrac{1}{\omega}$.

Le réseau de maille ε : $\boldsymbol{L}=\{\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon e_i \mid x_i\in\boldsymbol{Z}\}$, et la partie hyperfinie

$$X=\{x\in \boldsymbol{L} | x=\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon e_i \text{ et } \frac{-\omega}{2} \leq \varepsilon x_i < \frac{\omega}{2}, \ \forall i\in\{1, 2, \cdots, n\}\}.$$

On remarque que X s'identifie naturellement au groupe fini $(\boldsymbol{Z}/\omega^2\boldsymbol{Z})^n$ et que Card $X=\omega^{2n}$. L'ensemble $R(X)=\{f: X\longrightarrow \boldsymbol{C} | f \text{ est interne}\}$; on prolonge les fonctions de $R(X)$ à $\boldsymbol{L}$ par périodicité.

Soit $f\in R(x)$. Pour $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$, on pose :

$$D_{i+}f(x)=\frac{f(x+\varepsilon e_i)-f(x)}{\varepsilon} \text{ et } D_{i-}f(x)=\frac{f(x)-f(x-\varepsilon e_i)}{\varepsilon}.$$

On voit que $D_{i-}f(x)=D_{i+}f(x-\varepsilon e_i)$.
Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, on notera plus simplement $D_i f$ au lieu de $D_{i+}f$. Par récurrence, on définit pour tout entier j,

$$D_i^{j+1}f(x)=D_i(D_i^j f(x)) \quad (\text{resp. } D_{i-}^{j+1}f(x)=D_{i-}(D_{i-}^j f(x))).$$

Il est facile de voir que pour tous entiers naturels i, j, on a : $D_i\circ D_j=D_j\circ D_i$ (resp. $D_{i-}\circ D_{j-}=D_{j-}\circ D_{i-}$), de sorte que la différence successive $D_{i_1+}\circ D_{i_2+}\circ\cdots\circ D_{i_m+}$ ne dépend pas de l'ordre des entiers $i_1, i_2, \cdots, i_m$ de l'intervalle $\{1, 2, \ldots, n\}$; pour tout multi-entier $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, on pourra donc définir $D^\alpha f(x)=D_1^{\alpha_1}\circ D_2^{\alpha_2}\circ\cdots\circ D_n^{\alpha_n}$ (resp. $D_-^\alpha=D_{1-}^{\alpha_1}\circ D_{2-}^{\alpha_2}\circ\cdots\circ D_{n-}^{\alpha_n}$). Les applications $f\longmapsto D^\alpha f$ et $f\longmapsto D_-^\alpha f$ sont des endomorphismes de $R(x)$. Lorsque g est une application interne de $\boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{C}$, pour tout multi-entier α, on écrira $D^\alpha g$ au lieu de $D^\alpha(g_{|X})$.

Pour tout réel positif k et tout n-entier α, on pose $|D^\alpha f|_k=\max\{|D^\alpha f(x)| \,|\, |x| \leq k\}$.

Règle de différentiation d'un produit.
Soient f et g deux fonctions de $R(X)$; pour tout $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$, on a :

$$D_i(f\cdot g)=f\cdot D_i g+g\cdot D_i f+\varepsilon D_i f\cdot D_i g.$$

DÉFINITION 1. Pour toute fonction $f\in R(X)$, on dira que
(1) f est à support limité lorsque $\exists^{st} k\in\boldsymbol{N}$, $|x|>k \Longrightarrow f(x)=0$.
(2) f est à différences limitées lorsque $\forall^{st} k\in\boldsymbol{N}$, $\forall^{st}\alpha\in\boldsymbol{N}^n$, $|D^\alpha f|_k$ est limité.
(3) f est à différences infinitésimales lorsque $\forall^{st}k\in\boldsymbol{N}$, $\forall^{st}\alpha\in\boldsymbol{N}^n$, $|D^\alpha f|_k\sim 0$.
(4) f est une fonction de Schwartz lorsque $\forall^{st}\alpha\in\boldsymbol{N}^n$, $\forall^{st}p\in\boldsymbol{N}$, $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x)$ est limité sur X.
(4′) f est une fonction de Schwartz infinitésimal lorsque $\forall^{st}\alpha\in\boldsymbol{N}^n$, $\forall^{st}p\in\boldsymbol{N}$, $\forall x\in X$, $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x)\sim 0$.

DÉFINITION 2. On dit qu'une application $f\in R(X)$ est :
une fonction-test limitée lorsqu'elle satisfait les conditions (1) et (2).
une fonction-test infinitésimale lorsqu'elle satisfait les conditions (1) et (3).
On notera :

D l'ensemble des fonction-test limitées.
I l'ensemble des fonction-test infinitésimales.
E l'ensemble des fonctions à différences limitées.
S l'ensemble des fonctions de Schwartz.
J l'ensemble des fonctions de Schwartz infinitésimales.

Pour $f, g \in R(X)$, on écrira $f \sim_D g$ pour dire que $f-g \in I$ et $f \sim_S g$ pour dire que $f-g \in J$. On a les inclusions $I \subset D \subset S \subset E \subset R(X)$ et $I \subset J \subset S$.

Remarquons que dans la définition d'une fonction-test limitée (resp. infinitésimale) ou d'une fonction de Schwartz, on peut remplacer $D^\alpha f$ par $D^{\underline{\alpha}} f$. D'autre part, l'ensemble des fonctions de Schwartz n'est autre que $S=\{f \in E \mid \forall^{st} \alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ \forall^{st} p \in \boldsymbol{N},\ \|x\|^p D^\alpha f$ est limité sur $X\}$.

Formule de Leibniz. Soient $f, g \in E$ (resp. $f, g \in S$) ; pour tout multi-entier standard α et pour tout $x \in X$ limité, (resp. pour tout $x \in X$) on a la règle de Leibniz à un infinitésimal près :

$$D^\alpha(f \cdot g)(x) \sim \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f(x) \cdot D^{\alpha-\beta} g(x). \tag{5}$$

Pour prouver ce résultat, on vérifie par récurrence sur $|\alpha|$ que

$$D^\alpha(f \cdot g)(x) \sim \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f(x) \cdot D^{\alpha-\beta} g(x) + \varepsilon P. \tag{5'}$$

où P est un polynome standard à coefficients entiers des $(2^{|\alpha|+1})^2+1$ variables internes ε et $D^\beta f(x) \cdot D^{\beta'} g(x)$ où $0<|\beta| \leq |\alpha|$ et $0<|\beta'| \leq |\alpha|$.

Lemme 1. *Soit g une fonction standard, on a les assertions suivantes :*
(i) *Si $g \in \mathscr{E}$ alors $g_{|X} \in E$, de plus pour tout multi-entier α standard et tout $x \in X$ limité, on a $D^\alpha g(x) \sim \partial^\alpha g(x)$.*
(ii) *Si $g \in \mathscr{S}$ alors $g_{|X} \in S$, de plus pour tout multi-entier α standard, tout entier p standard et tout $x \in X$, on a $\|x\|^p D^\alpha g(x) \sim \|x\|^p \partial^\alpha g(x)$.*
(iii) *Si $g \in \mathscr{D}$ alors $g_{|X} \in D$, de plus pour tout multi-entier α standard et tout $x \in X$, on a $D^\alpha g(x) \sim \partial^\alpha g(x)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour g à valeurs réelles. En appliquant n fois la formule de Taylor avec reste de Lagrange, on montre que pour tout $x \in X$ on a

$$D_1^{\alpha_1} \circ D_2^{\alpha_2} \circ \cdots \circ D_n^{\alpha_n} g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} g(x+\varepsilon(\theta_1 e_1+\theta_2 e_2+\cdots+\theta_n e_n)) \tag{6}$$

avec $\theta_i \in (0, \alpha_i)$.

(i) En utilisant la continuité de $\partial^\alpha g$, on obtient $|D^\alpha g(x)-\partial^\alpha g(x)| \sim 0$ pour tout x limité.

(ii) La fonction standard $\|x\|^p\partial^\alpha g$ est continue sur $\boldsymbol{R}^n$ et tend vers 0 à l'infini, elle donc uniformément continue sur $\boldsymbol{R}^n$, on en déduit que $|\|x\|^p D^\alpha g(x) - \|x\|^p\partial^\alpha g(x)| \sim 0$ pour tout $x \in X$.

(iii) Si x n'est pas dans le support de g, on a $g_{|X}(x)=0$ donc $g_{|X}$ est à support limité. En utilisant (i) on a $|D^\alpha g(x) - \partial^\alpha g(x)| \sim 0$ pour tout x limité. Si x est illimité, on a $D^\alpha g(x) = \partial^\alpha g(x) = 0$.

Lemme 2. *Soit $f \in R(X)$. Pour tout $i \in I$, on a $f \in D \Longleftrightarrow f+i \in D$. Pour tout $j \in J$, on a $f \in S \Longleftrightarrow f+j \in S$. Pour toute fonction $i \in R(X)$ à différences infinitésimales, on a $f \in E \Longleftrightarrow f+i \in E$.*

Evident...

Lemme 3. *Soit g une fonction standard de $\mathcal{D}$. Pour tout multi-entier standard α, $D^\alpha g$ est une fonction-test limitée et $D^\alpha g_{|X} \sim_D \partial^\alpha g$.*

Démonstration. Daprès le lemme 1, $(\partial^\alpha g)_{|X} \in D$. Pour tout $x \in X$, posons $i(x) = D^\alpha g(x) - \partial^\alpha g(x)$; la fonction i est à support limité. Considérons un multi-entier standard β et un élément x limité de X. On a :

$$
\begin{aligned}
D^\beta i(x) &= D^\beta(D^\alpha g(x)) - D^\beta(\partial^\alpha g(x)) \\
&= (D^{\beta+\alpha} g(x) - \partial^{\beta+\alpha} g(x)) + (\partial^{\beta+\alpha} g(x) - D^\beta \partial^\alpha g(x))
\end{aligned}
$$

Or d'après le lemme 1 appliqué à g, on a $(D^{\beta+\alpha} g(x) - \partial^{\beta+\alpha} g(x)) \sim 0$; en appliquant ce même lemme à $\partial^\alpha g$, on a $(\partial^{\beta+\alpha} g(x) - D^\beta \partial^\alpha g(x)) \sim 0$. Ainsi $i \in I$; en appliquant le lemme 2, on obtient le résultat.

Proposition 1. *Soit $f \in R(X)$. Une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit une fonction-test limitée est qu'il existe $g \in \mathcal{D}$ telle que $g_{|X} \sim_D f$.*

Démonstration. La suffisance provient de l'assertion (iii) du lemme 1.

Etudions la réciproque. Donnons nous une fonction test limitée f et choisissons l'entier standard k pour que $|x| \geq k-1 \Longrightarrow f(x)=0$. Pour tout multi-entier standard α, la fonction $D^\alpha f$ est interne et limitée, donc il existe des constantes standard $c_0, c_1, \cdots, c_m, \cdots$ telles que pour tout entier standard m et tout multi-entier α, si $|\alpha| \leq m$, alors pour tout $x \in X$, on a $|D^\alpha f(x)| \leq c_m$.

Commencons par vérifier les deux lemmes suivants :

Lemme 4. *Soit $h \in R(X)$. On suppose qu'il existe un réel c tel que pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ et tout $x \in X$, on a $|D_i h(x)| \leq c$, alors h est c-Lipschitzienne pour la norme $|\cdot|$.*

Démonstration.

Pour tout $x \in X$ et tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$|f(x+\varepsilon e_i)-f(x)|=|\varepsilon D_i f(x)|=|x+\varepsilon e_i-x|\cdot|D_i f(x)|\leq c|x+\varepsilon e_i-x|.$$

Considérons deux éléments x et y de X ; en allant de x à y en suivant un chemin parallèle aux axes de coordonnées, on voit qu'il existe un chemin

$$x=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_j,\ x_{j+1},\ \cdots,\ x_p=y$$

tel que

$$x_{j+1}-x_j=\pm\varepsilon e_{i(j)} \text{ et } |y-x|=\sum_{j=0}^{p-1}|x_{i+1}-x_i|$$

donc

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|&=|\sum_{j=0}^{p-1}f(x_{j+1})-f(x_j)|\leq\sum_{j=0}^{p-1}|f(x_{j+1})-f(x_j)|\\&\leq\sum_{j=0}^{p-1}c|x_{i+1}-x_i|=c|y-x|.\end{aligned}$$

Lemme 5. *Considérons une fonction-test $f \in D$ et une fonction standard g: $\boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{C}$ continue. Si pour tout $x \in X$, on a $f(x) \sim g(x)$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, et tout $x \in X$, $\partial_i g(x)$ existe et $\partial_i g(x) \sim D_i f(x)$.*

Démonstration. Supposons pour fixer les idées que $i=1$. Puisque la fonction $D_1 f$ appartient à D, elle satisfait les hypothèses du lemme 4, elle est donc S-continue ; on en déduit qu'il existe une fonction standard h continue telle que pour tout $x \in X$ limité, on a $D_1 f(X) \sim h(x)$. De plus, $D_1 f$ étant à support limité, h est à support compact d'où pour tout $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ limité la relation :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x_1}h(t,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)dt&\sim\sum_{j=-\omega^2/2}^{x_1/\varepsilon}\varepsilon h(j\varepsilon,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\&\sim\sum_{j=-\omega^2/2}^{x_1/\varepsilon}\varepsilon D_i f(j\varepsilon,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\&=f(x)\sim g(x).\end{aligned}$$

En conséquence, $\partial_1 g$ existe, de plus comme h et $\partial_1 g$ sont des fonctions standards on a $\partial_1 g=h$.

Fin la démonstration de la proposition 1 :

Puisque $f \in D$, on peut lui appliquer le lemme 4, on en déduit qu'il existe une fonction standard g continue telle que $\forall x \in X$, $g(x) \sim f(x)$. En utilisant le lemme 5, on vérifie par une récurrence évidente sur $|\alpha|$ que pour tout multi-entier standard α, $\partial^\alpha g$ existe et $\partial^\alpha g(x) \sim D^\alpha f(x)$ pour tout $x \in X$.

Corollaire 1. *Soit $f \in R(X)$, on a les équivalences :*

(7) $f \in E \Longleftrightarrow \exists^{st} g \in \mathscr{E},\ \forall^{st}\alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ \forall x \in X,\ x$ *limité* $\Longrightarrow D^\alpha f(x) \sim \partial^\alpha g(x)$.

(7′) $f \in S \Longleftrightarrow \exists^{st} g \in \mathscr{S},\ \forall^{st}\alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ \forall^{st} p \in \boldsymbol{N},$
$\forall x \in X,\ (1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x) \sim (1+\|z\|^2)^p \partial^\alpha g(x).$

De plus, pour le couple (f, g) *donné par* (7), *on a* :

(8) $f \in S \Longrightarrow (g \in \mathscr{S}$ *et*
$\forall^{st} p \in \boldsymbol{N},\ \forall^{st}\alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ \forall x \in X,\ (1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x) \sim (1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x))$.

(8′) $f \in D \Longleftrightarrow (g \in \mathscr{D}$ *et* $\forall^{st}\alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ \forall x \in X,\ D^\alpha f(x) \sim \partial^\alpha g(x))$.

Démonstration. (7) $\Longleftarrow$ provient des lemmes 1, 2 et 3.

(7) $\Longrightarrow$. Considérons $f \in E$. Donnons nous un entier standard $k > 0$ et $\rho_k \in D$ qui vaut 1 sur $X \cap (|x| \leq k)$ (On obtient une telle fonction-test limitée ρ_k en prenant la restriction à X d'une fonction-test standard $\rho_k \in \mathscr{D}$ égale à 1 sur un voisinage du compact $(|x| \leq k)$). D'après la formule de Liebniz, $f\rho_k \in D$, donc il existe une unique fonction standard g_k telle que $g_{k|X} \sim_D f\rho_k$. Soit x un élément standard de $\boldsymbol{R}^n$. on pose $g(x)$=la valeur commune des $g_k(x)$ lorsque $x \in (x \leq k)$. La fonction g ainsi définie est C^∞ ; elle répond à la question.

(8′) est évident car f et g sont nuls en dehors d'une partie limitée de $\boldsymbol{R}^n$.

(8). Considérons une fonction $f \in E$, la fonction standard g associée à f par la relation (7), un entier standard p et un multi-entier standard α ; la condition $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x) \sim (1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x)$ est satisfaite pour x limité. D'après le picipe de permanence, il existe un entier k illimité tel que pour $x \in X$ on a l'implication $|x| \leq k \Longrightarrow (1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x) \sim (1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x)$. Supposons que $f \in S$, pour tout $x \in X$ *illimité*, on a :

$$(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x) = (1+\|x\|^2)^{p+1} D^\alpha g(x) \frac{1}{(1+\|x\|^2)}$$

ainsi, $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x) \sim 0$ comme quotient d'un nombre limité par un nombre illimité. En conséquence $(1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x) \sim 0$ pour tout $x \in \boldsymbol{R}^n$ illimité de norme inférieure à k, comme g est *standard*, on en déduit que $\lim_{\|x\| \to \infty} (1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x) = 0$, ainsi $g \in \mathscr{S}$.

(7′) $\Longleftarrow$. Si $g \in \mathscr{S}$ alors le lemme 1 assure que pour tout $x \in X$ on a $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha g(x) \sim (1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x)$. Cette dernière expression est limitée pour tout $x \in \boldsymbol{R}^n$, donc $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x)$ est limité sur X.

(7′) $\Longrightarrow$. Soit $f \in S$; en utilisant (8), on voit qu'il existe $g \in \mathscr{S}$ qui satisfait $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x) \sim (1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x)$ pour x limité. Comme les deux nombres $(1+\|x\|^2)^p D^\alpha f(x)$ et $(1+\|x\|^2)^p \partial^\alpha g(x)$ sont infinitésimaux pour x illimité, on a établi le résultat.

2. Représentation des distributions standards

Forme bilinéaire $\langle f, g\rangle$: formes linéaires Π_f, P_f. Soient f et φ deux éléments de $R(X)$, on pose $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{x\in X}\varepsilon^n f(x)\varphi(x)$. Il est clair que l'application $(f, \varphi) \mapsto \langle f, \varphi\rangle$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

En conséquence, l'application interne

$$\Pi_f : R(X) \longrightarrow \boldsymbol{C}$$
$$\varphi \longmapsto \langle f, \varphi\rangle$$

est linéaire. De plus , pour toute application linéaire interne $\Pi : R(X) \longmapsto \boldsymbol{C}$, il existe une unique $f\in R(X)$ telle que $\Pi = \Pi_f$; (en effet, l'espace $R(X)$ est de dimension hyperfinie.)

DÉFINITION 4. On dit qu'une application linéaire $\Pi : R(X) \longmapsto \boldsymbol{C}$ (resp. l'unique $f\in R(X)$ telle que $\Pi = \Pi_f$) est une distribution limitée lorsque pour toute fonction-test limitée $\varphi\in D$, le nombre $\Pi(\varphi) = \Pi_f(\varphi)$ est limité. On notera D' l'ensemble des distributions limitées.

Proposition 2. *Soit $f\in R(X)$; les assertions suivantes sont équivalentes*:
(i) *f est une distribution limitée.*

(ii) $\forall \varphi\in I$, $\Pi_f(\varphi)\sim 0$.

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii). Soit $\varphi\in I$, considérons un entier standard k tel que $\varphi(x)=0$ pour $|x|\geq k-1$; alors

$$\forall^{st}\alpha\in \boldsymbol{N}^n,\ \exists\, c_\alpha\in \boldsymbol{R}_+, \text{ tel que } c_\alpha\sim 0 \text{ et } |D^\alpha\varphi|_k\leq c_\alpha.$$

Le principe de permanence assure l'existence d'un infinitésimal $c>0$ tel que pour tont multi-entier standard α on a $|D^\alpha\varphi|_k\leq c$. La fontion $\psi = \dfrac{\varphi}{c}$ est une fonction-test limitée (plus précisément $|D^\alpha\psi|_k\leq 1$), ainsi $\Pi_f(\psi)$ est limité, par linéarité, on en déduit que $\Pi_f(\varphi) = c\Pi_f(\psi)$ est infinitésimal.

(i)$\Longleftarrow$(ii) Si ψ est une fonction test limitée pour laquelle le nombre complexe $c=\Pi(\psi)$ est illimité, la fonction $\varphi = \dfrac{\psi}{c}$ est infinitésimale bien que $\Pi(\psi)=1$.

Corollaire 3. *L'unique fonction standard P_f définie sur les fonctions standards de $\mathscr{D}$ par la relation $\forall^{st}\varphi\in\mathscr{D}$ $P_f(\varphi) = {}^\circ\Pi_f(\varphi_{|X})$ est une distribution standard. De plus soit $\psi\in D$ et φ l'unique fonction standard de $\mathscr{D}$ telle que $\psi - \varphi_{|D}\in I$, on a $P_f(\varphi)\sim\Pi_f(\psi) = \langle f, \psi\rangle$.*

Démonstration. Commençons par montrer le résultat suivant :
Soient $f\in D'$, k un entier standard et η un réel standard strictement positif ;

il existe un entier standard q et un réel standard ν strictement positif tel que pour toute $\varphi \in D$ à support dans $(|x| \leq k)$ on a : (pour tout $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, $|\alpha| \leq q$ et $|D^\alpha \varphi|_k < \nu) \Longrightarrow |\langle f, \rho \rangle| < \eta$.

Si ce résultat est faux, l'ensemble $\Lambda = \left\{ q \in \boldsymbol{N} \mid \forall \alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ |\alpha| \leq q \Longrightarrow \exists\ \varphi \in R(X), \right.$ $\left. \mathrm{supp}(\varphi) \subset X \cap (|x| \leq k),\ |D^\alpha \varphi|_k < \frac{1}{q} \text{ et } |\langle f, \varphi \rangle| \geq \eta \right\}$ est une partie interne de $\boldsymbol{N}$ qui contient tous les entiers q standards ; L'ensemble Λ contient un élément q_0 illimité. A q_0 est associé une fonction $\varphi_0 \in I$ telle que $|\langle f, \varphi_0 \rangle| \geq \eta$; ce qui contredit la proposition 2.

Considèrons un réel standard $\eta > 0$ et un compact standard K de $\boldsymbol{R}^n$; soit k un entier standard tel que $K \subset (|x| \leq k)$. Pour toute fonction $\psi \in \mathscr{D}$, posons $\varphi = \psi_{|X}$, $\varphi \in D$ et pour tout α, on a $D^\alpha \varphi(x) \sim \partial^\alpha \varphi(x)$. On applique à φ le résultat précédent : Il existe un entier standard q et un réel standard ν strictement positif tel que pour tout $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, $|\alpha| \leq q$ et $\sup\{|\partial^\alpha \psi| \mid x \in K\} < \nu$ impliquent $P_f(\psi) = {}^\circ|\langle f, \rho \rangle| < \eta$. Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 1. Exposé dans le cas $n=1$ par Kinoshita.

Soit g est une fonction standard continue, on pose $f = g_{|X}$, alors P_f est la distribution $\varphi \longmapsto \int_{\boldsymbol{R}^n} g\varphi dx$ traditionnellement identifiée à g (voir [4] Theorem 6 p. 819).

Plus généralement, si $g \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$ et si $f \in R(X)$ est une fonction localement S-intégrable (c'est à dire que $\forall^{st} k \in \boldsymbol{N}$, $\sum_{X \cap (|x| \leq k)} \varepsilon^n |f|$ est limité) qui est un relèvement de g, alors P_f est la distribution standard $\varphi \longmapsto \int_{\boldsymbol{R}^n} g\varphi dx$ (voir [4] Theorem 4 p. 815).

Proposition 3. *Soit $f \in R(X)$; les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall^{st} k \in \boldsymbol{N},\ \forall^{st} \alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ \exists^{st} m \in \boldsymbol{N},\ |D^\alpha f|_k \leq \varepsilon^{-m}$.

(ii) $\forall^{st} k \in \boldsymbol{N},\ \exists^{st} m \in \boldsymbol{N},\ |f|_k \leq \varepsilon^{-m}$.

(iii) $\forall^{st} k \in \boldsymbol{N},\ \exists^{st} m \in \boldsymbol{N},\ \sum_{(|x| \leq k)} \varepsilon^{m+n} |j(x)|$ *est limité.*

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii) est évident.

Pour montrer (ii)$\Longrightarrow$(i), on raisonne par récurrence sur l'entier $p = |\alpha|$. Pour $p = 0$, c'est (ii) ; supposons le résultat démontré à l'ordre p et choisissons un entier standard m tel que $|\alpha| = p \Longrightarrow |D^\alpha f|_{k+1} \leq \varepsilon^{-m}$. Soit $x \in (|x| \leq k) \cap X$ et $\beta \in \boldsymbol{N}^n$ qui satisfait $|\beta| = p+1$; il existe $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que

$$\begin{aligned}|D^{\beta}f(x)|=|D_i\circ D^{\alpha}f(x)|&=\left|\frac{D^{\alpha}f(x+\varepsilon e_i)-D^{\alpha}f(x)}{\varepsilon}\right|\\&\leq\frac{|D^{\alpha}f(x+\varepsilon e_i)|+|D^{\alpha}f(x)|}{\varepsilon}\\&\leq\frac{2\varepsilon^{-m}}{\varepsilon}\\&=2\varepsilon^{-(m+1)}\leq\varepsilon^{-(m+2)}.\end{aligned}$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Si $|f|_k\leq\varepsilon^{-m}$, on a en notant λ la mesure de Lebesgue de $\boldsymbol{R}^n$:

$$\sum_{|x|\leq k}\varepsilon^{m+n}|f(x)|\leq\sum_{|x|\leq k}\varepsilon^{-n}\sim\lambda(\{x\in\boldsymbol{R}^n||x|\leq k\}).$$

(iii)$\Longrightarrow$(ii). Si pour tout entier standard m, il existe $x_0\in(|x|\leq k)\cap X$ pour lequel $|f(x_0)|>\varepsilon^{-(m+n+1)}$ alors $\sum_{(|x|\leq k)}\varepsilon^{m+n}|f(x)|\geq\varepsilon^{m+n}|f(x_0)|\geq\varepsilon^{m+n-m-n-1}$, donc $\sum_{(|x|\leq k)}\varepsilon^{m+n}|f(x)|$ ne saurait être limité.

DÉFINITION 6. On dit qu'une fonction $f\in R(X)$ est une fonction généralisée forsqu'elle satisfait l'une des trois conditions équivalentes de la proposition 3. On notera $Z(X)$ l'ensemble des fonctions généralisées définies sur X.

Théorème 1. *L'ensemble (externe) $Z(X)$ des fonctions généralisées est une algèbre commutative sur l'anneau commutatif (externe) E, il est stable par les différences D^{α} pour tout multi-entier α standard.*

Démonstration. La stabilité du produit provient de la caractérisation (ii), comme $E\subset Z(X)$, la multiplication par un élément de E est bien une application de $E\times Z(X)$ dans $Z(X)$. La stablilité par différence provient de la caractérisation (i).

Proposition 4. *Soit $f\in R(X)$, si f est une distribution limitée, c'est une fonction généralisée.*

Démonstration. Si f n'est pas une fonction généralisée, il existe un entier k standard tel que pour tout entier standard m, on a $|f|_k>\varepsilon^{-m}$.
L'ensemble $\Lambda=\{m\in\boldsymbol{N}|\exists x\in(|x|\leq k)\cap X,\ |f(x)|>\varepsilon^{-m}\}$ est une partie interne de $\boldsymbol{N}$ qui contient tous les entiers limités ; il existe donc un entier illimité m et un élément $x\in(|x|\leq k)\cap X$ tel que $|f(x)|>\varepsilon^{-m}$. On considère la fonction-test φ définie par :

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\neq x\\ \varepsilon^{-m} & \text{si } t=x.\end{cases}$$

On voit que $\varphi\in I$ bien que $|\langle f,\ \varphi\rangle|=1$.

Proposition 5. *Soit f, $\varphi \in R(X)$, on a les assertions suivantes :*

$$\text{(i)}\quad \forall y \in X,\ \sum_{x\in X} f(x+y)\varphi(x) = \sum_{x\in X} f(x)\varphi(x-y).$$

$$\text{(ii)}\quad \forall \alpha \in N^n,\ \langle D_+^\alpha f,\ \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f,\ D_-^\alpha \varphi\rangle.$$

Démonstration. (i) est un calcul classique d'analyse harmonique sur un groupe fini ; (formule 2.1 p. 17 [3]).

(ii) est un simple calcul par récurrence sur $|\alpha|$. Si $|\alpha|=0$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour α et posons $\beta=\alpha+e_i$; alors en écrivant $\sum$ à la place de $\sum_{x\in X}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle D^\beta f,\ \varphi\rangle &= \langle D_i \circ D^\alpha f,\ \varphi\rangle \\
&= \sum \varepsilon^n \frac{D^\alpha f(x+\varepsilon e_i) - D^\alpha f(x)}{\varepsilon}\varphi(x) \\
&= \sum \varepsilon^{n-1} D^\alpha f(x+\varepsilon e_i)\varphi(x) - \sum \varepsilon^{n-1} D^\alpha f(x)\varphi(x) \\
&= \sum \varepsilon^{n-1} D^\alpha f(x)\varphi(x-\varepsilon e_i)\varphi(x) - \sum \varepsilon^{n-1} D^\alpha f(x)\varphi(x) \\
&= \sum \varepsilon^n D^\alpha f(x) \frac{\varphi(x-\varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} \\
&= -\langle D^\alpha f(x),\ D_{i-}\varphi\rangle \\
&= -(-1)^{|\alpha|}\langle f,\ D_-^\alpha \circ D_{i-}\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\beta|}\langle f,\ D_-^\beta \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Corollaire 4. *Si f est une distribution limitée, alors pour tout multi-entier standard α, $D^\alpha f$ est une distribution limitée.*

Proposition 6. (due à Kinoshita dans le cas $n=1$) *Soit f une distribution limitée, pour toute fonction standard $\psi \in \mathcal{D}$, on a : $P_{D^\alpha f}(\psi) = (-1)^{|\alpha|} P_f(\partial^\alpha \psi)$. En d'autres termes, les distributions standards $P_{D^\alpha f}$ et $\partial^\alpha P_f$ (dérivée au sens distributions) sont égales.*

Démonstration. Soit $\varphi = \psi_{|X}$; d'après le lemme 3, pour tout muli-entier standard α, on a $D^\alpha \varphi \sim_D (\partial^\alpha \psi)_{|X}$. En conséquence, on a :

$$\begin{aligned}
P_{D^\alpha f}(\psi) \sim \Pi_{D^\alpha f}(\varphi) &= \langle D^\alpha f,\ \varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle f,\ D^\alpha \varphi\rangle \\
&\sim (-1)^{|\alpha|}\langle f,\ (\partial^\alpha \psi)_{|X}\rangle \\
&\sim (-1)^{|\alpha|} P_f((\partial^\alpha \psi)).
\end{aligned}$$

Théorème 2. *Pour toute distribution T standard à support compact, il existe une distribution limitée f telle que $T=P_f$.*

Démonstration. Soit $K=\operatorname{supp} T$ le support de T ; le théorème de Schwartz (Voir [7] Théorème XXI chap. III n°6) nous affirme qu'il existe une fonction standard continue g et un multi-entier standard α tels que $T=\partial^\alpha g$ (dérivée au sens distributions). On définit la fonction f par la relation: $\forall x \in X$, $f(x) = D^{\alpha}(g_{|X}(x))$. Puisque g est continue, $g_{|X}$ est une distribution limitée. D'après l'exemple 1, on a l'egalité (au sens distributions) $P_{g_{|X}} = g$; d'après la proposition 6, on a $P_f = P_{D^{\alpha}g} = \partial^{\alpha} P_{g_{|X}} = \partial^{\alpha} g = T$. Comme la fonction $g_{|X}$ est une distribution limitée, f est aussi une distribution limitée (corollaire 4).

En reprenant (et en adaptant à la dimension n) la démonstration du theorem 8. p. 822 de Kinoshita [4] on montre le:

Théorème 2′. *Pour toute distribution standard T sur $\boldsymbol{R}^n$, il existe une distribution limitée $f \in D'$ telle que $T = P_f$.*

REMARQUE. L'algèbre $Z(X)$ n'est pas la plus petite E-algèbre (au sens externe) stable par différence et contenant les fonctions S-continue.
Exemple: prenons $n=1$; la fonction $f \in R(X)$ définie par $f(x)=0$ si $x \notin \boldsymbol{N}$ et $f(p) = \varepsilon^{-p}$ si $p \in \boldsymbol{N} \cap X$ n'est pas dans cette algèbre.

Plus précisément, on a :

Théorème 3. *La plus petite E algèbre (externe) stable par différence et contenant les fonctions S-continues est l'algèbre $Z_F(X)$ des fonctions généralisées d'ordre fini définie comme suit :*

$$(f \in Z_F(X)) \Longleftrightarrow (\exists^{st} m \in \boldsymbol{N},\ \forall x \in X,\ x \text{ est limité} \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon^{-m}).$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que $Z_F(X)$ est une algèbre stable par différences et contenant les fonctions S-continues. Soit Z_0 la plus petite E algèbre stable par différence et contenant les fonctions S-continues: on a $Z_0 \subset Z_F(X)$.

Lemme 6. *Soit la fonction S-continue g_0 suivante :*

$$g_0 : \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \boldsymbol{C} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{\varepsilon} & \text{si } x_1/\varepsilon \text{ est pair} \\ -\sqrt{\varepsilon} & \text{si } x_1/\varepsilon \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

par une simple récurrence, on vérifie que pour tout entier standard k, on a :

$$D_1^k g_0(x) = \begin{cases} (-2)^k \sqrt{\varepsilon}\, \varepsilon^{-k} & \text{si } x_1/\varepsilon \text{ est pair} \\ -(-2)^k \sqrt{\varepsilon}\, \varepsilon^{-k} & \text{si } x_1/\varepsilon \text{ est impair.} \end{cases}$$

En conséquence, la fonction $g_k \in R(X)$ définie par $g_k(x) = (-1/2)^k g_0(x) D_1^k g_0(x)$ appartient à Z_0. Pour tout $x \in X$, on a $g_k(x) = \varepsilon^{-k+1}$.

Fin de la démonstration du Théorème 3:

Considērons une fonction $f \in Z_F(X)$; choisissons $m \in \boldsymbol{N}$ standard tel que pour tout x limité de X on ait $|f(x)| \leq \varepsilon^{-m}$. On cosidère la fonction g_{m+2} du lemme 6, il vient $f(x)=(f(x)\varepsilon^{m+1}) \cdot g_{m+2}(x)$, ce qui montre que $f \in Z_0$.

3. Analyse de Fourier des fonctions généralisées

Fixons tout d'abord les notations (elles généralisent celles de Kinoshita).

Soient x et y deux éléments de $\boldsymbol{R}^n$. on note xy leur produit scalaire. Pour tout élément $f \in R(X)$, on définit les transformées de Fourier :

$$Ff : X \longrightarrow \boldsymbol{C} \qquad \bar{F}f : X \longrightarrow \boldsymbol{C}$$
$$x \longmapsto \sum_X \varepsilon^n e^{-2i\pi xy} f(y), \qquad x \longmapsto \sum_X \varepsilon^n e^{2i\pi xy} f(y).$$

Il est clair que F et $\bar{F}$ sont des endomorphismes de $R(X)$. Par un simple calcul, on vérifie que pour tout f, $\varphi \in R(X)$ $\langle Ff, \varphi \rangle = \langle f, \bar{F}\varphi \rangle$, et $F\bar{F}=\bar{F}F=1_{R(X)}$ (application identique de $R(X)$ sur lui même) ; donc F et $\bar{F}$ sont des isomētries de $R(X)$ inverses l'une de l'autre.

Exemple 2. Pour tout $y \in X$, définissons l'appication $\delta_y : X \longrightarrow \boldsymbol{C}$ par la relation $\delta_y(x)=\varepsilon^{-n}$ si $x=y$ et $\delta_y(x)=0$ sinon. On a $(F\delta_y)(x)=e^{-2i\pi xy}$.

Application λ. Pout tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on définit $\lambda_j \in R(X)$ par la relation :

$$\lambda_j(x)=\frac{e^{2i\pi\varepsilon x e_j}-1}{\varepsilon}=2i\pi\frac{\sin \pi\varepsilon x_j}{\pi\varepsilon}e^{i\pi\varepsilon x_j}$$

et pour tout multi-entier $\alpha=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, on définit : $\lambda^\alpha(x)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j(x))^{\alpha_j}$. Par un calcul algēbrique simple, on vérifie que pour toute fonction $\varphi \in R(X)$, on a les formules :

$$\begin{aligned} &D^\alpha F\varphi = F(\bar{\lambda}^\alpha \varphi) \quad D_-^\alpha F\varphi = F(\lambda^\alpha \varphi) \\ &F(D^\alpha\varphi)=\lambda^\alpha F\varphi \quad F(D_-^\alpha\varphi)=(-\lambda)^\alpha F\varphi. \end{aligned} \tag{9}$$

Définition 7. On dit que $f \in R(X)$ est une fonction ā croissance modérée (resp. ā croissance lente) lorsqu'il existe un entier standard m tel que $(1+\|x\|^2)^{-m} f(x)$ est limitée sur X ; (resp. lorsque pour tout multi-entier standard β, il existe un entier standard m tel que $(1+\|x\|^2)^{-m} D^\beta f$ est limitée sur X. On notera O_S l'ensemble des fonctions ā croissance lente.

Proposition 7.

(i) *Pour tout* $x \in X$, *et tout* $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, *on a :* $4^{|\alpha|}|x^\alpha| \leq |\lambda^\alpha(x)| \leq (2\pi)^{|\alpha|}|x^\alpha|$.

(ii) *Les fonctions* $x \mapsto (\lambda^\alpha(x))$ *et* $x \mapsto (\bar{\lambda}^\alpha(x))$ *sont ā croissance lente.*

Démonstration.

(i) Soit $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X$, d'après la proposition 3 p. 846 de Kinoshita [5], pour tout $j\in\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $4|x_j|\leq|\lambda_j(x)|\leq 2\pi|x_j|$. Par définition de x^α et de λ^α, on a :

$$4^{|\alpha|}|x^\alpha|=\prod_{j=1}^n(4|x_j|)^{\alpha_j}\leq\prod_{j=1}^n|\lambda_j(x)|^{\alpha_j},$$
$$\prod_{j=1}^n|\lambda_j(x)|^{\alpha_j}=|\lambda^\alpha(x)|\leq\prod_{j=1}^n(2\pi|x_j|)^{\alpha_j},$$
$$\prod_{j=1}^n(2\pi|x_j|)^{\alpha_j}=(2\pi)^{|\alpha|}|x^\alpha|.$$

(ii) Il suffit de le vérfier pour λ_j. Par un simple calcul, on voit que si $l\neq j$, on a $D_l\lambda_j^\alpha=0$ et $D_j\lambda_j=\dfrac{e^{2i\pi\varepsilon^2}-1}{\varepsilon^2}e^{2i\pi\varepsilon xe_j}$ dont le module est équivalent à 2π ;

Pour $\beta_j\geq 2$ on a $D_j^{\beta_j}\lambda_j=\dfrac{e^{2i\pi\varepsilon^2}-1}{\varepsilon^{\beta_j+1}}e^{2i\pi\varepsilon xe_j}$ dont le module est infinitésimal.

Par récurrence sur $|\beta|$, on vérifie que $D^\beta\lambda^\alpha$ est un polynome standard à coefficients enitiers dans les variables ε et $D_j^{\beta_j}\lambda_j^{\alpha_j}$, ce qui permet de conclure.

Lemme 7. *O_S est un anneau stable par différences et S est une algèbre sur l'anneau O_S.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formule de Leibniz (5′).

Lemme 8. *Soient $\varphi\in S$ et α, β deux multi-entiers standards. La fonction $x^\beta D^\alpha F\varphi$ est limitée sur X.*

Démonstration. Pour $\alpha=\beta=0$, on a $F\varphi(x)=\sum_{y\in X}\varepsilon^n e^{-2i\pi xy}\varphi(y)$ d'où $|F\varphi(x)|\leq\sum_{y\in X}\varepsilon^n|\varphi(y)|$. On choisit $m\geq n$; posons $c=\sup\{(1+\|x\|^2)^m|\varphi(x)|\,|\,x\in X\}$. Pour tout $y\in X$, on a l'inégalité $|\varphi(y)|\leq\frac{c}{(1+\|y\|^2)^m}$, d'où $|F\varphi(x)|\leq\sum_{y\in X}\varepsilon^n\frac{c}{(1+\|y\|^2)^m}$. Comme la fonction $(1+\|x\|^2)^m|\varphi(x)|$ est interne et limitée, le réel c est limité. La fonction standard $y\mapsto\dfrac{1}{(1+\|y\|^2)^m}$ est continue et Lebesgue-intégrable sur $\boldsymbol{R}^n$, donc on a $\sum_{y\in X}\varepsilon^n\frac{c}{(1+\|y\|^2)^m}\sim\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{c}{(1+\|y\|^2)^m}dy$; or ce dernier nombre est limité. Pour $\beta=0$, on utilise la formule 9 : $D^\alpha F(\varphi)=F(\bar{\lambda}^\alpha\varphi)$ qui permet de conclure car $\bar{\lambda}^\alpha\varphi\in S$ (lemme 7). Pour α et β quelconques, on utilise les formules (9) et la proposition 7.

$$|x^\beta(D^\alpha F(\varphi))|=|x^\beta F(\bar{\lambda}^\alpha\varphi)|\leq 4^{-|\beta|}|\lambda^\beta F(\bar{\lambda}^\alpha\varphi)|=4^{-|\beta|}|F(D^\beta(\bar{\lambda}^\alpha\varphi))|$$

or $\bar{\lambda}^\alpha\varphi\in S$ et S est stable par différences.

Lemme 9. *Soit $\varphi\in S$; alors pour tout multi-entier standard α et tout entier standard m, la fonction $(1+\|x\|^2)^m D^\alpha(F\varphi)(x)$ est limitée sur X.*

Démonstration. Comme $(1+\|x\|^2)^m=(1+\sum_{j=1}^n x_j^2)^m$ est un polynome standard des variables x_1, x_2, , $\cdots$, x_n, il suffit de vérifier que pour tout multi-entieres standards α et β, et toute fonction $g\in S$ la fonction $x^\beta D^\alpha Fg$ est limitée sur X. Ce qui a été établi au lemme 8.

Proposition 8. *L'ensemble S des fonctions de Schwartz est une O_S-algèbre stable par différences et par les transformées de Fourier F et $\bar{F}$.*

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes précédents.

Définition 8. On dit qu'une application linéaire Π : $R(X)\longrightarrow \boldsymbol{C}$ (resp. l'unique fonction $f\in R(X)$ telle que $\Pi=\Pi_f$) est une distribution limitée tempérée (TLD) lorsque pour toute fonction $\varphi\in S$, $\Pi(\varphi)=\langle f, \varphi\rangle$ est limité.

On notera que l'ensemble S' des TLD est externe et contenu dans l'ensemble D' des distributions limitées.

Proposition 9. *Soit $f\in R(X)$; les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *f est une TLD.*
(ii) $\forall\varphi\in J$, $\Pi_f(\varphi)\sim 0$.

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 2.

Proposition 10. *Si f est une TLD, alors Ff et $\bar{F}f$ sont des TLD.*

Démonstration. Soit $\varphi\in S$; on a $\langle Ff, \varphi\rangle=\langle f, \bar{F}\varphi\rangle$ qui est limité puisque $\bar{F}\varphi\in S$.

Définition 9. On dira qu'une fonction $f\in R(X)$ est une fonction géneralisée tempérée lorsqu'elle satisfait la relation :

$$\exists^{st} m\in\boldsymbol{N},\ \forall x\in X,\ |f(x)|\leq\varepsilon^{-m}. \tag{10}$$

On notera Z_T l'ensemble (externe) des fonctions généralisées tempérées.

Exemples 3. a) L'ensemble $U=\{f\in R(X)|f(0)$ est limité et $\forall(x, y)\in X^2$,

$x-y\sim 0 \Longrightarrow f(x)\sim f(y)\}$ des fonctions de $R(X)$ qui sont S-uniformément continues est contenu dans Z_T. En effet pour tout $y\in X$ on a $|f(y\pm \varepsilon e_j)-f(y)|\leq 1$ et $f(0)\leq \varepsilon^{-1}$. Soit $x\in X$ et $0=x_0, x_1, \cdots. x_m=x$ un chemin tel que $x_{j+1}-x_j=\varepsilon e_{i(j)}$ et $\sum_{j=0}^{m-1}|x_{j+1}-x_j|=|x-0|=|x|$. On a

$$|f(x)|\leq |f(0)|+\sum_{j=0}^{m-1}|f(x_{j+1})-f(x_j)|\leq \varepsilon^{-1}+m\leq \varepsilon^{-1}+\frac{\varepsilon^{-2}}{2}\leq \varepsilon^{-2}.$$

b) L'ensemble O_S des fonctions à croissance lente est contenu dans Z_T. L'ensemble des fonctions à croissance modérée est contenu dans Z_T.
c) L'application $x \mapsto e^x$ n'est pas dans Z_T.

Proposition 11. *Soit $f\in R(X)$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f\in Z_T$.
(ii) $\forall^{st}\alpha\in \boldsymbol{N}^n,\ \exists^{st}m_0\in \boldsymbol{N},\ \forall x\in X,\ |D^\alpha f(x)|\leq \varepsilon^{-m_0}$.
(iii) $\exists^{st}m_1\in \boldsymbol{N},\ \sum_{x\in X}\varepsilon^{-(m_1+n)}|f(x)|$ *est limité.*
(iv) $\exists^{st}m_2\in \boldsymbol{N},\ \exists^{st}l_2\in \boldsymbol{N},\ \sum_{x\in X}\varepsilon^{m_2+n}\frac{|f(x)|}{(1+|x|^2)^{l_2}}$ *est limité.*
(v) $f^2\in Z_T$.

Démonstration.
(i)$\Longleftrightarrow$(ii) comme dans la proposition 3.
(i)$\Longrightarrow$(iii) prendre $m_1\geq m+n$.
(i)$\Longleftarrow$(iii) pour tout $x\in X$, on a $\varepsilon^{m_1+n}|\varphi(x)|\leq \varepsilon^{-1}$, de sorte que $|\varphi(x)|\leq \varepsilon^{-(m_1+n+1)}$.
(iii)$\Longrightarrow$(iv) on prend $m_2=m_1$ et $l_2\geq 0$.
(iii)$\Longleftarrow$(iv) on prend $m_1\geq m_2+2l_2$.
(i)$\Longleftrightarrow$(v) est évident.

Proposition 12. *Si f est une TLD, f est un élément de Z_T.*

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 4.

Théorème 4. *Le plus petit anneau (externe) contenant U et stable par différences n'est autre que Z_T. L'anneau Z_T est stable par les transformées de Fourier F et $\overline{F}$. L'ensemble Z_T est une algèbre sur l'anneau O_S des fonctions à croissance lente ; O_S est une sous-algèbre de Z_T stable par différences.*

Démonstration. L'ensemble Z_T est stable par addition et pour le produit. De plus $U\subset Z_T$ et $O_S\subset Z_T$, ainsi Z_T est une O_S-algèbre qui contient U. La caractérisation (ii) de la proposition 11 prouve que Z_T est stable par différences. En conséquence, le plus petit sous anneau Z_0 de $R(X)$ contenant U et stable par différences est contenu dans Z_T. Soit f un élément de Z_T et m un entier standard tel que $\forall x \in X \ |f(x)| \leq \varepsilon^{-m}$; on remarque que $f(x)=(f(x)\varepsilon^{m+1})\varepsilon^{-(m+1)}$. Or on voit que $f(x)\varepsilon^{m+1} \in Z_0$ et on sait que la fonction $\varepsilon^{-(m+1)}$ s'obtient à partir d'une fonction de U par différences et produit (lemme 6). En conséquence, $f \in Z_0$.

Soit $f \in Z_T$ et m un entier standard tel que pour tout $x \in X \ |f(x)| \leq \varepsilon^{-m}$; on a la suite d'inégalités :

$$|Ff(x)| \leq \sum_{y \in X} |\varepsilon^n e^{-2i\pi xy}| \cdot |f(y)| \leq \varepsilon^{-n} \sup\{|f(y)| \mid y \in X\} \leq \varepsilon^{-(m+n)}.$$

Ainsi $Ff \in Z_T$; on procède de même pour $\bar{F}f$.

Les autres points sont évidents.

Théorème 5. *Si f une TLD, alors elle définit une unique distribution tempérée standard P_f par la relation*

$$\forall^{st} \psi \in \mathcal{S} \ P_f(\psi) = {}^\circ\Pi_f(\psi_{|X}). \tag{11}$$

Si T est une distribution tempérée standard ; il existe une TLD f pour laquelle on a :

$$\forall^{st} \psi \in \mathcal{S} \ T(\psi) = P_f(\psi).$$

Démonstration. Pour montrer que P_f est une distribution tempérée standard, on raisonne comme dans le corollaire 3.

Réciproquement, si T est une distribution standard tempérée, il existe une fonction standard continue à croissance modérée h telle que $T = \partial^\alpha h$ (voir par exemple Schwartz [7], Théorème VI, ch. VI n°4). On note T_h la distribution tempérée $\psi \longmapsto \int_{\mathbf{R}^n} h\psi$. Posons $f = D^\alpha h_{|X}$; h appartient à Z_T. Considèrons une fonction $\psi \in \mathcal{S}$ et $\varphi = \psi_{|X}$. En utilisant la proposition 5, on obtient : $\langle f, \varphi \rangle = \langle D^\alpha h_{|X}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle h_{|X}, D_-^\alpha \varphi \rangle$ d'où

$$\langle f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \sum_{x \in X} \varepsilon^n h_{|X} D_-^\alpha \varphi(x).$$

La fonction continue $h(x)\partial^\alpha \psi(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$ et $\forall x \in X$, $h(x)\partial^\alpha \psi(x) \sim h(x) D_-^\alpha \varphi(x)$ donc on a

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X} \varepsilon^n h_{|X} D_-^\alpha \varphi(x) &\sim \int_{\mathbf{R}^n} h(x) \partial^\alpha \psi(x) dx \\ &= T_h(\partial^\alpha \psi) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha T_h)(\psi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} T(\psi).\end{aligned}$$

C'est à dire que $T(\psi) = P_f(\psi)$.

References

[1] F. Diener et G. Reeb : Analyse non standard, Hermann (Paris, 1990).

[2] C. Kessler : *On hyperfinite representation of distributions*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988) 139-144.

[3] W. A. J. Luxemburg : Fourier Analysis, in Contributions to Non-standard Analysis, p. 15-39, North-holland, (Amsterdam-London, 1972).

[4] Moto-o. Kinoshita : *Non-standard representation of distributions I*, Osaka J. Math. **25** (1988), 805-824.

[5] Moto-o. Kinoshita : *Non-standard representation of distributions II*, Osaka J. Math. **27** (1990), 843-861.

[6] M. Oberguggenberger : *Products of Distributions : Nonstandard Methods*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen Bd. **7**(4) 1988, 347-365.

[7] L. Schwartz : Théorie des distributions, Hermann (Paris, 1966).

[8] K. D. Stroyan and W. A. J. Luxemburg : Introduction to the theory of infinitesimals, New York-San Francisco-London, Acad.Press (1976).

Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles
Lycée Pothier, 2bis Rue M. Proust
45000 Orléans, France
e-mail : Jean. Pierre. Grenier @ univ-orleans. fr