様式３

論　文　内　容　の　要　旨

氏　　名	（　　　　今村 悠希　　　　）
論文題名	Studies on the foundational aspects of dg categories （dg圏の基礎に関する諸研究）

論文内容の要旨

　三角圏は、シフト操作と完全三角と呼ばれる完全列のクラスを構造として備えた圏であり、加群に対するものと同様のホモロジー代数をその中で展開することができる。この構造は代数多様体の連接層の導来圏や環上の加群の導来圏として代数幾何学や多元環の表現論で用いられるだけでなく、深谷圏や安定ホモトピー圏としてシンプレクティック幾何学や代数的トポロジーでも現れており、三角圏の重要性は分野を超えて認識されている。その一方で、三角圏は一般に錐を取る操作が関手的にならないことや、三角圏のテンソル積および関手圏が三角圏にならないことなど、自由な構成が行えないという実用上の問題も抱えていた。dg圏はこの問題を解決するためのアプローチの一つである。

　dg圏は、Hom集合が加群の複体の構造を持っているような圏の概念である。正確に言えば、可換環$\Bbbk$上のdg圏とは、$\Bbbk$-加群の複体のなすモノイダル圏$\mathbf{Ch} = \mathbf{Ch}(\Bbbk)$で豊穣された豊穣圏のことを指す。dg圏$\mathcal{A}$に対して各Hom複体の0次コホモロジーを取ることによって前加法圏$H^0(\mathcal{A})$が定義される。これを$\mathcal{A}$のホモトピー圏と呼ぶ。dg圏$\mathcal{A}$がプレ三角の場合には、そのホモトピー圏$H^0(\mathcal{A})$が自然な三角圏の構造を持つことが知られている。そのため（プレ三角）dg圏は三角圏の増強概念として近年活発に研究されている。

　本論文では、dg圏の基礎的側面に関して次の二つの研究を行った。

　Chapter Iでは、dg圏に対してGrothendieck圏の類似物を定義し、Gabriel-Popescuの定理の一般化を証明した。Grothendieck圏とは、フィルター余極限が完全であるような余完備アーベル圏で生成子を持つもののことである。Grothendieck圏については加群圏の良い部分圏としての外在的な特徴づけが知られていた（Gabriel-Popescuの定理）。この結果を$\mathbf{Ab}$-豊穣圏論における結果だとみなし、dg圏のenrichmentである$\mathbf{Ch}$を含むような、よい有限性条件をみたすモノイダルGrothendieck圏$\mathcal{V}$上の豊穣圏に対して、Grothendieck豊穣圏の定義とGabriel-Popescu型定理の証明を行った。Grothendieck豊穣圏の定義は、Garner-Lackの意味での豊穣トポスの特別な場合である。Garner-Lackによれば豊穣トポスの条件はsmall-exact性と稠密生成集合の存在に分割されるが、本論文では豊穣基底が上記$\mathcal{V}$の場合についてsmall-exact性の特徴づけも与えた。

　Chapter IIでは、dg圏の持つホモトピー論を考慮した圏論を行う枠組みを整備し、その性質を調べた。dg圏には擬同値と呼ばれる、通常の圏同値よりも弱い同値概念があり、すべてのdg圏は擬同値のもとで区別するべきとされる。この擬同値に関するdg圏のホモトピー論は、dg圏の圏$\mathbf{dgCat}$上の擬同値を弱同値とするモデル圏構造によって実現され、この構造を用いることで擬同値による$\mathbf{dgCat}$の局所化$\mathbf{HodgCat}$が構成できる。局所化$\mathbf{HodgCat}$は擬同値な射を同型にするものの中で最も普遍的な1圏である。本論文では、$\mathbf{HodgCat}$の自然な精密化となるような双圏を導入し、それがproarrow equipmentと呼ばれる付加構造を備えていることを証明した。Proarrow equipmentは圏論を形式的に展開するための枠組みの一つで、この構造があると通常の圏論の場合と同様に極限の概念が定義できる。この理論を応用することにより、dg圏におけるホモトピー（余）極限の定義を与え、特にdg圏のプレ三角性をある種の完備性として理解できることを示した。

様式 7

論文審査の結果の要旨及び担当者

氏　名　（　今村悠希　）		
論文審査担当者	（職）	氏　名
	主 査　教授	髙橋篤史
	副 査　教授	安田健彦
	副 査　教授	吉永正彦
	副 査　准教授	大川新之介

論文審査の結果の要旨

本論文は 2 つの章からなる。どちらも、微分次数つき圏およびそのホモトピー論の基礎的な側面に関するものである。代数多様体やシンプレクティック多様体など様々な幾何学的対象から増強三角圏が定まるが、これに注目することで幾何学的対象の本質を捉えようとする研究が近年盛んに行われている。前三角性を満たす微分次数つき圏は増強三角圏の一種であり、このような動機からも極めて重要かつ基本的な数学的対象であると言える。

第 1 章：アーベル圏の中でも特に性質の良いものが Grothendieck アーベル圏であり、スキーム上の準連接層の圏が典型例である。一方、Grothendieck アーベル圏は、非可換環上の加群圏の性質の良い局所化として得られる圏として特徴づけられる。これは Gabriel--Popescu の定理と呼ばれ、重要かつ有名な基本定理である。一方、アーベル圏は標準的にアーベル群のなすモノイダル圏上の豊穣圏の構造を持ち、Gabriel--Popescu の定理をこの観点から捉え直すことができる。第 1 章の主結果は、微分次数つき圏を含むより一般の豊穣圏にこの定理を拡張したというものである。Grothendieck アーベル圏の性質を証明する上で Gabriel—Popescu の定理が有用であるが、第 1 章ではこれと並行する応用についても論じられている。

第 2 章：微分次数つき圏は豊穣圏の一種であるが、それを越えて、ホモトピー論的側面を理解することが重要である。従前の研究においては、微分次数つき圏のなす圏 dgcat に擬同値を弱同値とするような適切なモデル構造を入れて局所化することでホモトピー論的側面を捉えていた。一方、このモデル構造は種々の自然な構造と整合的でないため、局所化の結果として得られる圏 hodgcat を調べる際に ad hoc な議論が必要であった。第 2 章では、まず、hodgcat の精密化になっているような自然な双圏 ho2dgcat を導入している。1 射として quasi-functor と呼ばれる両側加群を考えるのがポイントである。さらに、この双圏が、自然な proarrow equipment の構造を持つことを証明している。Proarrow equipment は形式圏論の概念であるが、そのような構造が与えられた双圏に対しては重みつき極限の概念を抽象的に定義することができる。Ho2dgcat は豊穣圏のなす 2 圏ではないが、こうして定義される抽象的な重みつき極限は、微分次数つき圏のホモトピー的極限と呼ぶべきものとなっている。
応用の一つとして、微分次数つき圏の前三角性を、この意味でのある種のホモトピー的（余）完備性として捉え直すことに成功している。さらにその応用として、微分次数つき圏の両側加群に沿った貼り合わせにおいて前三角性が保存されるという有名な事実の概念的な証明に成功している。第 2 章の内容は、その視点からして画期的であり、今後の更なる展開も大いに期待されるものである。

以上述べてきたように、本論文は当該分野への十分な貢献を含んでおり、博士（理学）の学位論文として十分価値があるものと認める。