Title	時間構造の分析 : マクタガートの時間論の形式的表現
Author(s)	中山, 康雄
Citation	大阪大学大学院人間科学研究科紀要. 2003, 29, p. 204-225
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/9925
rights	
Note	

「大阪大学大学院人間科学研究科紀要」第29巻, 2003年３月所収

時間構造の分析

―― マクタガートの時間論の形式的表現 ――

中　山　康　雄

時間構造の分析
―― マクタガートの時間論の形式的表現 ――

中山　康雄

はじめに

中山（2003）の第三章で、私は、マクタガート（J.M.E. McTaggart, 1866－1925）の時間論を分析・検討した。しかし、私は、そこで、いくつかの主張の証明を行わず、その結果だけを用いた。また、そこでは、直観的に理解されることに重点をおき、必ずしも正確な規定を用いなかった。本稿は、このような中山（2003）における議論の不十分さを補い、主張を明確化し、必要な部分に関しては、証明を施すことを意図したものである[1]。

1．マクタガートの時間論の特徴

中山（2003）で主張したように、マクタガートの「時間の非実在性」の論証は、次のようにまとめることができる。

⑴　時間には、A 系列（過去・現在・未来）による記述と B 系列（より前・より後）による記述とがある。
⑵　変化なしには時間はありえない。
⑶　A 系列なしには変化はありえない。
⑷　A 系列による記述は矛盾を含む。
⑸　A 系列は実在しない（⑷より）。
⑹　時間は実在しない（⑵、⑶、⑸より）。

⑵、⑶、⑷の主張が正しければ、マクタガートの「時間の非実在性」の論証は正しいことになる。まず、⑵と⑶から「A 系列なしには時間はない」が導かれ、⑷から「A 系列はない」という⑸が導かれるので、ここから、⑹に相当する「時間はない」が帰結する。そこで、これら三つのテーゼが正しいかどうかが問題となってくる。このことに関しては、中山（2003）ですでに論じたので、本稿では⑴の問題に考察を集中させることにする。つまり、本稿の目的は、マクタガートが考えていた A 系列や B 系列が何であったのかを正確に表現し、それらの間の論理的関係を厳密に描写することにある。

マクタガートは A 系列を次のように特徴付けている[2]：

「しかし、ある点ではそれは変わる。それは、かつて遠い未来の出来事であった。それは、瞬間ごとにより近い未来の出来事になった。ついには、それは現にあった。それから、それは過去になり、いつも過去にとどまるだろう、といっても、すべての瞬間におき、それはさらに遠い過去となるのだが」〔p.26〕。

ここに見られるマクタガートによる A 系列の記述には、次のような基本的主張が含まれている：

［A1］ マクタガートによる A 系列の記述 I（A 系列の動的記述）
⒜ 出来事は、遠い未来から瞬間ごとにより近い未来になる。
⒝ 今、未来に位置している出来事は、いつか、必ず現在になる。
⒞ 現在の出来事は、必ず、過去になる。
⒟ 過去の出来事は、瞬間ごとにより遠い過去となる。

さらに、マクタガートは、過去、現在、未来という時制が、互いに両立不可能なことを指摘している：

「過去、現在、未来は両立不可能な規定である。すべての出来事はどれかひとつでなければならないが、どの出来事もひとつを越えてはならない」〔p.32〕。
「そして、この排他性は変化に、それゆえ、時間に本質的である。というのは、私たちが得ることのできる唯一の変化は、未来から現在へ、そして、現在から過去へ向かうものだからである」〔p.32〕。

ここで書かれている A 系列の特徴は、次のようにまとめることができる：

［A2］ マクタガートによる A 系列の記述 II（A 系列の静的記述）
⒜ 出来事は、過去か現在か未来である。
⒝ 「過去」、「現在」、「未来」は、両立不可能な規定である。

マクタガートの主張は、［A1］と［A2］の A 系列の記述を統合すると、矛盾が生ずるというものである。このことを、彼は、次のように表現している：

「それゆえ、その特徴は両立しない。しかし、すべてはそれらみなを持っている。M が過去なら、それは、現在であり、そして、未来であった。それが未来なら、それは、現在に、そして、過去になるだろう。それが現在なら、それは未来であったし、過去になるだろう。だから、三つの特徴すべては、それぞれの出来事に属する」〔p.32〕。

［A1］と［A2］は、正確には何を意味しているのか？「A 系列は矛盾する」というマクタガートの主張が正しいかどうかを確かめるためには、まず、この問いに答えねばならない。

2．時間の公理的記述

マクタガートの主張の［A1］と［A2］のうち、現在と過去の部分に、まず、注目してみよう。［A1］の(c)は、「現在の出来事は必ず過去になる」と述べている。これを、「現在の出来事は、必ず、後に過去になる」ことと解釈しよう。それは、［A2］の(b)から明らかなように、その出来事が現在であるなら、その時点では、それは過去ではないからである。「後に過去になる」ということを表現するために、時制述語にインデックスを導入しよう。すると、「現在の出来事は、必ず、後に過去になる」は、「どんな出来事も、現在$_{\mathrm{k}}$ならば、k より大きい m において、必ず、過去$_{\mathrm{m}}$になる」と表せる。これらの考察を基礎に、まず、「インデックスつき時制述語の公理系」というものを定義しよう。これは、「インデックスつき時制述語」が満たすべき本質的特徴を表す文や図式を集めたものとなっている。

［1］ 次の二つの公理図式 (a)、(b)、(c)からなる公理系を「インデックスつき現在・過去述語の公理系」と呼ぶ。そして、この公理系に(d)を加えたものを「インデックスつき時制述語の公理系」と呼ぶ。

(a) どんな出来事も、現在$_{\mathrm{k}}$ならば、過去$_{\mathrm{k}}$ではない〔$\forall e(N_{\mathrm{k}}(e) \rightarrow \neg P_{\mathrm{k}}(e))$〕。

(b) どんな出来事も、現在$_{\mathrm{k}}$ならば、必ず（後に）過去$_{\mathrm{m}}$になる〔$\forall e(N_{\mathrm{k}}(e) \rightarrow P_{\mathrm{m}}(e))$〕。ただし、m は k より大きい整数とする。

(c) 過去$_{\mathrm{k}}$は、後にも過去$_{\mathrm{m}}$にとどまる〔$\forall e(P_{\mathrm{k}}(e) \rightarrow P_{\mathrm{m}}(e))$〕。ただし、m は k より大きい整数とする。

(d) 未来$_{\mathrm{k}}$は、現在$_{\mathrm{k}}$でも過去$_{\mathrm{k}}$でもないものである〔$\forall e(F_{\mathrm{k}}(e) \equiv \neg N_{\mathrm{k}}(e) \wedge \neg P_{\mathrm{k}}(e))$〕。

［A2］の(b)からは［1］の(a)が導かれ、［A1］の(c)と(d)は［1］の(b)と(c)に対応している。

この公理系の記述は、インデックスの取り扱いが、完全に明らかでないところがあるのと、公理系自身が少し弱いところがあるので、この「インデックスつき現在・過去述語の公理系」が帰結するような、より強い公理系を定めることにする。

まず、時制関係語を用いた公理系を表現し、これと対応する形で、インデックスつき時制述語を導入した方が、表現上容易になる。つまり、「eは現在$_{\mathrm{k}}$である〔$N_{\mathrm{k}}(e)$〕」と言う代わりに、「eは段階kにおいて現在である〔$N(k, e)$〕」と言うことにするのである。以下、本稿では、この方法に従い、インデックスつき時制述語の特徴を描写することにする。

［2］ 次の公理から成り立つ公理系を「時制関係語の公理系」と呼ぶ。

(a) ＜が線型順序関係をなすことを表す公理系。

(b) すべての出来事は、唯一の段階で現在になる〔$\forall e \exists^{=1} k\ N(k, e)$〕。

(c) どんな出来事も、段階kで現在ならば、kで過去ではない〔$\forall e(N(k, e) \rightarrow \neg P(k,$

e))〕。

⒟　どんな出来事も、段階 k で現在ならば、必ず後に、過去になる〔$\forall k \forall m(k < m \rightarrow \forall e(N(k, e) \rightarrow P(m, e)))$〕。

⒠　過去である出来事は、後にも過去にとどまる〔$\forall k \forall m(k < m \rightarrow \forall e(P(k, e) \rightarrow P(m, e)))$〕。

⒡　未来の出来事は、現在でも過去でもないものである〔$\forall k \forall e(F(k, e) \equiv \neg N(k, e) \wedge \neg P(k, e))$〕。

未来関係語についても過去関係語に対応する関係が成り立つことが、この時制関係語の公理系から帰結する。これにより、未来は過去とは、ある意味で、鏡像的対称性を持つことがわかる（命題１の⒜+⒞+⒞）。つまり、［２］の⒞、⒟、⒠と、命題１の⒜、⒝、⒞との間に鏡像的対応が示されている。

命題１　時制関係語の公理系［２］から、未来関係語についての次の定理が帰結する。

⒜　どんな出来事も、段階 k で現在ならば、k で未来ではない〔$\forall k \forall e(N(k, e) \rightarrow \neg F(k, e))$〕。

⒝　どんな出来事も、段階 k で現在ならば、以前には必ず、未来だった〔$\forall k \forall m(m < k \rightarrow \forall e(N(k, e) \rightarrow F(m, e)))$〕。

⒞　未来である出来事は、以前にも必ず、未来だった〔$\forall k \forall m(m < k \rightarrow \forall e(F(k, e) \rightarrow F(m, e)))$〕。

証明：命題１の⒜は、［２］の⒡から直ちに帰結する。

命題１の⒝を示すために、$m < k \wedge N(k, e)$を仮定する。ここで、$N(m, e)$ならば、［２］の⒝に矛盾する。また、$P(m, e)$ならば、［２］の⒠より、$P(k, e)$が成立し、これは、［２］の⒞に矛盾する。よって、$\neg N(m, e) \wedge \neg P(m, e)$が成立。すると、［２］の(f)より、$F(m, e)$が成り立ち、命題１の⒝が示された。

命題１の⒞を示すために、$m < k \wedge F(k, e)$を仮定する。ここで、$N(m, e)$ならば、［２］の⒟より、$P(k, e)$が成立し、これは、［２］の⒡に矛盾する。また、$P(m, e)$ならば、［２］の⒠より、$P(k, e)$が成立し、これは、［２］の⒡に矛盾する。よって、$\neg N(m, e) \wedge \neg P(m, e)$が成立。すると、［２］の⒡より、$F(m, e)$が成り立ち、命題１の⒞が示された。　（証明終わり）

時制述語と時制関係語の対応は、次の公理系により達成される。

［３］　次の公理系は、時制述語と時制関係語の対応を表現したものである。この公理系を、「時制述語と時制関係語の対応規定」と呼ぶ。

⒜　すべての時制述語 X について、次のことが成り立つ：

$$\exists^{=1} type \exists^{=1} k \forall e(X(e) \equiv tense(type, k, e)).$$

(b)　$\forall type \forall k \forall e(tense(p\text{-}type, k, e) \vee tense(n\text{-}type, k, e) \vee tense(f\text{-}type, k, e))$.
(c)　$\forall k \forall e(P(k, e) \equiv tense(p\text{-}type, k, e))$.
(d)　$\forall k \forall e(N(k, e) \equiv tense(n\text{-}type, k, e))$.
(e)　$\forall k \forall e(F(k, e) \equiv tense(f\text{-}type, k, e))$.

時制述語 X が $p\text{-}type$ の k 段階のものなら〔$\forall e(X(e) \equiv tense(p\text{-}type, k, e))$〕、$X$ を P_k と表す。つまり、P_kは$\forall e(P_k(e) \equiv P(k, e))$という明示的定義により導入されると考えることもできる。同様に、N_k, F_kという表現法を用いることにする。

時制関係語の公理系［2］は、「現在の出来事は、必ず、過去になる」などの時制変化を用いて時間の動的側面を表現していた。これに対し、現在時制にまず注目し、出来事の現在化するプロセスに順番があると考えることもできる。この考えに基づいて、時間の動的側面を表現するのが、次の「現在化順序の公理系」である。

［4］　次の公理図式からなる公理系を「現在化順序の公理系」と呼ぶ。
(a)　＜が線型順序関係をなすことを表す公理系。
(b)　すべての出来事は、唯一の段階で現在になる〔$\forall e \exists^{=1} k\ N(k, e)$〕。
(c)　出来事 eが kにおいて過去だということは、以前の m において eが現在だったということである〔$\forall e(P(k, e) \equiv \exists m(m < k \wedge N(m, e)))$〕。
(d)　出来事 eが kにおいて未来だということは、後の m において eが現在になるということである〔$\forall e(F(k, e) \equiv \exists m(k < m \wedge N(m, e)))$〕。

この現在化順序の公理系から、出来事は過去か現在か未来のいずれかでなければならないことが導ける。

命題２　現在化順序の公理系［4］から、出来事は過去か現在か未来のいずれかでなければならないこと〔$\forall k \forall e(P(k, e) \vee N(k, e) \vee F(k, e))$〕が帰結する。

証明：　現在化順序の公理系［4］を仮定する。ここで、e を任意の出来事としよう。すると、［4］の(b)から、$N(m, e)$とする唯一の m が存在する。また、［4］の(a)から、任意の段階 k について $k < m \vee k = m \vee m < k$ が成り立つ。$k < m$ ならば、［4］の(d)から $F(k, e)$となる。$k = m$ ならば、代入により $N(k, e)$となる。そして、$m < k$ ならば、［4］の(c)から $P(k, e)$となる。よって、$\forall k \forall e(P(k, e) \vee N(k, e) \vee F(k, e))$が成り立つ。（証明終わり）

この公理系を「現在化順序の公理系」と私が呼ぶのは、現在時制関係語 Nの第一項が現在化順序を表すよう、この Nを解釈することにより、適切な解釈が得られるからである。例えば、kという段階で出来事 e_1が現在化し〔$N(k, e_1)$〕、その後、mという段階で e_2が現在化したなら〔$k < m \wedge N(m, e_2)$〕、「e_1の現在化の後に e_2の現在化が起こった」と言うことができる。そして、「e が段階 k で過去」とは「e は k よりも前に

現在化している」ということであり、「e が k で未来」とは「e は k よりも後に現在化する」ことと、この公理系は規定している。

時制関係語の公理系［２］と現在化順序の公理系［４］は、異なる観点から時間と出来事の関係を特徴付けているが、実は、それらは同等である。つまり、時制関係語の公理系と現在化順序の公理系が論理的に同値であることを証明できる〔命題５〕。

命題３　現在化順序の公理系［４］は、時制関係語の公理系［２］から帰結する。

証明：　時制関係語の公理系、つまり、［２］の⒜から(f)がすべて成り立つと仮定しよう。このとき、［４］の⒜から⒟が成り立つことを示せばよい。［２］の⒜は［４］の⒜と同じであり、［２］の⒝は［４］の⒝と同じなので、［４］の⒞と⒟が成り立つことを示せばよい。

まず、$\exists m(m < k \wedge N(m, e)) \rightarrow P(k, e)$が成り立つことを示すことにする。そこで、$x < k \wedge N(x,\ e)$を満たす x が存在すると仮定しよう。すると、［２］の⒟から、$P(k, e)$が帰結するので、$\exists m(m < k \wedge N(m, e)) \rightarrow P(k, e)$は成り立つ。

次に、$P(k,\ e) \rightarrow \exists m(m < k \wedge N(m,\ e))$が成り立つことを示そう。そこで、$P(k, e)$を仮定しよう。［２］の⒝から、$N(x, e)$を満たすような唯一の x が存在する。また、［２］の⒜から、$k < x \vee k = x \vee x < k$ が成り立つ。$k < x$ ならば、［２］の⒠から、$P(x,\ e)$が帰結し、この結果は、［２］の⒞に矛盾する。よって、$k < x$ ではない。また、$k = x$ ならば、代入により $N(k, e)$が帰結し、この結果は、［２］の⒞に矛盾する。よって、$k = x$ ではない。これらから、$x < k$ が帰結し、$\exists m(m < k \wedge N(m, e))$が成り立つことが示された。よって、$P(k, e) \rightarrow \exists m(m < k \wedge N(m, e))$が成り立つ。

上の二つの証明から、［４］の⒞が証明される。次に、［４］の⒟を示そう。

まず、$\exists m(k < m \wedge N(m,\ e)) \rightarrow F(k,\ e)$を示すことにする。そこで、$k < x \wedge N(x, e)$を満たす x が存在すると仮定しよう。すると、$N(k, e)$は［２］の⒝に矛盾し、$P(k, e)$は［２］の⒟の適用により［２］の⒞に矛盾するという結果が得られ、$\neg N(k, e) \wedge \neg P(k, e)$が成り立つ。よって、［２］の⒡より、$F(k, e)$が成り立つ。

次に、$F(k,\ e) \rightarrow \exists m(k < m \wedge N(m,\ e))$を示そう。そこで、$F(k,\ e)$を仮定しよう。［２］の⒝から、$N(x, e)$を満たすような唯一の x が存在する。また、［２］の⒜から、$k < x \vee k = x \vee x < k$ が成り立つ。$x < k$ ならば、［２］の⒟から、$P(k,\ e)$ が帰結し、この結果は、［２］の⒡に矛盾する。よって、$x < k$ ではない。また、$k = x$ ならば、代入により $N(k, e)$が帰結し、この結果は、［２］の⒡に矛盾する。よって、$k = x$ ではない。ここから、$k < x$ が帰結し、$\exists m(k < m \wedge N(m,\ e))$ が成り立つことが示された。よって、$F(k, e) \rightarrow \exists m(m < k \wedge N(m, e))$が成り立つ。

上の二つの証明から、［４］の⒟が証明される。これで、現在化順序の公理系［４］のすべての公理が、時制関係語の公理系［２］から帰結することが示された。

（証明終わり）

命題４　時制関係語の公理系［２］は、現在化順序の公理系［４］から帰結する。

証明：　現在化順序の公理系、つまり、［４］の⒜から⒟がすべて成り立つと仮定しよう。このとき、［２］の⒜から⒡が成り立つことを示せばよい。［４］の⒜は［２］の⒜と同じであり、［４］の⒝は［２］の⒝と同じなので、［２］の⒞から⒡が成り立つことを示せばよい。

ここで、$N(k, e) \wedge P(k, e)$が成り立つと仮定しよう。すると、［４］の⒞から、$m < k$で $N(m, e)$となる m が存在する。しかし、これは、［４］の⒝に矛盾する。よって、$N(k, e) \rightarrow \neg P(k, e)$が成り立つ。従って、［２］の⒞が成り立つ。

次に、$k < m \wedge N(k, e)$を仮定しよう。すると、［４］の⒞から、$P(m, e)$が成り立つ。よって、［２］の⒟が成り立つ。

今度は、$k < m \wedge P(k, e)$を仮定しよう。すると、［４］の⒞から、$n < k \wedge N(n, e)$を満たす n が存在する。上のことから、$n < m$ が帰結するので、［４］の⒞から、$P(m, e)$が帰結する。よって、［２］の⒠が成り立つ。

命題２により、$\forall k \forall e\,(P(k,\ e) \vee N(k,\ e) \vee F(k,\ e))$ が成り立つ。よって、$\neg N(k, e) \wedge \neg P(k, e) \rightarrow F(k, e)$が成り立つ。ここで、$F(k, e)$を仮定しよう。すると、［４］の⒟から、$k < m \wedge N(m,\ e)$ となる m が存在する。だから、［４］の⒝から、$\neg N(k,\ e)$が帰結する。また、$P(k,\ e)$を仮定すると、上ですでに示された［２］の⒠から $P(m,\ e)$となり、これは、上ですでに示された［２］の⒞に矛盾する。このことから、$\neg P(k, e)$が帰結する。よって、$F(k, e) \rightarrow \neg N(k, e) \wedge \neg P(k, e)$が成り立つ。これらをまとめると、［２］の⒡が帰結する。（証明終わり）

命題３と命題４から直ちに、時制関係語の公理系と現在化順序の公理系が論理的に同値であることが帰結する。

命題５　時制関係語の公理系［２］と現在化順序の公理系［４］は、論理的に同値である。

命題５により、現在化順序の関係語は、時制関係語に他ならないことが示された。そして、このことにより、［２］と［４］が、ともに、マクタガートの A 系列の特性［A1］と［A2］を捉えていることが示された。次に、この時制関係語を用いて、出来事についての順序関係を定義することができる。

［５］　時制関係語による出来事順序の定義

⒜　e_1と e_2が同時であるのは、ある段階で e_1と e_2がともに現在となるとき、かつ、そのときに限る〔$\forall e_1 \forall e_2\,(e_1 \sim e_2 \equiv \exists k\,(N(k, e_1) \wedge N(k, e_2)))$〕。

⒝　e_1が e_2より前であるのは、e_1を過去にし、e_2を現在にする段階が存在するとき、かつ、そのときに限る〔$\forall e_1 \forall e_2\,(e_1 < e_2 \equiv \exists k\,(P(k, e_1) \wedge N(k, e_2)))$〕。

このように出来事順序を定義すれば、出来事集合に関する B 系列が定まることが証

明できる。ここで、「出来事集合に関するB系列」とは、次の「出来事B系列の公理系」により定義される出来事系列である。また、これを、「弱B系列の公理系」とも呼ぶことにする。

［6］ 出来事B系列の公理系（即ち、弱B系列の公理系）は、次の公理から成り立つ。

(a) ～は同値関係。

(b) 出来事が自分自身より前になることは決してない〔$\forall e\ \neg e < e$〕。

(c) e_1がe_2より前で、e_2がe_3より前ならば、e_1はe_3より前である〔$\forall e_1 \forall e_2 \forall e_3 (e_1 < e_2 \land e_2 < e_3 \to e_1 < e_3)$〕。

(d) e_1がe_2と同時で、e_1がe_3より前ならば、e_2はe_3より前である〔$\forall e_1 \forall e_2 (e_1 \sim e_2 \land e_1 < e_3 \to e_2 < e_3)$〕。

(e) e_1がe_2と同時で、e_3がe_1より前ならば、e_3はe_2より前である〔$\forall e_1 \forall e_2 (e_1 \sim e_2 \land e_3 < e_1 \to e_3 < e_2)$〕。

(f) e_1がe_2より前か、e_1がe_2と同時か、e_2がe_1より前である〔$\forall e_1 \forall e_2 (e_1 < e_2 \lor e_1 \sim e_2 \lor e_2 < e_1)$〕。

出来事B系列の公理系を基礎に、現在関係語を用いて段階間の関係を適切に対応付けることにより、段階の間での線型順序を導き出すことも可能である。これは、出来事から時間順序へ至るひとつの方法を示している。

［7］ 出来事順序と時間順序の対応を表現する公理系

(a) すべての出来事は、唯一の段階で現在になる〔$\forall e \exists^{=1} k\ N(k, e)$〕。

(b) e_1がkで現在となり、e_2がmで現在となるなら、kとmが同一なこととe_1とe_2が同時なこととは、同値である〔$\forall k \forall m \forall e_1 \forall e_2 (N(k, e_1) \land N(m, e_2) \to (k = m \equiv e_1 \sim e_2))$〕。

(c) e_1がkで現在となり、e_2がmで現在となるなら、kがmより前なこととe_1がe_2より前なこととは、同値である〔$\forall k \forall m \forall e_1 \forall e_2 (N(k, e_1) \land N(m, e_2) \to (k < m \equiv e_1 < e_2))$〕。

補題1　時制関係語の公理系［2］から、$\forall k \forall m \forall e (N(k, e) \land P(m, e) \to k < m)$が帰結する。

証明：$P(m, e) \land N(k, e)$を仮定する。すると、［2］の(c)から、$k \neq m$が成立。$m < k$を仮定してみると、［2］の(e)から$P(k, e)$が成り立つ。これは、［2］の(c)に矛盾する。よって、［2］の(a)から、$k < m$が成り立つ。（証明終わり）

命題6　時制関係語の公理系［2］と時制関係語による出来事順序の定義［5］から、出来事B系列の公理系［6］が帰結する。また、［2］と［5］から、出来事順序と時間順序の対応を表現する公理系［7］も帰結する。

証明：　まず、時制関係語の公理系［２］と時制関係語による出来事順序の定義［５］を仮定する。すると、［２］の⒝と［５］の⒜から直ちに、$\forall e(e\sim e)$と$\forall e_1\forall e_2(e_1\sim e_2 \rightarrow e_2\sim e_1)$が帰結する。次に、同時性関係~の推移性を示すために、$e_1\sim e_2 \wedge e_2\sim e_3$を仮定しよう。すると、［５］の⒜から、$N(k, e_1) \wedge N(k, e_2) \wedge N(m, e_2) \wedge N(m, e_3)$を満たす$k$と$m$が存在する。このことと［２］の⒝から、$k = m$が帰結する。よって、$\exists k(N(k, e_1) \wedge N(k, e_3))$が成り立つ。だから、$e_1\sim e_3$が成立。よって、同時性関係~の推移性が成り立つ。だから、~は同値関係となり、［６］の⒜が示された。

［６］の⒝は、［５］の⒝と［２］の⒞から直ちに帰結する。

次に、［６］の⒞を示すために、$e_1 < e_2 \wedge e_2 < e_3$を仮定しよう。すると、［５］の⒝から、$P(k, e_1) \wedge N(k, e_2) \wedge P(m, e_2) \wedge N(m, e_3)$を満たす$k$と$m$が存在する。よって、補題１より、$k < m$が成り立つ。すると、［２］の⒠から$P(m, e_1)$が成り立つ。つまり、$P(m, e_1) \wedge N(m, e_3)$が成立。よって、［５］の⒝より、$e_1 < e_3$が成立し、［６］の⒞が示された。

次に、［６］の⒟を示すために、$e_1\sim e_2 \wedge e_1 < e_3$を仮定する。すると、［５］の⒜と⒝から、$N(k, e_1) \wedge N(k, e_2) \wedge P(m, e_1) \wedge N(m, e_3)$を満たす$k$と$m$が存在し、補題１から$k < m$が成り立つ。だから、［２］の⒟から$P(m, e_2)$が成立。よって、［５］の⒝から$e_2 < e_3$が成り立ち、［６］の⒟が示された。

次に、［６］の⒠を示すために、$e_1\sim e_2 \wedge e_3 < e_1$を仮定する。すると、［５］の⒜と⒝から、$N(k, e_1) \wedge N(k, e_2) \wedge P(m, e_3) \wedge N(m, e_1)$を満たす$k$と$m$が存在し、［２］の⒝から$k = m$が成り立つ。だから、代入により$P(k, e_3)$が成立。よって、［５］の⒝から$e_3 < e_2$が成り立ち、［６］の⒠が示された。

［２］の⒝から$N(k, e_1)$と$N(m, e_2)$を満たす唯一のkとmが存在する。また、［２］の⒜から$k < m \vee k = m \vee m < k$が成り立つ。$k < m$ならば、［２］の⒟から$P(m, e_1)$が成立。すると、［５］の⒝から$e_1 < e_2$が成り立つ。次に、$k = m$ならば、［５］の⒜から$e_1\sim e_2$が成り立つ。また、$m < k$ならば、［２］の⒟から$P(k, e_2)$が成立。すると、［５］の⒝から$e_2 < e_1$が成り立つ。これらから、$e_1 < e_2 \vee e_1\sim e_2 \vee e_2 < e_1$が帰結し、［６］の(f)が示された。以上から、［２］と［５］から［６］が帰結することが示された。

また、［７］の⒜は［２］の⒝と同じものである。そこで、［７］の⒝と⒞を示すために、$N(k, e_1) \wedge N(m, e_2)$を仮定する。すると、［５］の⒜と［２］の⒝より、$k = m \equiv e_1\sim e_2$が導かれる。よって、［７］の⒝は成り立つ。次に、$k < m$を仮定すると、［２］の⒟より$P(m, e_1)$が成立。すると、［５］の⒝より$e_1 < e_2$が成り立ち、$k < m \rightarrow e_1 < e_2$が示された。次に、$e_1 < e_2$を仮定する。すると、$N(m, e_2)$なので、［５］の⒝と［２］の⒝から$P(m, e_1)$が成立。よって、補題１より$k < m$となり、$e_1 < e_2 \rightarrow k < m$が示された。これらより、［７］の⒞が帰結するため、［７］が成り立つことが示された。

（証明終わり）

出来事Ｂ系列の公理系［６］は、弱すぎて、時制関係語の公理系［２］などを導き出すことはできない（命題15参照）。そこで、この公理系にさらに公理を付け加えて、超強Ｂ系列の公理系［10］のように、より強い表現力を持たせる必要がある。そこで、次の現在関係語への規定［８］を考慮する必要が出てくるのである。

［８］　現在関係語への規定
すべての時間段階には、そこで現在になる出来事がある〔$\forall k \exists e\ N(k, e)$〕。

この［８］の規定は、どんな時間段階においても、必ず、何かが起こっていることを表現している。言いかえれば、何も起こっていないような時間段階はないことになる。

［９］　弱Ｂ系列の公理系［６］と現在関係語と時間順序の対応を表現する公理系［７］を合わせたものを、「強Ｂ系列の公理系」と呼ぶ。

［10］　弱Ｂ系列の公理系［６］と現在関係語と時間順序の対応を表現する公理系［７］と［８］を合わせたものを、「超強Ｂ系列の公理系」と呼ぶ。

命題７　超強Ｂ系列の公理系［10］（＝［６］＋［７］＋［８］）から、このように定義された時間順序が線型順序をなすことが帰結する。

証明：超強Ｂ系列の公理系［10］（＝［６］＋［７］＋［８］）を仮定する。まず、時間順序の反反射律を示すことにする。そのために、$k < k$ となる k が存在すると仮定する。すると、［８］から、$N(k,\ e_1)$とする出来事 e_1が存在する。このとき、［７］の(c)から $e_1 < e_1$が成り立つが、これは、［６］の(b)に矛盾する。よって、$\forall k\ \neg k < k$ が成り立ち、反反射律が示された。

次に、時間順序の推移律を示すために、$k < m \land m < n$ を仮定する。すると、［８］から、$N(k,\ e_1) \land N(m,\ e_2) \land N(n,\ e_3)$とする出来事 e_1と e_2と e_3が存在する。このとき、［７］の(c)から $e_1 < e_2 \land e_2 < e_3$が成立。よって、［６］の(c)から、$e_1 < e_3$が成立し、［７］の(c)から $k < n$ が言える。つまり、推移律が示された。

次に、時間順序の比較律を示すことにする。まず、［７］の(a)から、任意の e_1と e_2について、$N(k, e_1) \land N(m, e_2)$を満たす唯一の k と m が存在する。最初に、$e_1 < e_2$を仮定すると、［７］の(c)から $k < m$ が成り立つ。次に、$e_1 \sim e_2$を仮定すると、［７］の(b)から $k = m$ が成り立つ。そして、$e_2 < e_1$を仮定すると、［７］の(c)から $m < k$ が成り立つ。よって、［６］の(f)と［８］から、時間順序の比較律が帰結する。

（証明終わり）

超強Ｂ系列の公理系［10］に［11］のような適切な過去関係語と未来関係語の定義を付け加えれば、時制関係語の公理系［２］などのＡ系列の記述に使用された公理系や定義を導き出すことができる（命題８～命題10）。

［11］ 過去関係語と未来関係語の定義

⒜ 出来事 e_1 が k で過去とは、k で現在の出来事で e_1 より後のものが存在するということである〔$\forall k \forall e_1 (P(k, e_1) \equiv \exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2))$〕。

⒝ 出来事 e_1 が k で未来とは、k で現在の出来事で e_1 より前のものが存在するということである〔$\forall k \forall e_1 (F(k, e_1) \equiv \exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_2 < e_1))$〕。

命題８ 超強 B 系列の公理系［10］（＝［６］＋［７］＋［８］）と過去関係語と未来関係語の定義［11］から、現在化順序の公理系［４］が帰結する。

証明：［４］の⒜は命題７で示されており、［４］の⒝は［７］の⒜と同じものである。

［４］の⒞を示すために、まず、$P(k, e_1)$ を仮定しよう。すると、［11］の⒜から、$N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2$ を満たす e_2 が存在する。また、［７］の⒜から、$N(m, e_1)$ となる m が存在する。すると、［７］の⒞から、$m < k$ が成立。よって、$\forall k \forall e_1 (P(k, e_1) \rightarrow \exists m (m < k \wedge N(m, e_1)))$ が示された。次に、$m < k \wedge N(m, e_1)$ を満たす m が存在すると仮定しよう。［８］から、$N(k, e_2)$ となる e_2 が存在する。すると、［７］の⒞から、$e_1 < e_2$ が成立。よって、［11］の⒜より、$P(k, e_1)$ が成立。つまり、$\forall k \forall e_1 (\exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2) \rightarrow P(k, e_1))$ が成立。これを前の結果と合わせると、［４］の⒞が帰結する。

同様に、［４］の⒟は、［７］と［８］と［11］の⒝を用いて示すことができる。

（証明終わり）

命題９ 時制関係語の公理系［２］は、超強 B 系列の公理系［10］（＝［６］＋［７］＋［８］）と過去関係語と未来関係語の定義［11］から、帰結する。

証明： 命題８より、［10］と［11］から［４］が帰結する。そして、命題４より、［４］から［２］が帰結する。よって、［10］と［11］から［２］が帰結する。 （証明終わり）

命題10 強 B 系列の公理系［９］（＝［６］＋［７］）と過去関係語と未来関係語の定義［11］から、時制関係語による出来事順序の定義［５］が帰結する。

証明：［５］の⒜を示すために、$e_1 \sim e_2$ を仮定。このとき、［７］の⒜から、$N(k, e_1) \wedge N(m, e_2)$ を満たす k と m が存在する。すると、［７］の⒝より、$k = m$ が成立。よって、$N(k, e_2)$ が成立。このことから、$\forall e_1 \forall e_2 (e_1 \sim e_2 \rightarrow \exists k (N(k, e_1) \wedge N(k, e_2)))$ が成立する。次に、$N(k, e_1) \wedge N(k, e_2)$ を満たす k が存在すると仮定する。すると、［７］の⒝より、$e_1 \sim e_2$ が成立。よって、$\forall e_1 \forall e_2 (\exists k (N(k, e_1) \wedge N(k, e_2)) \rightarrow e_1 \sim e_2)$ が成立する。これらをまとめると、［５］の⒜が成り立つことがわかる。

［５］の⒝を示すために、$e_1 < e_2$ を仮定。このとき、［７］の⒜から、$N(k, e_2)$ を満たす k が存在する。すると、［11］の⒜より、$P(k, e_1)$ が成立。よって、$\forall e_1 \forall e_2 (e_1 < e_2 \rightarrow \exists k (P(k, e_1) \wedge N(k, e_2)))$ が成立する。次に、$P(k, e_1) \wedge N(k, e_2)$ を満た

す k が存在すると仮定する。すると、[11] の(a)より、$N(k, e_3) \wedge e_1 < e_3$ 満たす e_3 が存在する。ここで、[7] の(b)を適用すると、$e_2 \sim e_3$ が得られる。だから、[6] の(e)より、$e_1 < e_2$ が成立。よって、$\forall e_1 \forall e_2 (\exists k (P(k, e_1) \wedge N(k, e_2)) \rightarrow e_1 < e_2)$ が成立する。これらをまとめると、[5] の(b)が成り立つことがわかる。　　（証明終わり）

命題11　現在化順序の公理系 [4] と時制関係語による出来事順序の定義 [5] と現在関係語への規定 [8] から、過去関係語と未来関係語の定義 [11] が帰結する。

証明：[11] の(a)を示すために、$P(k, e_1)$を仮定。ところで、[8] より、$N(k, e_2)$を満たす e_2 が存在する。すると、[5] の(b)より、$e_1 < e_2$ が成立。だから、$N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2$ を満たす e_2 が存在する。よって、$\forall e_1 \forall e_2 (P(k, e_1) \rightarrow \exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2))$ が成立する。次に、$N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2$ を満たす e_2 が存在すると仮定する。また、[5] の(b)より、$P(m, e_1) \wedge N(m, e_2)$を満たす m が存在する。すると、[4] の(b)より、$k = m$ が成立。よって、$P(k, e_1)$が成り立つ。だから、$\forall e_1 \forall e_2 (\exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2) \rightarrow P(k, e_1))$ が成立。これらをまとめると、[11] の(a)が成り立つことがわかる。

命題４と命題６から、[4] と [5] から [7] の(c)が帰結することが言える。ここで、[11] の(b)を示すために、$F(k, e_1)$を仮定。すると、[4] の(d)より、$k < m \wedge N(m, e_1)$ を満たす m が存在する。また、[8] より、$N(k, e_2)$を満たす e_2 が存在する。ここで、[7] の(c)を用いると $e_2 < e_1$ となり、$\exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_2 < e_1)$ が帰結し、$\forall e_1 \forall e_2 (F(k, e_1) \rightarrow \exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_2 < e_1))$ が成立する。次に、$N(k, e_2) \wedge e_2 < e_1$ を満たす e_2 が存在すると仮定する。ここで、[4] の(b)より、$N(m, e_1)$を満たす m が存在する。すると、[7] の(c)から $k < m$ となり、[4] の(d)から $F(k, e_1)$ が帰結する。よって、$\forall e_1 \forall e_2 (\exists e_2 (N(k, e_2) \wedge e_1 < e_2) \rightarrow P(k, e_1))$ が成立。これらをまとめると、[11] の(b)が成り立つことがわかる。　　（証明終わり）

ここで得られた結論を図示してまとめると、図１のようになる。

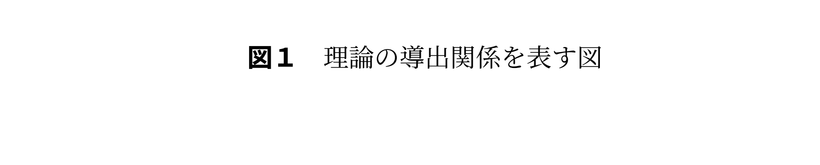

図１　理論の導出関係を表す図

A系列の記述	［1］	インデックスつき時制述語の公理系
	［2］	時制関係語の公理系
	［3］	時制述語と時制関係語の対応規定
	［4］	現在化順序の公理系
	［5］	時制関係語による出来事順序の定義
B系列の記述	［6］	弱 B 系列の公理系
	［7］	出来事順序と時間順序の対応を表現する公理系
	［8］	現在関係語への規定
	［9］	強 B 系列の公理系（［9］＝［6］＋［7］）
	［10］	超強 B 系列の公理系（［10］＝［9］＋［8］）
	［11］	過去関係語と未来関係語の定義

表１　公理系の番号表示

これで、本稿における公理系の提案は終わる。ここで、マクタガートの時間論と提案された公理系の関係を捉えなおしてみよう。

マクタガートが考えた A 系列は、時制関係語の公理系［2］で表現できる。それは、マクタガートによる A 系列の特徴付け［A1］と［A2］から帰結することに見ることができる。そして、この公理系［2］は、出来事が現在化する順序を表現した公理系［4］と論理的に同値である（命題５）。一方、「より前」や「同時」という出来事の順序に関する関係を表現したのが、弱 B 系列の公理系［6］である。この公理系［6］は、出来事の集合を弱線型順序集合として捉える。ところで、マクタガートが与える B 系列の記述は、曖昧である。「より前」のような順序関係の対象となっているのは、出来事のみではなく、時点も含まれているように思われる。このように解釈した場合には、マクタガートの B 系列は、［6］と［7］を合わせた強 B 系列の公理系［9］によって捉えられると考えた方が適切だろう。

マクタガートは、A 系列の方が B 系列よりも根本的だと考えたが、これは、時制関係語の公理系［2］に出来事順序の定義［5］を付け加えることにより強 B 系列の公理系［9］が導出できるという意味において正しい（命題６）。逆に、強 B 系列の公理系［9］に未来と過去の定義［11］を付け加えるだけでは、［2］も［4］も導き出すことができない（命題15）。それは、どんな出来事も起こらないような時点が存在する可能性が［9］の想定では、なお、残されており、［9］からは、時間段階の線型性を導くことができないからである。超強 B 系列の公理系［10］では、［8］の条件を加え、どんな時点でも必ず何かが起こるものと規定することにより、［11］のような過去関係語と未来関係語の適切な定義を与えさえすれば、［4］や［5］を帰結できるものとなっている（命題９）。

3．時間構造

マクタガートは、A 系列は矛盾すると考えた。しかし、私は、本稿でこれが誤りであることを示したい。実際、第２節で導入したすべての公理系が無矛盾であることを、それらの公理系を真にする時間構造の存在を示すことで証明することができる（命題12）。この節では、そのような時間構造を定義により導入する。このことにより、第２節の公理系が何を描いていたかも、明らかになるだろう。

［12］　次の条件を満たす二種論理の構造（$(\mathbf{A},\mathbf{E})$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}$, $<_{\mathbf{A}}$）を「時制関係構造」と呼ぶ。

⒜　$\mathbf{f}$ は $\mathbf{E}$ から $\mathbf{A}$ への関数である。

⒝　$(\mathbf{A}, <_{\mathbf{A}})$は、線型順序構造。

⒞　$\mathbf{N} := \{<\mathbf{k},\mathbf{e}>:\ \mathbf{e}\in\mathbf{E}\ \&\ \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{e})\}$.

⒟　$\mathbf{P} := \{<\mathbf{k},\mathbf{e}>:\ \mathbf{e}\in\mathbf{E}\ \&\ \exists\mathbf{m}\in\mathbf{A}(\mathbf{m} <_{\mathbf{A}} \mathbf{k}\ \&\ <\mathbf{m},\mathbf{e}>\in\mathbf{N})\}$.

⒠　$\mathbf{F} := \{<\mathbf{k},\mathbf{e}>:\ \mathbf{e}\in\mathbf{E}\ \&\ \exists\mathbf{m}\in\mathbf{A}(\mathbf{k} <_{\mathbf{A}} \mathbf{m}\ \&\ <\mathbf{m},\mathbf{e}>\in\mathbf{N})\}$.

命題12

⒜　すべての時制関係構造は、現在化順序の公理系［４］のモデルである。

⒝　すべての時制関係構造は、時制関係語の公理系［２］のモデルである。

⒞　現在化順序の公理系［４］は、無矛盾である。

⒟　時制関係語の公理系［２］は、無矛盾である。

<u>証明</u>：任意の時制関係構造 M（M = （$(\mathbf{A},\mathbf{E})$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}$, $<_{\mathbf{A}}$））を考えよう。すると、［４］の⒜は、［12］の⒝より M で真となる。また、［４］の⒝は、［12］の⒜と⒞より M で真。［４］の⒞と⒟は、それぞれ、［12］の⒟と⒠より M で真。よって、M は［４］のモデルとなり、命題12の⒜は示された。

次に、命題12の⒝は、命題５から［２］と［４］が論理的に同値なので、命題12の⒜から直ちに帰結する。また、モデルが存在する公理系は無矛盾なので、命題12の⒞と⒟が成り立つ。　（証明終わり）

［13］　次の条件を満たす（$(\mathbf{A},\mathbf{E})$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}$, $\sim_{\mathbf{E}}$, $<_{\mathbf{E}}$, $<_{\mathbf{A}}$）を「拡張時制関係構造」と呼ぶ。

⒜　（$(\mathbf{A},\mathbf{E})$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}$, $<_{\mathbf{A}}$）は、時制関係構造。

⒝　$\sim_{\mathbf{E}}\ := \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>:\ \mathbf{e}_1\in\mathbf{E}\ \&\ \mathbf{e}_2\in\mathbf{E}\ \&\ \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)\}$.

⒞　$<_{\mathbf{E}}\ := \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>:\ \mathbf{e}_1\in\mathbf{E}\ \&\ \mathbf{e}_2\in\mathbf{E}\ \&\ \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) <_{\mathbf{A}} \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)\}$.

命題13　すべての拡張時制関係構造は［４］と［５］のモデルである。

<u>証明</u>：命題12の⒜より、時制関係構造は［４］のモデルである。よって、［13］の⒜より、拡張時制関係構造は［４］のモデルとなる。

ここで、任意の拡張時制関係構造 M（M = （$(\mathbf{A},\mathbf{E})$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}$, $\sim_{\mathbf{E}}$, $<_{\mathbf{E}}$, $<_{\mathbf{A}}$））を考えよ

う。すると、[12] の(c)と [13] の(b)から、次のことが成り立つ：$\sim_{\mathbf{E}} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)\} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \,\&\, <\mathbf{f}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1> \in \mathbf{N} \,\&\, <\mathbf{f}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N}\} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \exists^{=1}\mathbf{k} \in \mathbf{A}\,(<\mathbf{k}, \mathbf{e}_1> \in \mathbf{N} \,\&\, <\mathbf{k}, \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N})\} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \exists \mathbf{k} \in \mathbf{A}(<\mathbf{k}, \mathbf{e}_1> \in \mathbf{N} \,\&\, <\mathbf{k}, \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N})\}$. よって、M は［5］の(a)を真にする。また、同様に、[12] の(c)と [13] の(c)から、次のことが成り立つ：$<_{\mathbf{E}} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) <_{\mathbf{A}} \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)\} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) <_{\mathbf{A}} \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \,\&\, <\mathbf{f}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1> \in \mathbf{N} \,\&\, <\mathbf{f}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N}\}$. そこで、[12] の(c)と(d)から、次のようになる：$<_{\mathbf{E}} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \exists \mathbf{m} \in \mathbf{A}(\mathbf{m} <_{\mathbf{A}} \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \,\&\, <\mathbf{m}, \mathbf{e}_1> \in \mathbf{N}) \,\&\, <\mathbf{f}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N}\} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, <\mathbf{f}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_1> \in \mathbf{P} \,\&\, <\mathbf{f}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N}\} = \{<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E} \,\&\, \exists \mathbf{k} \in \mathbf{A}(<\mathbf{k}, \mathbf{e}_1> \in \mathbf{P} \,\&\, <\mathbf{k}, \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N})\}$. よって、M は［5］の(b)を真にする。これらから、M が［5］のモデルとなることが帰結する。（証明終わり）

[14]　次の条件を満たす$(\mathbf{E}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}})$を「弱 B 系列構造」と呼ぶ。

(a)　$\sim_{\mathbf{E}}$ は同値関係。

(b)　$(\mathbf{E}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}})$は、（弱）線型順序構造。つまり、$(\mathbf{E}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}})$は、［6］のモデルである。

[15]　次の条件を満たす$((\mathbf{A}, \mathbf{E}), \mathbf{N}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{D}})$を「強 B 系列構造」と呼ぶ。ただし、$\mathbf{D}$ は $\mathbf{E}$ から $\mathbf{A}$ への関数 $\mathbf{f}$ の値域とする〔$\mathbf{D} := \{\mathbf{k}: \mathbf{e} \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{e})\}$〕。

(a)　$(\mathbf{E}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}})$は、弱 B 系列構造。

(b)　$\mathbf{f}$ は $\mathbf{E}$ から $\mathbf{A}$ への関数であり、任意の $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{E}$, $\mathbf{e}_2 \in \mathbf{E}$ について、$(\mathbf{e}_1 \sim_{\mathbf{E}} \mathbf{e}_2 \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_2))$が成り立つ。

(c)　$\mathbf{N} := \{<\mathbf{k}, \mathbf{e}>: \mathbf{e} \in \mathbf{E} \,\&\, \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{e})\}$.

(d)　任意の $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{E}$, $\mathbf{e}_2 \in \mathbf{E}$ について、$(\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) <_{\mathbf{D}} \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \Leftrightarrow \mathbf{e}_1 <_{\mathbf{E}} \mathbf{e}_2)$が成り立つ。

[16]　次の条件を満たす$((\mathbf{A}, \mathbf{E}), \mathbf{N}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{A}})$を「超強 B 系列構造」と呼ぶ。

(a)　$((\mathbf{A}, \mathbf{E}), \mathbf{N}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{A}})$は、強 B 系列構造。

(b)　$\mathbf{f}$ は全射（surjection）である。つまり、$\mathbf{f}$ の値域は $\mathbf{A}$ に等しい。

[17]　次の条件を満たす$((\mathbf{A}, \mathbf{E}), \mathbf{N}, \mathbf{P}, \mathbf{F}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{A}})$を「拡張超強 B 系列構造」と呼ぶ。

(a)　$((\mathbf{A}, \mathbf{E}), \mathbf{N}, \sim_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{E}}, <_{\mathbf{A}})$は、超強 B 系列構造。

(b)　$\mathbf{P} := \{<\mathbf{k}, \mathbf{e}_1>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \exists \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E}(<\mathbf{k}, \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N} \,\&\, \mathbf{e}_1 <_{\mathbf{E}} \mathbf{e}_2)\}$.

(c)　$\mathbf{F} := \{<\mathbf{k}, \mathbf{e}_1>: \mathbf{e}_1 \in \mathbf{E} \,\&\, \exists \mathbf{e}_2 \in \mathbf{E}(<\mathbf{k}, \mathbf{e}_2> \in \mathbf{N} \,\&\, \mathbf{e}_2 <_{\mathbf{E}} \mathbf{e}_1)\}$.

命題14

(a)　すべての弱 B 系列構造は、弱 B 系列の公理系［6］のモデルである。

(b)　すべての強 B 系列構造は、強 B 系列の公理系［9］のモデルである。

(c)　すべての超強 B 系列構造は、超強 B 系列の公理系 [10] のモデルである。

⒟　すべての拡張超強 B 系列構造は、超強 B 系列の公理系［10］と過去関係語と未来関係語の定義［11］のモデルである。

⒠　すべての拡張超強 B 系列構造は、現在化順序の公理系［４］と時制関係語による出来事順序の定義［５］と現在関係語への規定［８］のモデルである。

⒡　超強 B 系列の公理系［10］と過去関係語と未来関係語の定義［11］を統合した体系は、無矛盾である。

⒢　現在化順序の公理系［４］と時制関係語による出来事順序の定義［５］と現在関係語への規定［８］を統合した体系は、無矛盾である。

証明：　弱 B 系列構造の定義［14］により、この構造が［６］のモデルとなることは明らかである。よって、命題14の⒜は満たされている。

［15］の⒜から、任意の強 B 系列構造 M_1 は［６］のモデルとなる。そして、［15］の⒞から、M_1 が［７］の⒜を真にすることがわかる。また、同じく［15］の⒞から、$<\mathbf{k},\mathbf{e}> \in \mathbf{N} \Leftrightarrow \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{e})$が成り立つ。だから、［15］の⒝から、$\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) \ \& \ \mathbf{m} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \Rightarrow (\mathbf{k} = \mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{e}_1 \sim_{\mathbf{E}} \mathbf{e}_2)$が成り立ち、$M_1$ は［７］の⒝を真にすることが確かめられる。同様に、［15］の⒟から、$\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) \ \& \ \mathbf{m} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \Rightarrow (\mathbf{k} <_{\mathbf{D}} \mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{e}_1 <_{\mathbf{E}} \mathbf{e}_2)$が成り立ち、$M_1$ は［７］の⒞を真にする。［９］＝［６］＋［７］なので、これらから命題14の⒝が満たされていることがわかる。

［16］の⒝から、$\mathbf{D} = \mathbf{A}$ が帰結する。すると、［16］の⒜と命題14の⒝から、任意の強 B 系列構造 M_2 は［９］のモデルとなる。また、［16］の⒝から、$\mathbf{f}$ の値域は $\mathbf{A}$ となるので、任意の $\mathbf{A}$ の要素 $\mathbf{k}$ について $\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{e})$となる $\mathbf{E}$ の要素 $\mathbf{e}$ が存在することになり、［８］は M_2 で真となる。［10］＝［９］＋［８］なので、これらから命題14の⒞が満たされていることがわかる。

［17］の⒜と命題14の⒞から、任意の拡張超強 B 系列構造 M_3 は［10］のモデルとなる。また、［17］の⒝と⒞から、M_3 は［11］のモデルとなる。よって、命題14の⒟は満たされる。

命題８と命題10より、［10］と［11］から［４］と［５］と［８］が帰結することがわかる。命題14の⒟より、任意の拡張超強 B 系列構造 M_3 は［10］と［11］のモデルなのだから、M_3 は［４］と［５］と［８］のモデルともなる。よって、命題14の⒠は満たされる。

また、命題14の⒟から、［10］と［11］を統合した公理系のモデルが存在し、この公理系は無矛盾である。よって、命題14の⒡は満たされている。

そして、命題14の⒠から、［４］と［５］と［８］を統合した公理系のモデルが存在し、この公理系は無矛盾である。よって、命題14の⒢は満たされている。

（証明終わり）

以上のことから、第２節で扱われた公理系は、すべて無矛盾であることが帰結する。

また、最後に、強 B 系列の公理系の表現力の弱さを示す命題を証明しておく。

命題15 強 B 系列の公理系［9］（［9］＝［6］＋［7］）と未来と過去の定義［11］からは、［4］は帰結しない。

証明：［9］と［11］のモデルで［4］のモデルでないものがあることを示せばよい。構造 M = ((**A**,**E**), **N**, **P**, **F**, $\sim_{\mathbf{E}}$, $<_{\mathbf{E}}$, $<_{\mathbf{A}}$)を、次のように規定する：**A** = { **1**, **2**, **3**, **a**}, **E** = { $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$}, **D** = { **1**, **2**, **3** }, **N** = {< **1**, $\mathbf{e}_1$ >, < **2**, $\mathbf{e}_2$ >, < **3**, $\mathbf{e}_3$ >}, **P** = {< **2**, $\mathbf{e}_1$ >, < **3**, $\mathbf{e}_1$ >, < **3**, $\mathbf{e}_2$ >}, **F** = {< **1**, $\mathbf{e}_2$ >, < **1**, $\mathbf{e}_3$ >, < **2**, $\mathbf{e}_3$ >}, $\sim_{\mathbf{E}}$ = {< $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1$ >, < $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2$ >, < $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3$ >}, $<_{\mathbf{E}}$ = {< $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ >, < $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ >, < $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ >}, $<_{\mathbf{A}}$ = {< **1**, **2** >, < **1**, **3** >, < **2**, **3** >}, **a**≠**1**, **a**≠**2**, **a**≠**3**. すると、M は［6］を真にすることが容易に確かめられる。同様に、M は［7］を真にすることがわかる。よって、M は［9］を真にする。また、M が［11］を真にすることも容易に確かめられる。しかし、M は、**a** が比較不可能なため、比較律$\forall k \forall m$ $(k < m \vee k = m \vee m < k)$を満たさず、［4］の(a)を真にしない。このことから、［9］と［11］のモデルで［4］のモデルでないものが存在することが帰結する。よって、命題15が成り立つ。（証明終わり）

4．結　論

私は、本稿において、マクタガートが導入した A 系列と B 系列の概念を厳密に描写することを試みた。このような明確化は、マクタガートの時間論を議論するときの基礎を与えるはずである。ここで、今までの考察で得られた結果をまとめておきたい。

［18］ 本稿からの帰結

(a) ［A1］と［A2］にまとめられたマクタガートの記述は、A 系列の記述として十分なものである。このマクタガートの記述は、時制関係語の公理系［2］により厳密に表現された。この公理系の本質的部分は次のようにまとめられる：

　出来事は、瞬間において成立し、現在と過去は両立しない。そして、現在の出来事は、必ず、後に過去となり、過去である出来事は後にも過去にとどまる。そして、未来の出来事は、現在でも過去でもないものとして定義できる。

(b) A 系列は、現在化順序の線型列としても表現できる。この考えを表現したのが、現在化順序の公理系［4］である。この公理系の本質的部分は次のようにまとめられる：

　出来事は、必ず、現在となる瞬間を持つ。そして、出来事がいつ現在となるかについて、線型順序関係が成り立つ。この現在化の順序に従って、出来事を線型に並べることができる。このとき、「過去の出来事」は、「すでに現在化した出来事」として、そして、「未来の出来事」は、「これから現在化する出来事」として定義できる。

⒞　時制関係語の公理系［２］と現在化順序の公理系［４］は、論理的に同値である（命題５）。つまり、A 系列は、出来事が未来から現在を経由して過去へと過ぎ去るものとして記述することもでき、また、出来事どもが順々に現在化していく過程としても記述することもできる。

⒟　現在化順序の公理系［４］による A 系列の記述も時制関係語の公理系［２］による A 系列の記述も、無矛盾である。このことは、命題14の⒢と命題５から直ちに帰結する。

⒠　マクタガートが述べた B 系列の規定は、曖昧である。まず、B 系列を出来事の（弱）線型順序構造として解することが可能である。このことを表現しているのが、弱 B 系列の公理系［６］である。

⒡　弱 B 系列の公理系［６］は、出来事を単に線型に並べたものであり、かなり弱いものである。そのような出来事の（弱）線型順序列には、時間的要素はまったく現れない。時間的要素を導入するひとつの方法は、出来事の現在化順序を、出来事順序を基礎にして導入することである。このようにして得られるのが、強 B 系列の公理系［９］（［９］＝［６］＋［７］）である。現在化順序の公理系［４］では、時間の線型性がすでに前提されていた（［４］の⒜）。これに対し、強 B 系列の公理系では、時間的要素は、あくまで、出来事の（弱）線型順序構造を基盤にして、これに依存して導入されている。

⒢　A 系列を記述している［４］や［２］の公理系は、B 系列を記述している［６］や［９］の公理系よりも強いものである。つまり、［４］や［２］に出来事順序の定義［５］を加えたものから［６］や［９］は帰結するが（命題６）、［９］に過去関係語と未来関係語の定義［11］を加えても、［４］や［２］は帰結しない（命題15）。

⒣　出来事の順序から出発して時間を規定するためには、どんな時点においてもそこで成立している出来事がなければならない。つまり、どんな時点においても必ず何かが起こっているという条件が必要となる。この条件を表現しているのが、規定［８］である。［８］は、「どんな時点においても、必ず、何かが起きている」ということを主張している。超強 B 系列の公理系［10］は、強 B 系列の公理系［９］にこの条件［８］を加えたものである。［10］に時制関係語の定義［11］を加えると、A 系列を記述する公理系である［４］や［２］を導出できる（命題９と命題10）。

⒤　何が A 系列の時間記述にとって重要なのか？　公理系［４］と［２］は、［２］の公理⒜と⒝を共有している。これらは、出来事が次々と現在化されていることを表している。つまり、出来事が現在という場に次々と現れてくることが、A 系列の時間構成の本質的特徴と思われる。

以上、本稿から得られた帰結をまとめてみた。本稿では、一貫して、出来事は一瞬の間に成立し過ぎ去っていくものとして考えられている。これは、明言されていないが、マクタガートの時間論が暗に前提としているものである。出来事が時間的幅を持つこと

を認めたとき、その論理的分析は、本稿で行った分析よりずっと複雑になることが予想される。

分析哲学において、メラーの『実在する時間』（1981）の登場以来〔Mellor（1981）〕、A系列こそが実在するというA論者とB系列こそが実在するというB論者の論争が再燃し、現在に至っている。それらの議論の論争点を検討するためにも、本稿におけるA系列とB系列の論理的分析は、検証の基盤を提供できるものである。また、本稿では、A系列という記述は矛盾しないことが証明されている。だから、本稿におけるA系列の解釈が正しいものであるなら、時間は実在しないというマクタガートの論証の誤りが帰結する。

私は、A論者とB論者という対立の構図が正しいものとは思っていず、マクタガートの時間論は、時間に関する諸現象の一部しか捉えていないと考えている。このことに関する詳しい議論は、拙著『時間論の構築』で展開されているので参照されたい〔中山(2003)〕。

注

1）かつて、私は、中山（1996）において、マクタガートの議論を形式化することにより、明確化することを試みた。本稿は、かつての試みを改善することも意図されている。

2）引用ページは、Poidevin and MacBeath（1993）のページ数をさしている。これは、『存在の本性』第33章を収録したものである〔McTaggart（1927）〕。また、マクタガートの時間論は、McTaggart（1908）においても展開されている。そして、永遠と時間の関係はMcTaggart（1907）で論じられており、そこでは、実在するものは時間なしの現実だという彼の形而上学が明らかにされている。

参考文献

McTaggart, J. M. E.（1907）“The Relation of Time and Eternity,” reprinted in *Mind* 18（1909）, pp. 349－362, reprinted in McTaggart（1934）.

――（1908）“The Unreality of Time” in : *Mind*, 17, pp. 457－74, reprinted in McTaggart（1934）.

――（1927）*The Nature of Existence*, Chapter 33 “Time,” Cambridge University Press.

――（1934）*Philosophical Studies*, Edward Arnold.

Mellor, D.H.（1981）*Real Time*, Cambridge : Cambridge University Press.

中山康雄（1996）「時間の本性―体験される時間からの出発」『大阪大学人間科学部紀要』22, pp.297－317.

中山康雄（2003）『時間論の構築』勁草書房.

Poidevin, R.L. and MacBeath, M.（eds.）（1993）*The Philosophy of Time*, Oxford University Press.

Analysis of Time Structures
— Formal Representations of McTaggart's Theory of Time —

Yasuo NAKAYAMA

In Chapter 3 of my book, *The Construction of Time Theory* (2003), McTaggart's theory of time was analyzed and examined. There, I used some propositions without giving any proof. In order to keep the book readable, inaccurate descriptions were sometimes deliberately used. The aim of this paper is to resolve these insufficiencies by formulating exact and rigorous statements. I propose axiomatic systems that characterize *A-series* and *B-series* proposed by McTaggart, then prove theorems that describe relations between these axiomatic systems, and finally ensure their consistency.

Results of this paper can be summarized as follows :

(a) *Axiomatic system of tense-relation terms* ([2]) characterizes the essential content of A-series. According to [2], every event occurs at a unique time instance ; the present and the past are incompatible ; every present event becomes past ; every past event remains as past ; and future events can be defined as events that are neither present nor past.

(b) A-series can be also characterized through *axiomatic system of present-ordering* ([4]). This system asserts that every event becomes present at a unique time instance and these time instances are linearly ordered. Then, past events can be defined as events that have already become present. Similarly, future events are events that will become present.

(c) *Axiomatic system of tense-relation terms* ([2]) and *axiomatic system of present-ordering* ([4]) are logically equivalent.

(d) Axiomatic systems [2] and [4] are consistent.

(e) McTaggart's characterization of B-series is vague. *Axiomatic system of weak B-series* ([6]) characterizes B-series as a linearly ordered (weak) structure of events.

(f) *Axiomatic system of strong B-series* ([9]) adds three axioms to [6] in order to introduce time instances based on *event-ordering*. Like [4], [9] accepts that every event becomes present at a unique time instance.

(g) Both [2] and [4] are stronger than [6] and [9]. If we add *definition of event-ordering* ([7]) to [2] or [4], [6] and [9] can be derived from them.

(h) *Super strong B-series* ([10]) consists of [9] and axiom [8]. This axiom expresses that something happens at any time instance. From [10] and *definition of tense-relation terms* ([11]), [2] and [4] can be inferred.

（i）What is the core characterization for A−series? Axiomatic systems ［2］ and ［4］ share an axiom expressing that events become present one after another. Thus, it can be seen as the fundamental property of A−series that every event becomes present at a unique time instance.