



Title	Studies on tropical plane curves in the symmetric truncated cubic forms
Author(s)	Sasmitta Tarmidi, Rani
Citation	大阪大学, 2024, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/98708">https://doi.org/10.18910/98708</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## Abstract of Thesis

Name ( RANI SASMITA TARMIDI)

Title

Studies on tropical plane curves in the symmetric truncated cubic forms  
(トロピカル対称切頂三次曲線に関する研究)

## Abstract of Thesis

K.Kajiwara, M.Kaneko, A.Nobe, and T.Tsuda studied the tropicalization of the Hesse cubic curve and presented a duplication map of points on a specific nonsmooth tropical cubic curve in 2009. They constructed the level-three theta functions parametrization of the Hesse cubic curve and applied the ultradiscretization procedure to reveal its connection with the tropical duplication process. Furthermore, Nobe, in 2011, provided the addition formula for points on the tropical Hesse cubic curve, examining the tropical addition via intersection points. In 2016, Nobe investigated the tropical analogue of the group of linear automorphisms acting on the Hessian cubic curve.

This study concentrates on the tropical curves derived from symmetric Laurent polynomials of degree three, specifically those in which the terms  $x^3$  and  $y^3$  are truncated.

We examine the conditions under which these tropical curves belong to individual types of subdivisions of Newton polygons. As an application, we investigate the criteria for a symmetric truncated cubic curve to satisfy a certain (quasi-symmetric) honeycomb form and to align with Nobe's invariant curves of uQRT maps. We construct a two-parameter family of tropical elliptic curves from elliptic curves introduced in 2007 by H.M.Edwards and parametrize their polygonal cycles in terms of ultradiscrete theta functions.

Furthermore, we also delineate the addition-group structure on these tropical curves. The theta parametrization of the Edwards elliptic curves enables us to observe points addition through the ultradiscretization procedure. Lastly, we looked into a cryptographic aspect utilizing this cubic curve.

## 論文審査の結果の要旨及び担当者

氏名 ( RANI SASMITA TARMIDI )		
論文審査担当者	(職)	氏名
	主査 教授	中村博昭
	副査 教授	渡部隆夫
	副査 教授	高橋篤史
	副査 准教授	武田秀一郎
	副査 教授	金子昌信

## 論文審査の結果の要旨

可換代数を関数環の基礎単位とするスキーム論は20世紀後半以来の歴史をもつ代数幾何学の中心であるが、近年は並行して Min-Plus 代数をもとに区分的線形な図形を扱うトロピカル幾何学が出現し盛んに研究されている。この比較的新しい幾何学は、今世紀初頭の Mikhalkin による 2006 年の ICM 講演等を契機に注目を集め急速に発展を遂げつつある分野である。このうち平面上の橢円曲線のトロピカル化は、多角形サイクルと各頂点から無限遠に向かう線形な枝からなる図形として実現され、その加法群構造やサイクルの周長に関する基本的性質が Katz-Markwig-Markwig (2008), Vigeland (2009) 等により解説され、続いて Chan-Sturmfels (2013), Speyer (2014) 等によりデータ一意化を用いた精緻な理論解析の道が拓かれた。これらの流れとは独立に、2 次元可積分写像として知られる QRT 写像の超離散化の多角形不変曲線としてトロピカル橢円曲線が生じる現象が野邊厚 (2008) 等により指摘され、とりわけ Kajiwara-Kaneko-Nobe-Tsuda (2009) において橢円曲線のヘッセ族のデータ一意化において無限遠点を適切に変換することで超離散データ関数によりサイクルがパラメータ付け可能な実例が構成された。

こうした背景のもとで R. S. Tarmidi 氏は、中村博昭との共同研究において、変数に関する対称性と簡明な加法公式で知られる橢円曲線の Edwards 族に着目し、データ一意化における適切な無限遠点変換に加え、平面埋め込み写像をパラメータ変動させることにより、サイクルの形状が正方形・5 角形・7 角形に変化するトロピカル橢円曲線の 2 パラメータ族を構成することに成功した。またこの族の挙動を詳細に解析するための道具として、Tarmidi 氏は、非齊次な対称 3 次多項式のうち、単変数 3 次項を除いたもので定義されるすべての 3 次曲線に対してトロピカル化の過程に現れる Newton 多角形の細分型を分類し、多項式係数の付値の大小関係によりトロピカル曲線がどの細分型に属するかを明示的に判定する基準を与えた。

R. S. Tarmidi 氏によるこれらの研究成果は、急速に発展するトロピカル幾何学に関する膨大な文献を読み解き自らの課題目的に活用する能力、計算機を利用した丹念な検証と緻密な分類作業を積み重ねる忍耐強い分析力を表している。とくにパラメータにより形状を制御できるトロピカル橢円曲線族の新たな実例を提示したことは当該分野の様々な理論に対し検証の場を与える可能性においても学術的意義がある。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。