



Title	非線形ダイナミカルシステムの安定性および可解性に関する研究
Author(s)	太田, 有三
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/997
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

非線形ダイナミカルシステムの安定性 および可解性に関する研究

昭和52年1月

太 田 有 三

序 文

本論文は、著者が大阪大学大学院工学研究科博士課程（電気工学専攻）在学中に行った研究のうち、非線形ダイナミカルシステムの安定性および可解性に関する研究をまとめたもので、本文は次の8章から成っている。

第1章は緒論で、本研究の目的ならびにその工学的意義、およびこの分野での研究の現状について述べ、本研究の新しい諸結果について概説している。

第2章では数学的な準備を行う。ここでは、本論文を通じて重要な役割を果すループ関数およびその拡張であるスケルトン関数を導入し、それらの性質、値、両者の関係などを明らかにしている。さらに、種々の行列のクラスとループ関数の関係、双対写像とスケルトンとの等価性を示している。これによって、スケルトン、ループ関数の持つ意味、有効な範囲を明らかにするとともに、従来個々別々に定められてきた受動性、単調性の概念の整理、統一を試みている。

第3章では、発表論文(1)、(2)を中心に平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について考察している。ここでは、唯一解の存在、および解の入力、パラメータに関する連続性を保証する実用的方法シヤープな結果を示している。これらは、二・三の例外を除いて、従来知られていろほんど全ての結果をその特殊な場合として含んでいる。

第4章では、非線形常微分方程式の可解性と安定性、そしてそれらの応用として周期系における周期解の発生について考察している。まず可解性については、2つのタイプの結果を示している。1つは、通常の初期値問題の取り扱い方に沿って得られるもので、従来知られている結果の実用的な十分条件を明らかにしたものであり、もう1つは、安定性を考慮するために前者のように大域的な条件を必要とするものである。又、安定性については、指數安定性および有界入力有界状態安定性について若干の結果を示している。さらに、周期系における周期解の存在とその安定性については、発表論文(3)～(5)の結果を若干改良した結果を示している。

第5章では、発表論文(1), (2), (6), (7)を中心に平衡点方程式に対する反復法の適用とその収束性について考察している。ここではまず非線形ヤコビ法および非線形SORの収束性について新しい収束条件を明らかにしている。又、線形方程式に対するSOR法に関してよく知られているオストロフスキーライクの定理が非線形SOR法についてもある程度拡張できることも示されている。次にSandbergの反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を提案し、それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを明らかにしている。

第6章では、発表論文(2), (8), (9)を中心に関数解析的アプローチによって非線形フィードバック系の出入力安定、すなわち、有界性と連続性について考察している。この手法による安定定理は、基本的な2つの定理、すなわち、スモールゲイン定理と受動定理に基づいている。ところで、前者はノルム空間において適用できるものに対し、後者は内積空間のみにおいて適用できるものである。ここでは、受動定理を一般的のバナッハ空間へ拡張できることを示している。

第7章では、発表論文(10)を中心に、ある種の物理的制約条件を有する非線形ダイナミカルシステムについて考察している。ここではまず最初解の非負性について考察し、その必要十分条件を明らかにしている。さらにこれを用いて、安定性、および定常解の存在とその安定性について論じている。ここで得られる結果は対象とするシステムの構造、特性の特殊性を利用することによって、一般的なシステムに対する結果に比べ、非常にシャープな結果となっている。

第8章は結論で、本研究で得られた主な結果をまとめている。

開連発表論文

- (1) 太田, 晴玉: 非線形方程式の解の存在と唯一性について, 信学会, 回路とシステム理論研資, CST75-103(昭51-01).
- (2) Y. OHTA: MONOTONE NONLINEAR MAPPINGS IN GENERAL BANACH SPACES : THE SOLVABILITY AND A SOLUTION ALGORITHM, SIAM J. APPL. MATH. (投稿中)
- (3) 太田, 羽根田, 丸橋: 非線形周期系における周期解の存在と安定性について, 信学会論(A), 58-A.2, pp. 105-112 (昭50-02).
- (4) 太田, 羽根田, 丸橋: 周期系における周期解の発生条件, 信学会, 回路とシステム理論研資 CT73-15 (昭48-05).
- (5) 太田, 羽根田, 丸橋: 周期系における周期解の発生条件, 第3回ダイナミカルシステムシンポジウム予稿集, pp. 11-14 (昭48-07).
- (6) 太田: 直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について, 信学会論(A), 59-A.6, pp. 498-505 (昭51-06).
- (7) 太田: 直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について, 信学会, 回路とシステム理論研資, CST75-6 (昭50-05).
- (8) 太田, 鐘ヶ江, 晴玉: 作用素のメジャーによる非線形離散直斐ードバック系の安定解析, 信学会論(D), 59-D.8, pp. 545-552 (昭51-08).
- (9) 鐘ヶ江, 太田: 関数解析的アプローチによる斐ードバック系の入出力安定: 受動定理の拡張, 信学会, 回路とシステム理論研資, CST75-47 (昭50-07).
- (10) 太田, 前田, 晴玉: ある種の物理的制約条件を持つ非線形システムの解析, 信学会, 回路とシステム理論研資, CST76-103 (昭51-11).

目 次

第 1 章 緒 論	1
第 2 章 數學的準備	10
2・1 緒 言	10
2・2 写像のクラス	10
2・3 え関数, ハ関数	15
2・3・1 定義と性質	15
2・3・2 え関数とハ関数の関係	22
2・3・3 え関数, ハ関数の値	26
2・3・4 行列のクラスとハ関数の関係	33
2・3・5 受動性, 単調性, 双対写像とえ関数	35
2・4 縮小写像原理	42
2・5 緒 言	44
第 3 章 平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性	45
3・1 緒 言	45
3・2 可 解 性	46
3・2・1 接続の性質と同相写像	46
3・2・2 局所的同相写像	50
3・2・3 同相写像のための実用的十分条件	55
3・3 パラメータに関する連続性	57
3・4 応 用 例	61
3・4・1 非線形RLMC回路における状態方程式の導出	61
3・4・2 非線形抵抗回路における直流解析への応用	65
3・5 緒 言	74

第 4 章 非線形常微分方程式の可解性および安定性	75
4・1 緒 言	75
4・2 非線形常微分方程式の可解性	75
4・2・1 解の存在と一意性	75
4・2・2 初期状態、入力、パラメータに関する連続性	81
4・3 安定性の可解性	85
4・3・1 安定性	85
4・3・2 安定性と可解性	90
4・4 周期系への応用	92
4・4・1 周期解の存在と安定性	92
4・4・2 応用例	96
4・5 緒 言	107

第 5 章 平衡点方程式に対する反復法およびその収束性	108
5・1 緒 言	108
5・2 非線形ヤコビ法、非線形SOR法	108
5・2・1 線形方程式に対する収束性	108
5・2・2 非線形方程式に対する収束性	113
5・3 Sandbergの反復法	121
5・4 応用例	127
5・4・1 直交解析への応用	127
5・4・2 周期系への応用	132
5・5 緒 言	134

第 6 章 フィードバック系の入出力安定解析	135
6・1 緒 言	135
6・2 システムの記述、有界性、連続性	135
6・3 有界性についての結果	137

6 · 4	連續性についての結果	140
6 · 5	応用例	142
6 · 6	結言	148
第 7 章	ある種の物理的制約条件を有する系の安定解析	150
7 · 1	緒言	150
7 · 2	解の非負性	150
7 · 3	安定性	154
7 · 4	定常解の存在とその安定性	159
7 · 5	応用例	162
7 · 6	結言	166
第 8 章	結論	167
謝 辞		169
文 献		170

諸記号

\mathbb{R}	: 実数体
\mathbb{R}_+	: 全ての非負実数の集合
\mathbb{Z}	: 全ての整数の集合
\mathbb{Z}_+	: 全ての非負整数の集合
\mathbb{N}	: 全ての自然数の集合
\mathbb{R}^d	: d 次元実空間
H	: 実ヒルベルト空間
B	: 実バナッハ空間
\mathbb{X}, \mathbb{Y}	: 実ノルム空間
$\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$: \mathbb{X} と \mathbb{Y} の直積空間
$\ \cdot \ , \ \cdot \ _p$: ベクトルのノルム, $\ \cdot \ _p$ ($p \in [1, \infty]$)
$\ \cdot \ , \ \cdot \ _p$: 作用素ノルム, $\ \cdot \ _p$ によって誘導された作用素ノルム
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: H における内積
$\mathbb{R}^{d \times r}$: $d \times r$ 実行列の集合.
$\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$: A_1, A_2, \dots, A_n を対角ブロックとするブロック対角行列.
$\pi_i(A)$: 行列 A の i 番目の固有値
$\text{Re}(s)$: 複素数 s の実部
$I - J$: 集合 I と $J \subset I$ の差集合
\emptyset	: 空集合
$\text{Int}(A)$: A の内点集合
$B[x; r]$: 点 x を中心とする半径 r の開球
$\overline{B}[x; r]$: 点 x を中心とする半径 r の閉球
$A \iff B$: A と B は等価である。
$A \trianglelefteq B$: A を B で定義する。
\equiv	: 定義によって等しい。

- 三 : 恒等的に等しい
 x^r, A^r : ベクトル x や行列 A の転置
 I : 恒等作用素、単位行列
 θ : 零ベクトル、零行列
 $d \downarrow 0, d \uparrow 0$: $\alpha > 0, \alpha \rightarrow 0, \alpha < 0, \alpha \rightarrow 0$
 $\dot{x}(t)$: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} [x(t+\alpha) - x(t)] / \alpha$
 $\dot{x}_+(t)$: $\overline{\lim}_{\alpha \downarrow 0} [x(t+\alpha) - x(t)] / \alpha$
 $\dot{x}_-(t)$: $\underline{\lim}_{\alpha \uparrow 0} [x(t+\alpha) - x(t)] / \alpha$
 $x(t+0)$: $\lim_{\alpha \downarrow 0} x(t+\alpha)$
 $x(t-0)$: $\lim_{\alpha \uparrow 0} x(t+\alpha)$
 $F'(x)$: F の点 x における偏微分
 $\partial_i F(x_1, \dots, x_N)$: $x_i \mapsto F(x_1, \dots, x_N)$ の点 (x_1, \dots, x_N) における偏微分
 \bar{d} : $\{1, 2, \dots, d\}$, 例えば $\bar{3} = \{1, 2, 3\}$
 $F(x), Fx$: F の点 x における値
 C : 連續な写像の集合
 C^k : k 回連続微分可能な写像の集合
 e : 要素が全て 1 のベクトル
 e^i : 座標ベクトル

第1章 緒論

制御系や電気回路などにおいて、それらを構成している要素、素子は厳密な意味では線形でないものが少なくてない。例えば、増幅器は、入力信号の微小変化する限りにおいて、線形性を保持していると考えられるが、入力信号の振幅が大きくなると、入出力関係は比例関係からはずれてくる傾向にある。又、鉄心入りインダクタ、強誘電体を用いたコンデンサ、非線形負性抵抗（エサキダイオード、ネオニ管）なども非線形を示すものとして知られている。その他、電気-機械系⁽¹⁾、化学系⁽²⁾、熱系⁽³⁾、流体系⁽⁴⁾など多くの物理的システムにおいて非線形性があらわれる。

これらの非線形性は、線形性からはずれると同時に誤差を伴つたり、安定性を害するような場合もあるが、適応制御やポジカスト制御⁽⁵⁾あるいは非線形発振、共振回路や諭理回路などにみられるように非線形性を積極的に利用する場合も少なくなく非線形ダイナミカルシステムの解析、設計の必要性はますます増大していふ。

これらの解析、設計における最も基本かつ重要な問題としては、1)標準形状態方程式の導出、2)それらの可解性、3)平衡点や周期解の存在に関する問題、4)それらの求解の問題、5)安定性などがある。

ところで、問題1)における代表的な問題である非線形回路や大規模複合系における標準形状態方程式の導出、問題2)における差分方程式の可解性、および、問題3)における平衡点の存在の問題は、平衡点方程式（直流方程式）の可解性の問題に帰着される。

又、問題5)における重要な問題の1つであるフィードバック系の入出力安定解析は、本質的には、非線形Volterra型積分方程式などの非線形関数方程式の可解性の問題となる。

本研究では、このような觀点から、連續な特性を有する連続時間、離散時間非線形ダイナミカルシステムを対象として、i)平衡点方程式、非線形関数方程式の可解性、ii)非線形常微分方程式の可解性、iii)周期解の存在、

i) 平衡点や周期解の求解, ii) 安定性 (リアプロフ安定性, 入出力安定性)について論じる。ただし、周期解については、周期系についてのみ考察している。各章で述べることは次の通りである。

第2章では、数学的な準備を行う。ここではまず最初に、写像のクラスについて、その定義、性質、包含関係を示す。次に、以下の章において重要な役割を果すル関数^{(6)~(10)} およびその拡張であるル関数を導入し、それらの性質、両者の関係を明らかにする。続けて、具体的にノルムを指定した場合のル関数、ル関数の値、ないし評価を示す。さらに、種々の行列のクラスとル関数の関係、双対写像["] とル関数の等価性を示す。これによつて、ル関数、ル関数の持つ意味、有効な範囲を明らかになるとともに従来個々別々に定められてきた受動性、単調性の概念を整理、統一する。又、ル関数、ル関数と並んで以下の章において重要な役割を果す縮小写像およびそれから導かれる幾つかの結果を示す。

第3章では、平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について論じる。ここでは、 $F(x) = u$ 、又は、 $F(x, y) = u$ なる形の平衡点方程式、非線形関数方程式について考察する。

まず3・2においては、 $F(x) = u$ なる形の方程式の可解性について論じる。ただし、 F はバナッハ空間 B からそれ自身への連續写像とする。さてここでいう可解性とは、「任意に入力 $u \in B$ を与えたとき、方程式： $F(x) = u$ は唯一解 $x^*(u)$ を有するか、そして $u \mapsto x^*(u)$ は連續か」という問題である。この種の問題については、多くの結果が報告されているが、それらは手法的な面から次のように分類される。

i) 接続の性質^{(12), (13)}を用いるもの：

- i - a) 下び連續微分可能な場合^{(10), (14)~(18)},
- i - b) F が連續な場合^{(13), (19), (20)};

ii) Palaisの定理⁽²¹⁾を用いるもの^{(9), (22), (23)};

iii) 大域逆関数定理⁽²⁴⁾を用いるもの^{(25)~(28)};

iv) 写像度⁽²⁾を用いるもの⁽²⁹⁾;

V) 一次元の問題に帰着させう方法:

V-a) 方程式の構造を利用するもの (30), (31)

V-b) Fujisawa-Kuh の方法 (32), (33)

ところで、 F が同相写像にならかどうかという点だけに注目するならば、Palais の定理 より 大域逆関数定理 に、接続の性質を用いて得られる。

又、写像度を用いた理論は、理論自体は非常に一般性を有しているが、実際にそれを適用する場合にはかなり煩雑な手続きを必要とする。さらに、解の存在と一意性については結果が得られるとしても、解 $x^{(n)}$ の入力に対する連続性については情報が得られない。

又、V) の方法は、V-a) の方は方程式の構造が制限されてくるし、V-b) の方は、 F が連続微分可能であるか区分的線形である場合などに關しては有効であるが、 F が単に連続である場合に關しては適用が困難である。さらに、最初に述べた可解性よりも強い結果、例えば、並写像の有界性などを得たい場合に、それらに関する情報が得られない。

以上のような観点から、ここでは接続の方法によって、可解性の問題を考察する。さて、この方法による問題点は次の2点が挙げられる。

- 1) 接続の性質を保証するにはある種の不等式が成り立つ必要があるが、そのためには、 F にどのような条件を課せばよいか。
- 2) 接続の性質によって解の存在を議論する前提は、 F が局所的同相写像である事で、そのためには F にどのような性質を与えればいいか。

従って、3・2・1では、接続の性質を説明するとともに、1)の問題について考える。次に3・2・2では、2)の問題について考える。この問題に対しては、 F が連続微分可能な場合および B が有限次元空間である場合には、それと、陰関数定理、領域不変性定理 (34), (35) によって容易に結果が得られますが、 F が単に連続で、 B が無限次元空間の場合には検討が必要である。又、無限次元空間の場合についてもヒルベルト空間の場合については、Minty⁽¹⁹⁾ によって結果が得られていく。従って、3・2・2では一般的バナッハ空間の場合について主に考えている。得られた結果

は、Mintyの結果よりも若干強い条件 (F が単に連続でなく、局所的にリップシツト連続であること) を必要とする。最後に、3・2・3では、3・2・1および3・2・2をまとめ、さらに実用的な条件を示す。又、従来の結果との関連を明らかにし、先に示したDesoerとHaneda⁽⁹⁾, Stern⁽²²⁾ Haneda^{(10), (18), (28)}, OhtsukiとWatanabe⁽²³⁾, KuhとHajj⁽²⁵⁾, OhtsukiとYoshida⁽²⁶⁾, 羽根田, 石井と丸橋⁽²⁷⁾, らの結果をその十分条件として含むことを示す。さらに、Minty⁽¹⁸⁾, Browder⁽²⁰⁾ の結果をよりシャープにできることも示す。

次に3・3では、 $F(x, y) = u$ なる形の方程式の可解性について論じる。ただし、 F はバナッハ空間 $B \times B'$ から B の内への連続写像とする。さてここでいう可解性とは、「任意に元 $u \in B$ および $y \in B'$ を与えたとき、方程式: $F(x, y) = u$ は唯一解 $x^*(u, y)$ を有するか、そして、 $(u, y) \mapsto x^*$ は連続か」という問題である。この種の問題に対しては、 F が連続微分可能な場合については大域陰関数定理として若干の結果^{(25), (36)} が知られている。ここでは、KuhとHajj⁽²⁵⁾ の方法に従って、3・2の結果を応用して結果を得る。得られた結果はKuhとHajjの結果⁽²⁵⁾ をその特殊例として含んでいる。

最後に3・4では、3・2, 3・3で得られた結果を非線形回路に応用し、非線形RLMC回路の標準形状態方程式を導くとともに、非線形抵抗回路における直流解の存在条件を示す。

第4章では、非線形常微分方程式の可解性と安定性そしてそれらの応用として、周期系における周期解の発生について論じる。

まず4・2では非線形微分方程式の可解性について一般的な議論を行なう。ここでいう可解性とは、「与えられた非線形微分方程式において、その定義域内の任意の初期時間、状態、入力およびパラメータを定めると、唯一の大域的な解が存在するか、そしてその解は、初期状態、入力、およびパラメータに関して連続か」という問題である。この問題の前半は、初期値問題(Cauchy問題)として古くから研究されている。そして、特に、

微分方程式: $\dot{x} = f(x, t)$ において、 t が連続の場合には、岡村によって完全に解かれていらる^{(37), (38)}。工学上は次の2点に注意する必要がある。

i) ここで $\dot{x} = f(x, v, t) + u$, $\dot{v} = f(x, v, t)$, $\dot{t} = f(x, v, t) + u$, $\dot{x} = f(x, t)$; $\dot{x} = f(x, v) + u$, $\dot{v} = f(x, v)$, $\dot{t} = f(x) + u$, $\dot{x} = f(x)$ などの形で与えられる非線形微分方程式を対象とするが、入力 u , v はステップ入力なども対象とするから、一般に連続関数とは限らず、区分的に連続な関数^{(39), (40)}であることが多いこと。従って、解の定義を若干拡張する必要があること。但し、本研究では、系の特性 f 自体は連続であるから、Filippov⁽⁴¹⁾ の意味まで拡張するということではない。

ii) 先に述べた岡村の結果といふのは、「初期値問題において、一意解が存在するための必要十分条件は、ある条件をみたすリアプロンフ関数が存在すること」といつて形で示されていらる訳であるが、与えられた微分方程式の特性から、実際にそのような条件をみたすリアプロンフ関数を構成する方法は、リブシツ条件を満足する場合などを除いては、わかつてない。

ここで、以上の2点に注意して、非線形微分方程式の可解性について考察し、岡村の結果に沿つて実用的な条件を示す。

次に、4・3で、安定性に関する若干の結果を示し、それを使って、微分方程式の可解性について、4・2とは異つた結果を得る。ここで得られる結果は、安定性も考慮するために、4・2の結果のような大域的な条件を必要としない。

最後に4・4で、上で得られた結果を周期系へ応用する。まず4・4・1で、一般的な形で周期解発生のための実用的十分条件を示す。又、これらの条件は、発生する周期解軌道の指数安定であることもあわせて保証している。ここで得られた結果は、リアプロンフ関数を用いて示されていらるYoshizawa⁽³⁸⁾ の結果の実用的な表現となる。そして、Winstonの結果⁽⁴²⁾をその特殊な場合として含んでいらる。次に、4・4・2で、非線形RLCM回路、非線形トランジスタ・ダイオードを含む電気回路、および鉄共振現象などにおいてあらわれるDuffing方程式を例にとって、

上述の結果を説明する。

第5章では、平衡点方程式に対する反復法の適用およびその収束性について論じる。平衡点方程式（直流方程式）は、第3章で3.3.3.に非線形抵抗回路網における直流解析の他に、陰的積分公式による常微分方程式の数値解析、差分近似による偏微分方程式の数値解析、そして前章で3.3.4.に周期系における周期解を求める際に、それを常微分方程式の境界値問題とひととらえて、それを差分近似して数値解析を行う場合などに現わる。

まず5.2では、非線形ヤコビ法および非線形SOR法⁽⁴²⁾について考察する。そのために、5.2.1では、基礎となる線形方程式に対する収束性を検討し、従来知られている結果を整理、拡張する。そして、5.2.2では、その結果が非線形方程式に対してもほぼそのまま成り立つことを示す。さらに、線形方程式に対するSOR法についてよく知られている Ostrowski-Reichの定理⁽⁴²⁾が非線形SOR法に対してもある程度拡張できることを示す。

又、5.3では、Sandbergの反復法⁽⁴³⁾を、もう少し使い易い形に変形した反復法を考え、それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを示す。

そして、5.4では、それらの結果の応用例を示す。まず5.4.1では、非線形抵抗回路の直流解析においてよくみられる2つのタイプの直流方程式に応用し、その収束条件を示す。得られた結果は、第3章で示した直流解の存在と唯一性を保証する条件と一致している。次に、5.4.2では、周期系における定常解析を先に示した方法によって行う場合について考える。この場合も収束条件は第4章で示した周期解の発生と安定性を保証する条件と一致している。

ところで、この種の反復法の特徴としては、i)他の方法、例えばニュートン法を用いる場合に比して記憶容量が少なくて済むこと、ii)スペーシティを考慮する場合に、計算の過程を通じて方程式の構造が全く変化しないから煩雑な手続きが不用であること、iii)上で示したように、比較的緩い条件

件の下に大域収束性を有することなどが挙げられる。

第6章では、非線形フィードバック系の出入力安定性について論じる。この問題に対しては、大別して2つのアプローチがとられてきた。1つはリアプローフ理論^{(38), (44)~(47)}に基づくもので、その代表的なものとしてはLur'e の方法が挙げられる^{(47)~(49)}。もう1つは、関数解析的手法によるものである^{(43), (50)~(55)}。この2つの方法の橋渡しを行ったのはPopov⁽⁵⁶⁾の論文であり、そのことはPopov の定理を拡張したDesoer⁽⁵⁷⁾の論文により明確にされていこう。そして、関数解析的手法による安定解析は、

Zames⁽⁵⁰⁾とSandberg^{(43), (51), (52)}によってその枠組みが示された。この手法の特徴の1つとしては、分布系の取り扱いが集中系の取り扱いと同様に容易であることが挙げられる。そしてこのことは、多入力、多出力系と單一入力・單一出力系、連続時間系と離散時間系などにおいても同様である。その他、Popov の定理においてみられるように、マルチプライヤ⁽¹⁵⁾には有効的な働きをするといふことが挙げられる。

ところで、関数解析的手法による安定解析は、基本的な2つの定理、すなはち、スモールゲイン定理と受動定理に基づいていこう。このうち、前者は一般のノルム空間において適用できれば、後者は内積空間のみにおいて適用できるものである。

この章の目的は、第2章において一般のノルム空間にまで拡張した受動性、単調性の概念を用いて、受動定理を一般のバナッハ空間へ拡張することである。

まず6・2においては、対象とする非線形フィードバック系を示し、ここでいう入出力安定性、すなはち、有界性および連続性を定義する。

次に6・3では、元関数を用いた有界性に関する2つのタイプの安定定理を示す。この2つの定理は、スモールゲイン定理よりもシャープな結果となるだろう。

さらに6・4では、元関数を用いた連続性に関する安定定理を示す。この結果は、スモールゲイン定理よりもシャープな結果となると同時に

に、ヒルベルト空間においては、従来知られてる擾動定理と一致している。

そして 6・5 では この章で得られた安定定理を数値積分法の安定解析に応用する。

第 7 章では、ある種の物理的制約条件を有する系の安定解析について論じる。物理系、化学系、生体系などの広範な物理的、生理的現象を表やすダイナミカルシステムにおいては、物理学的、化学的保存法則によつてその状態方程式が、 $\dot{x}_i = -g_i(x) + f_i(x) + u_i$, $i \in \bar{d}$ で与えられる。これは、状態 i の状態量 x_i の変化割合が、系外からの流入(入力) u_i と他の状態から状態 i への流入割合 f_i の和から、状態 i から他の状態および系外への流出割合 g_i を差し引いたもので与えられることを示してあり、一般に“流れの連続性”と呼ばれる性質が成り立つことを示していき。さらに、熱交換系、化学反応系やある種のRC回路網などにおいてみられるように

- i) $g_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ji}(x_j) + a_{0i}(x_i)$, $f_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j)$,
- ii) $a_{ji}(x_j) \geq 0$, $a_{0i}(x_i) \geq 0$, $x_i \geq 0$.

なる条件が満足される場合も少なくない。

この章では、上に示した物理的な制約条件を有する特殊な非線形ダイナミカルシステムについて、i)解の非負性、単調性、ii)安定性、およびiii)定常解の存在とその安定性の3点について考察する。

まず 7・2 では、この章で対象とする系の特徴である解軌道の非負性、単調性について考察し、その必要十分条件を示す。この結果は、線形系における Bellman ⁽⁵⁸⁾ の結果の非線形系への拡張となつてゐる。

次に 7・3 では、初期状態および入力が非負であれば、解軌道が非負であるという 7・2 の結果を考慮しながら、漸近安定性、指數安定性、有界入力有界状態安定性について考察し、構造の分解不能性を用いたシャープな結果を示す。この結果は、系の特性が線形の場合には、従来知られてる結果と一致している。

さらに 7・4 では、入力がなく、系外への流出もない場合、すなへら、

$u_i(\cdot) \equiv 0$, $q_{0i}(\cdot) \equiv 0$, $i \in \bar{d}$ となる場合について定常解の存在とその安定性について考察し、ある条件の下に任意の非負の初期値 x^0 から出発した解軌道が、 x^0 に依存して一意的に定まる定常値 x^* へ指数的に漸近することを示す。

最後に 7・5 では、上の結果を化学プロセス、およびある種の RC 回路網を例にとって説明する。

以上が従来の研究と本研究の概要である。

第2章 数学的準備

2・1 緒 言

この章では、数学的準備を行なう。まず最初に種々の写像のクラスについてその定義、性質、相互関係を示す。次に、以下の章において重要な役割を果すル関数^{(1)～(10)}およびその拡張である入関数を導入し、それらの性質を整理する。又、有界な線形写像については、ル関数と入関数が本質的に同一なものであることを示す。さらに、具体的にノルムを指定した場合の入関数、ル関数の値、ならびに評価を明らかにする。又、安定性や可解性の問題において重要な役割を果す種々の行列のクラス^{(27), (59)～(61)}とル関数との関係、および双対写像⁽¹¹⁾と入関数との等価性を示す。これによつて、入関数、ル関数の持つ意味、有効な範囲を明らかにするとともに、従来個々別々に定められてきた運動性、単調性の概念を整理、統一する。又、入関数をル関数とともに以下の章において重要な役割を果す縮小写像およびそれから導かれるいくつかの結果を整理する。

2・2 写像のクラス

この節では、以下の議論においてあらわれる種々の写像のクラスを定義し、その性質、相互関係などについて整理する。

[定義2・1] ^{(39),(40)} 写像 $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ は区分的に連続 (piecewisely continuous) である。 \Leftrightarrow 任意のコンパクト区間 $\bar{\Omega} = [t_1, t_2]$ 上で、 $u(\cdot)$ が次の 3 条件を全て満たす。

- i) $u(\cdot)$ は $\bar{\Omega}$ 上で高々有限個の点を除いて連続；
- ii) もし、 $t' \in (t_1, t_2)$ が不連続点ならば、 $u(t'-0)$ および $u(t'+0)$ が存在する；
- iii) $u(t_1+0)$ および $u(t_2-0)$ が存在する。

区分的に連続な写像の集合を P_c で示す。

[定義 2・2] ⁽²⁷⁾ 写像 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^r$ は区分的線形 (piecewise-linear) である。 \Leftrightarrow 下(1)の3条件を全て満足する。

i) $F(\cdot)$ は連続である；

ii) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall i \in \bar{n}, \exists Q_i \subset \mathbb{R}^d, Q_i$: 閉凸集合

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^n Q_i, \text{Int}(Q_i) \cap \text{Int}(Q_j) = \emptyset, \forall i, j \in \bar{n}, i \neq j;$$

iii) $\forall i \in \bar{n}, \exists A_i \in \mathbb{R}^{r \times d}, \exists b_i \in \mathbb{R}^r, F(x) = A_i x + b_i, \forall x \in Q_i.$

区分的に線形な写像の集合を P_L で示す。

(注 2・1) 文献 (26), (33) では、i) の連続性を定義にいれず、連続な区分的線形写像を用いている。

[定義 2・3] 写像 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^r$ は区分的に連続微分可能である*。

$\Leftrightarrow F(\cdot)$ が定義 2・2, i), ii), および次の iv) を満足する。

iv) $\forall i \in \bar{n}, \exists F_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^r, F_i \in C^1, F(x) = F_i(x), \forall x \in Q_i.$

区分的に連続微分可能な写像の集合を P_C' で示す。

写像 $F \in P_C'$ に対しては、テーラーの公式^{(40), (62)} と同様な次の結果が成り立つ。

[補題 2・1] 任意に $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^r, F \in P_C', x, y \in \mathbb{R}^d$ を与えろ。このとき、

$$F(x) - F(y) = \left[\int_0^1 F'(tx + (1-t)y) dt \right] (x-y)$$

が成り立つ。ここで、

$$F'(z) = F'_i(z), z \in Q_i$$

とする。ただし、 $z \in Q_i \cap Q_j$ のとき、 $F'(z)$ は $F'_i(z)$ 又は $F'_j(z)$ のいずれか一方をどちらかのとする（以下、 $F \in P_C'$ に対して、 $F'(z)$ をこの意味で用いる）。

(証明) $\lambda \triangleq \{z \in \mathbb{R}^d \mid z = tx + (1-t)y, t \in \mathcal{T} \triangleq [0, 1]\}$

とすると、各 $Q_i \cap Q_j$ は閉凸集合であるから、必要ならば番号をつり換えること

* 文献 (63) では区分的に滑らか、文献 (64) では区分的に一次微分可能という語を用いている。

によつて、ある $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ に對し

$$l = \bigcup_{i=1}^m l_i, l_i \in \Sigma_i, *_i \in \bar{m};$$

$$l_i \triangleq \{ z \in \mathbb{R}^d \mid z = \tau x + (1-\tau)y, \tau \in J_i \triangleq [\tau_{i-1}, \tau_i] \},$$

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = 1$$

となる。ここで、

$$z^i \triangleq \tau_i x + (1-\tau_i)y, *_i \in \{0, 1, \dots, m\}$$

とすると、

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= \sum_{i=1}^m [F(z^i) - F(z^{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^m [F_i(z^i) - F_i(z^{i-1})] \end{aligned} \quad (2.1)$$

となる。ここで、各 $F_i(\cdot) \in C'_1$ に對し テーラーの公式^{(40), (62)}を適用すると、

$$F_i(z^i) - F_i(z^{i-1}) = \left[\int_0^1 F'_i(s z^i + (1-s) z^{i-1}) ds \right] (z^i - z^{i-1})$$

を得る。上式におひいて

$$\tau = \tau_{i-1} + s(\tau_i - \tau_{i-1})$$

なる変換を行うと、

$$F_i(z^i) - F_i(z^{i-1}) = \left[\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} F'_i(\tau x + (1-\tau)y) d\tau \right] (x-y)$$

となる。上式と式(2.1)から、

$$F(x) - F(y) = \sum_{i=1}^m \left[\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} F'_i(\tau x + (1-\tau)y) d\tau \right] (x-y)$$

$$= \left[\int_0^1 F'(\tau x + (1-\tau)y) d\tau \right] (x-y)$$

を得る。

定義2・2, 2・3 やら、 $P_L[P_C]$ であることに注意すると補題2・1によつて直ちに次の系2・1を得る。

[系2・1]⁽²⁶⁾⁽³³⁾ 任意に $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^r$, $F \in P_L$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ を与えよ。このとき、

$$F(x) - F(y) = \left[\sum_{i=1}^n \pi_i A_i \right] (x-y)$$

が成り立つ。ここで、 $\pi_i \in [0, 1]$, $i \in \bar{n}$ は、

$$1 = \sum_{i=1}^n \pi_i$$

を満足する。

[定義2・4] ⁽⁵⁵⁾ 写像 $F: X \rightarrow Y$ は X 上で有界である。

$$\Leftrightarrow \exists a, b \geq 0, |F(x)| \leq a|x| + b, \forall x \in X.$$

X 上で有界な写像の集合を \mathcal{F}_B で示す。

(注2・2) 写像 F は連続とは限らない。

(注2・3) 文献(50), (53)では, F が X 上で有界とは,

$$\exists a \geq 0, |F(x)| \leq a|x|, \forall x \in X$$

が成り立つことと定義しているが, この場合には, 上式から, $F(0) = 0$ かつ, F は原点 0 で連続となつていい。

[定義2・5] 写像 $F: X \rightarrow Y$ は X 上でリプシツ連続である。

$$\Leftrightarrow \exists l \geq 0, |F(x) - F(y)| \leq l|x - y|, \forall x, y \in X.$$

X 上でリプシツ連続な写像の集合を \mathcal{F}_L で示す。

[定義2・6] 写像 $F: X \rightarrow Y$ は準リプシツ連続である。

$$\Leftrightarrow \forall z \in X, \exists r > 0, \exists l(z, r) \geq 0,$$

$$|F(x) - F(y)| \leq l|x - y|, \forall x, y \in \bar{B}[z; r].$$

準リプシツ連続な写像の集合を $\mathcal{F}_{g.L}$ で示す。

(注2・4) 文献(28), (65)では, 局所的にリプシツ連続 (locally Lipschitz continuous) という語を用いていますが, 局所的にリプシツ連続であるということは, 次の定義のように定める方が妥当と思われるのをここでは, 準リプシツ連続という語を用いる。

[定義2・7] 写像 $F: X \rightarrow Y$ は局所的にリプシツ連続である。

$$\Leftrightarrow \forall z \in X, \exists \delta(z) > 0, \forall r \in (0, \delta], \exists l(z, r) \geq 0$$

$$|F(x) - F(y)| \leq l|x - y|, \forall x, y \in \bar{B}[z; r].$$

局所的にリプシツ連続な写像の集合を $\mathcal{F}_{s.L}$ で示す。

(注2・5) 定義2・1～2・7において定められた各写像のクラスの相互関係は, 各定義, 補題2・1, および系2・1から次のようになる。

$$C'CP_C \subset \mathcal{F}_{g.L} \subset \mathcal{F}_{s.L} \subset CCPC;$$

$$P_L \subset \mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_B.$$

[定義2・8] $T \subseteq \mathbb{R} + \text{スパン}(e_1)$, $\mathcal{F}^d \triangleq \{x: T \rightarrow \mathbb{R}^d\}$ とする。線形写像 $\tau P_T: \mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^d$, $\tau, T \in \mathcal{J}$, $\tau < T$ を次式で定める。

$$(\tau P_T x)(t) \triangleq \begin{cases} x(t), & \tau \leq t \leq T, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

そして、特に $\tau = 0$ であるとき oP_T を P_T と示す。

\mathbb{X} を線形空間 \mathbb{F}^d 上のノルム空間とし、 \mathbb{X} のノルム $\|\cdot\|: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} + \{0\}$

- i) $\forall x \in \mathbb{X}, \forall T, T' \in \mathcal{J}, T \leq T', |P_T x| \leq |P_{T'} x|$,
- ii) $\forall x \in \mathbb{X}, |P_T x| \rightarrow |x|, T \rightarrow \infty$

を満足するものとする。 \mathbb{X} の拡張空間 \mathbb{X}_e を次式で定める。

$$\mathbb{X}_e \triangleq \{x \in \mathcal{F}^d \mid P_T x \in \mathbb{X}, \forall T \in \mathcal{J}\}$$

- 1) 写像 $G: \mathbb{X}_e \rightarrow \mathbb{X}_e$ は因果的である。 $\Leftrightarrow P_T G P_T = P_T G, \forall T \in \mathcal{J}$;
- 2) 写像 $G: \mathbb{X}_e \rightarrow \mathbb{X}_e$ は零メモリである。 $\Leftrightarrow P_T G P_T P_T = P_T G, \forall T \in \mathcal{J}$.

(注2・6) 以下の議論においては、無元次元ノルム空間 \mathbb{X} は定義2・8における条件 i), ii) を満足するものとする。又、 L_p, L_p^r などは全てそれを満足している。

因果的写像については、次の性質が成り立つ。

[補題2・2]^(ss) 写像 $G: \mathbb{X}_e \rightarrow \mathbb{X}_e$ は因果的とする。このとき、

- i) G が \mathbb{X}_e 上で有界。 $\Leftrightarrow G$ が \mathbb{X} 上で有界;
- ii) G が \mathbb{X}_e 上でリニア・シッツ連續。 $\Leftrightarrow G$ が \mathbb{X} 上でリニア・シッツ連續なる関係が成り立つ。さらに、 $G \in \mathcal{F}_B$ として、

$$\gamma_e(G) \triangleq \inf \{a \in \mathbb{R} \mid |Gx|_T \geq a|x|_T + b, \forall x \in \mathbb{X}_e, \forall T \in \mathcal{J}\}.$$

$$\gamma(G) \triangleq \inf \{a \in \mathbb{R} \mid |Gx| \geq a|x| + b, \forall x \in \mathbb{X}\}$$

とすると、 $\gamma_e(G) = \gamma(G)$ となる。但し、 $|x|_T \triangleq |P_T x|$ 。

同様に、 $G \in \mathcal{F}_L$ として、

$$\tilde{\gamma}_e(G) \triangleq \inf \{l \in \mathbb{R} \mid |Gx - Gy|_T \leq l|x - y|_T, \forall x, y \in \mathbb{X}_e, \forall T \in \mathcal{J}\}.$$

$$\tilde{\gamma}(G) \triangleq \inf \{l \in \mathbb{R} \mid |Gx - Gy| \leq l|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{X}\}$$

とすると、 $\widehat{Y}_e(G) = \widehat{\delta}(G)$ となる。

(注2・7) $\Upsilon(G)$, $\widehat{\delta}(G)$ をそれぞれ直流ゲイン, 交流ゲインと呼ぶ。

2・3 ル関数, ム関数

2・3・1 定義と性質

この節では、以下の章において重要な役割を果すム関数およびその拡張であるル関数を導入し、その性質を整理する。ム関数はPahlquist⁽⁶⁾とLozinski⁽⁷⁾によって導入された量で、行列のメジャー、対数的ノルム(the logarithmic norm), 対数的微分(the logarithmic derivative)などの名前で呼ばれることがある。

まず、ム関数の定義を示そう。

[定義2・9]^{(6)~(10),(16)} 線形写像 $A: X \rightarrow X$, $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ を与え、ム関数を次式で定義する。

$$\mu(A) \triangleq \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\|I + \alpha A\| - 1}{\alpha} \quad (2.2)$$

ム関数は線形写像に対して定義されていながら、非線形写像への拡張の一つは次のように与えられる。

[定義2・10]⁽²⁸⁾ 写像 $F: X \rightarrow X$, $F \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, および任意の $Z \in X$, $r \in (0, \delta(Z)]$ を与えて、局所的ム関数を次式で定義する。

$$\mu[F; Z, r] \triangleq \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\|I + \alpha F_i Z, r\| - 1}{\alpha} \quad (2.3)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ は局所的リラクシタセミノルムと呼ぶ。

$$\|F_i Z, r\| \triangleq \sup_{x, y \in \bar{B}(Z; r), x \neq y} \frac{|Fx - Fy|}{|x - y|} \quad (2.4)$$

で与えられる。

(注2・8) もし、 $F \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}, L}$ ならば、(2.3), (2.4)は任意の $r > 0$ に対し定義できる。

(2.3), (2.4) より.

$$\mu[F; z, r] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{x, y \in \bar{B}[z; r], x \neq y} \frac{|(I + \alpha F)x - (I + \alpha F)y| - |x - y|}{\alpha |x - y|} \quad (2.5)$$

となる。従って、 F が線形の場合は、

$$\mu[F; z, r] = \mu(F), \quad \forall z \in X, r > 0 \quad (2.6)$$

となることは容易にわかる。

ところで、(2.5) で $F \in \mathcal{L}(X)$ でないと定義されないが、次に F に関するそのような制限を緩和し、なまかに「局所的」 μ 関数と同様の意味を有する μ 関数と呼ぶ量を導入しよう。

[定義 2.11] 写像 $F: X \rightarrow X$, $x, y \in X$, $x \neq y$ を与えて μ 関数を次式で定義する。

$$\pi(F; x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|(I + \alpha F)x - (I + \alpha F)y| - |x - y|}{\alpha |x - y|}. \quad (2.7)$$

まず、(2.7) が意味を持つことを示そう。

[補助定理 2.1] 写像 $F: X \rightarrow X$, $x, y \in X$, $x \neq y$ を与えて、

$$r(F; x, y) \triangleq \frac{|Fx - Fy|}{|x - y|}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \kappa(\alpha; F, x, y) &\triangleq [\gamma(I + \alpha F; x, y) - 1] / \alpha \\ &= \frac{|(I + \alpha F)x - (I + \alpha F)y| - |x - y|}{\alpha |x - y|}. \end{aligned}$$

$$\alpha > 0 \quad (2.9)$$

とすると、

$$\kappa(\alpha; F, x, y) \leq -\gamma(F; x, y), \quad \alpha > 0 \quad (2.10)$$

となる。又、 $\alpha \mapsto \kappa(\alpha; F, x, y)$, $\alpha > 0$ は非減少関数である。

(証明) (2.10) は、(2.8), (2.9) のより簡単な性質から容易に得られる。次に、 $\beta \triangleq x - y$, $\Delta F \triangleq Fx - Fy$ とし、任意の $R \in (0, 1)$

を与えらる。

$$\begin{aligned}
 K(R \cdot \alpha; F, x, y) &= \frac{|F + R \cdot \alpha \cdot \Delta F| - |F|}{R \cdot \alpha \cdot |F|} \\
 &\leq \frac{R|F| + \alpha \Delta F + (1-R)|F| - |F|}{R \cdot \alpha \cdot |F|} \\
 &= \frac{|\Delta F|}{\alpha |F|} \\
 &= K(\alpha; F, x, y), \quad * \alpha > 0
 \end{aligned}$$

となる。従って、 $\alpha \mapsto K(\alpha; F, x, y)$, $\alpha > 0$ は非減少関数である。

(証明終)

[定理2・1] 写像 $F: X \rightarrow X$, $x, y \in X$, $x \neq y$ を与えるとき, (2.7) の値は唯一存在する。

(証明) (2.7), (2.9) より

$$K(F; x, y) = \lim_{\alpha \downarrow 0} K(\alpha; F, x, y) \quad (2.11)$$

となる。 $\{\alpha_n > 0\}_{n=0}^{\infty}$ を 0 に収束する任意の単調減少列とする。補助定理2・1 より

$$K(\alpha_n; F, x, y) \geq K(\alpha_m; F, x, y), \quad * n, m \in \mathbb{Z}_+, n \leq m;$$

$$K(\alpha_n; F, x, y) \geq -\gamma(F; x, y), \quad * n \in \mathbb{Z}_+$$

が成り立つから、数列 $\{K(\alpha_n; F, x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する。一方、 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ は任意の単調減少列であるから、(2.11) 右辺の値は唯一存在する。

(証明終)

(注2.9) 写像 $F \in \mathcal{F}(L, Z)$, $Z \in X$, $r \in (0, 8(Z)]$ を与え、

$$\hat{K}(\alpha; F, Z, r) \triangleq [\|I + \alpha F; Z, r\| - 1]/\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (2.12)$$

とすると、補助定理2・1 と同様にして、

$$\hat{K}(\alpha; F, Z, r) \geq -\|F; Z, r\|, \quad * \alpha > 0 \quad (2.13)$$

が成り立ち、さらに、 $\alpha \mapsto \hat{K}(\alpha; F, Z, r)$, $\alpha > 0$ は非減少関数となる。そこでこれら、(2.3) の値が唯一存在することが示され。

さて次に、 λ 関数、 μ 関数の性質を示そう。

[定理2・2] 対像 $F, G: X \rightarrow X$, $x, y \in X$, $x \neq y$ を与えよ。 λ 関数は、次の性質 (a) ~ (i) を有する。

- (a) $\lambda(\pm I; x, y) = \pm 1$ (複号同順);
- (b) $-\delta(F; x, y) \leq -\lambda(-F; x, y) \leq \lambda(F; x, y) \leq \delta(F; x, y);$
- (c) $\lambda(\beta \cdot F; x, y) = \beta \cdot \lambda(F; x, y)$, $\forall \beta \geq 0$;
- (d) $\lambda(\beta I + F; x, y) = \beta + \lambda(F; x, y)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$;
- (e) $\lambda(F+G; x, y) \leq \lambda(F; x, y) + \lambda(G; x, y)$;
- (f) $\lambda(F+G; x, y) \leq \lambda(F; x, y) - \lambda(G; x, y)$;
- (g) $|Fx - Fy| \leq \lambda(F; x, y) |x - y|$;
- (h) $F: X \rightarrow X$ が全単射で、 $\lambda(F; x, y) > 0$ なら、
 $|F^{-1}x - F^{-1}y| \leq [\lambda(F; x, y)] \cdot |x - y|$;

(i) $Q: X \rightarrow X$ を線形、全単射とし、 $|x|_Q \equiv |Qx|$ とするとき、

$$\lambda_Q(F; x, y) = \lambda(QFQ^{-1}; Qx, Qy).$$

(証明) (a). 定義から明らか。

(b) $\lambda(F; x, y) \leq \delta(F; x, y)$

である。

$$-\delta(F; x, y) \leq -\lambda(-F; x, y)$$

は定義とノルムの性質から明らか。次に、

$$\beta \triangleq x - y,$$

$$\Delta F \triangleq Fx - Fy$$

とすると、ノルムの性質から、

$$\begin{aligned} & \lambda(\alpha; F, x, y) + \lambda(\alpha; -F, x, y) \\ &= \frac{|\beta + \alpha \cdot \Delta F| - |\beta| + |\beta - \alpha \cdot \Delta F| - |\beta|}{\alpha \cdot |\beta|} \\ &\geq \frac{2|\beta + \alpha \cdot \Delta F| - |\beta - \alpha \cdot \Delta F| - 2|\beta|}{\alpha \cdot |\beta|} \\ &\equiv 0, \quad \forall \alpha > 0 \end{aligned}$$

となる。上式と (2.11) から

$$\lambda(F; x, y) + \lambda(-F; x, y) \geq 0$$

を得る。

(c) $\beta = 0$ のときは明らかであるから、 $\beta > 0$ とする。

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{\alpha}; \beta F; x, y) &= \beta \cdot \frac{|\hat{\beta} + \hat{\alpha}\beta \Delta F| - |\hat{\beta}|}{\hat{\alpha} \cdot \beta |\hat{\beta}|} \\ &= \beta \cdot \lambda(\hat{\alpha}; F; x, y). \quad \forall \alpha = \hat{\alpha}, \beta > 0 \end{aligned}$$

となる。上式と (2.11) から (c) を得る。

(d) $\hat{\alpha} > 0$ を $1 + \hat{\alpha}\beta > 0$ とするよう十分小さくすると、

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{\alpha}; \beta I + F; x, y) &= \frac{|\hat{\beta} + \hat{\alpha}(\beta \hat{\beta} + \Delta F)| - |\hat{\beta}|}{\hat{\alpha} |\hat{\beta}|} \\ &= \frac{|\hat{\beta} + \hat{\alpha}\Delta F| - (1 + \hat{\alpha}\beta) |\hat{\beta}|}{\hat{\alpha} |\hat{\beta}|} + \beta \\ &= \frac{|\hat{\beta} + \hat{\alpha}\Delta F| - |\hat{\beta}|}{\hat{\alpha} |\hat{\beta}|} + \beta, \quad \alpha = -\frac{\hat{\alpha}}{1 + \hat{\alpha}\beta} \\ &= \lambda(\alpha; F; x, y) + \beta. \quad \forall \alpha > 0 \end{aligned}$$

となる。上式と (2.11) から (d) を得る。

(e) $\Delta G = Gx - Gy$

とすると、

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{\alpha}; F + G; x, y) &= \frac{|\hat{\beta} + 2\hat{\alpha}\Delta F + \hat{\beta} + 2\hat{\alpha}\Delta G| - 2|\hat{\beta}|}{2\hat{\alpha} \cdot |\hat{\beta}|} \\ &\leq \frac{|\hat{\beta} + 2\hat{\alpha}\Delta F| - |\hat{\beta}|}{2\hat{\alpha} |\hat{\beta}|} + \frac{|\hat{\beta} + 2\hat{\alpha}\Delta G| - |\hat{\beta}|}{2\hat{\alpha} |\hat{\beta}|} \\ &= \lambda(\alpha; F; x, y) + \lambda(\alpha; G; x, y), \quad \forall \alpha = 2\hat{\alpha} > 0 \end{aligned}$$

となる。上式と (2.11) から (e) を得る。

(f) (e) から、次式を得る。

$$\lambda(F + G - G; x, y) \equiv \lambda(F + G; x, y) + \lambda(-G; x, y)$$

$$\therefore \lambda(F; x, y) - \lambda(-G; x, y) \equiv \lambda(F + G; x, y).$$

(g) $\alpha > 0$ を与えると、

$$\begin{aligned}\frac{|Fx - Fy|}{|x - y|} &= \frac{|\tilde{x} + \alpha \cdot \Delta F - \tilde{y}|}{\alpha |\tilde{x}|} \\ &\leq \frac{|\tilde{x} + \alpha \Delta F| - |\tilde{x}|}{\alpha |\tilde{x}|} \\ &= \text{tr}(\alpha \Delta F, x, y)\end{aligned}$$

を得る。上式と (2.11) より (g) を得る。

(h) 仮定と (f) より

$$\begin{aligned}|x - y| &= |FF^T x - FF^T y| \\ &\geq \mu(F; x, y) |F^T x - F^T y| \\ \therefore |F^T x - F^T y| &\leq [\sqrt{\mu(F; x, y)}] \cdot |x - y|.\end{aligned}$$

(i) 定義より明らか。

(証明終)

[補題 2.3] (b) ~ (10), (66) 線形写像 $A, B : X \rightarrow X$, $A, B \in \mathcal{F}_B$ を与えよ。 μ 関数を次の性質 (a') ~ (j') を有する。

(a') $\mu(I) = 1$ (複号同順) ;

(b') $-||A|| \leq -\mu(-A) \leq \mu(A) \leq ||A||$;

(c') $\mu(\beta A) = \beta \cdot \mu(A)$, $\forall \beta \geq 0$;

(d') $\mu(\beta I + A) = \beta + \mu(A)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$;

(e') $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$;

(f') $\mu(A + B) \geq \mu(A) - \mu(-B)$;

(g') $|Ax| \geq \{-\mu(-A)\} |x|$, $\forall x \in X$;

(h') $A : X \rightarrow X$ が全単射で, $-\mu(-A) > 0$ とするば,

$$||A^{-1}|| \leq \sqrt{[-\mu(-A)]};$$

(i') $Q : X \rightarrow X$ を線形, 全単射とし, $|x|_Q = |Qx|$ とするとき,

$$\mu_Q(A) = \mu(QAQ^{-1}).$$

(j') $X = \mathbb{R}^d$ ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$) とするとき,

$$-\mu(-A) = \operatorname{Re}[\lambda_i(A)] \geq \mu(A), \quad \forall i \in \bar{d}.$$

(注2・10) 性質(a')～(f'), (j') は Dahlquist⁽⁶⁾ と Lozinskij⁽⁷⁾ によつて示された。そして, (g')～(i') は Desoer と Haneda⁽⁸⁾ によつて示された。又, 局所的 μ 関数は, μ 関数と同様な性質を有する⁽²⁸⁾。

さて次に, 無限次元ノルム空間における因果的な写像 (定義 2・8) に対する μ 関数, μ 関数の性質について考えよう。

[補助定理 2・2] 因果的な写像 $F: X \rightarrow X$ を与えよ。任意の $T \in T$ を与えよ。ノルム空間 X_T を,

$$X_T = \{x_T \in \mathbb{R}^d \mid x_T = p_T x_T, \|x_T\|_T = \|p_T x_T\| < \infty\} \subset X$$

で定めよ。但し, p_T は定義 2・8 で与えられる。

1) $F_T = p_T F$ とすると, F_T は F の X_T への制限, F/X_T となる。さらに, F_T は X_T からそれ自身への因果的な写像となる;

2) ノルム $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+, \| \cdot \|_T: X_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ によつて誘導される μ 関数を, それぞれ $\mu(\cdot; \cdot, \cdot), \mu_T(\cdot; \cdot, \cdot)$ で示すと,

$$\inf_{x, y \in X, x \neq y} \mu(F; x, y) \leq \inf_{x_T, y_T \in X_T, x_T \neq y_T} \mu_T(F_T; x_T, y_T),$$

$$\sup_{x_T, y_T \in X_T, x_T \neq y_T} \mu_T(F_T; x_T, y_T) \leq \sup_{x, y \in X, x \neq y} \mu(F; x, y)$$

が成り立つ;

3) F は線形かつ有界とする。即ち, H_T によつて誘導される μ 関数を, それぞれ $\mu(\cdot), \mu_T(\cdot)$ で示すと,

$$-\mu(-F) \leq -\mu_T(-F_T) \leq \mu_T(F_T) \leq \mu(F)$$

が成り立つ。

(証明) 1) X_T の定義と定義 2・8 から明らか。

2) $X_T \subset X$ に注意すると 1) が明らか。

3) $X_T \subset X$ から, $\|F_T\|_T \leq \|F\|$ となる。このことと補題 2・3, (b') 得る。

(証明終)。

2・3・2 入門数とμ門数の関係

さて前節では、μ門数の定義域を拡張するという観点から入門数を導入し、入門数とμ門数がよく似た性質を有していることを示したが、この節では、両者の量的な関係を明らかにする。

まず、次の補助定理を示す。

[補助定理2・3] 対象 $F: X \rightarrow X$, $F \in \mathcal{F}_{\text{el}}$, $z \in X$, $r \in (0, \delta(z))$ を与える。このとき、次式が成り立つ。

$$-\mu[-F; z, r] \geq -\lambda(-F; z, y) \geq \lambda(F; z, y) \geq \mu[F; z, r]. \quad * \\ \forall x, y \in \bar{B}[z; r], x \neq y.$$

(証明) 任意に $x, y \in \bar{B}[z; r]$, $x \neq y$ を与えると

$$\begin{aligned} \lambda(F; z, y) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|(I+\alpha F)x - (I+\alpha F)y| - |x-y|}{\alpha|x-y|} \\ &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{\exists, \gamma \in \bar{B}[z; r], \exists \neq y} \frac{|(I+\alpha F)\xi - (I+\alpha F)\gamma| - |\xi - \gamma|}{\alpha|\xi - \gamma|} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|I+\alpha F; z, r\| - 1}{\alpha} \\ &= \mu[F; z, r] \end{aligned} \tag{2.14}$$

を得る。同様に(2).

$$-\lambda(-F; z, y) \geq -\mu[-F; z, r], \quad \forall x, y \in \bar{B}[z; r], x \neq y$$

を得る。上式と(2.14)より定理2・2,(b)から結論を得る。

(証明終)

この補助定理から、 $F \in \mathcal{F}_{\text{el}}$, $z \in X$, $r \in (0, \delta(z))$ に対して、

$$-\mu[-F; z, r] \leq \inf_{x, y \in \bar{B}[z; r], x \neq y} \lambda(F; z, y) \tag{2.15}$$

が成り立つことがわかる。ここで、(2.15), (2.16)において等号の成

$$\mu[F; z, r] \equiv \sup_{x, y \in \bar{B}[z; r], x \neq y} \{-\lambda(-F; z, y)\} \tag{2.16}$$

が成り立つことがわかる。とくに、(2.15), (2.16)において等号の成

り立つ場合がある。それは、 F が線形写像である場合や A がヒルベルト空間の場合などである。 A がヒルベルト空間の場合以後(補題2-8, 注2-10)で述べることにして、ここで F が線形写像である場合についてのみ示す。

[定理2-3] 写像 $A: X \rightarrow X$ は有限次線形写像である。このとき、

$$\begin{aligned} -\mu(-A) &= -\mu[-A; z, r] \\ &= \inf_{x, y \in \overline{B}[z; r], x \neq y} \lambda(F; x, y), \quad *z \in X, *r > 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

および、

$$\mu(A) = \sup_{x, y \in \overline{B}[z; r], x \neq y} \{-\lambda(-F; x, y)\}, \quad *z \in X, *r > 0 \quad (2.18)$$

が成り立つ。

(証明) (2.18) は (2.17) から直ちに得られるので、(2.17) のみ示す。まず、 A の線形性から、

$$-\mu(-A) = -\mu[-A; z, r], \quad *z \in X, *r > 0 \quad (2.19)$$

および、

$$\inf_{x, y \in \overline{B}[z; r], x \neq y} \lambda(A; x, y) = \inf_{|x|=1} \lambda(A; x, 0) \quad (2.20)$$

が成り立つ。従って、(2.15) の

$$-\mu(-A) \leq \inf_{|x|=1} \lambda(A; x, 0) \quad (2.21)$$

を得る。さて、 $\{\alpha_k > 0 \mid \alpha_k < \frac{1}{\|A\|}, k \in \mathbb{N}\}$ を 0 に収束する任意の単調減少列とする。そして各 $k \in \mathbb{N}$ に対し、 $\{x^{k,n} \mid |x^{k,n}|, n \in \mathbb{N}\}$ を

$$|(I - \alpha_k A)x^{k,n}| \leq |(I - \alpha_k A)x^{k,m}|, \quad *n, m \in \mathbb{N}, \quad n \leq m;$$

$$|(I - \alpha_k A)x^{k,n}| \rightarrow \|I - \alpha_k A\|, \quad n \rightarrow \infty$$

なる任意の数列とする。このよろば $\{x^{k,n}\}$ の存在は、11ムの定義から

保証される。このとき、 $\alpha \mapsto [\|I - \alpha_k A\| - 1]/\alpha$, $\alpha > 0$ の非減少関数であるから^{*},

$$\frac{1 - \|I - \alpha_k A\|}{\alpha_k} \leq -\mu(-A), \quad \forall k \in N \quad (2.22)$$

が成り立つ。一方 $\{x^{k,n}\}$ の定め方の[†]。

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in N, \exists N(\varepsilon, k) \in N, \forall n \geq N,$$

$$\|I - \alpha_k A\| < |(I - \alpha_k A)x^{k,n}| + \alpha_k \cdot \varepsilon/2$$

を得る。従って、上式と (2.22) の[†]。

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in N, \exists N(\varepsilon, k) \in N, \forall n \geq N,$$

$$\frac{1 - |(I - \alpha_k A)x^{k,n}|}{\alpha_k} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1 - \|I - \alpha_k A\|}{\alpha_k}$$

$$\leq -\mu(-A)$$

を得る。 $|x^{k,n}| = 1$ であることに注意すると、上式の[†]。

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in N, \exists N(\varepsilon, k) \in N, \forall n \geq N,$$

$$-h(\alpha_k; -A, x^{k,n}) = \frac{|x^{k,n}| - |(I - \alpha_k A)x^{k,n}|}{\alpha_k \cdot |x^{k,n}|}$$

$$\leq -\mu(-A) + \varepsilon/2 \quad (2.23)$$

を得る。さて次に、任意に $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して $K(\varepsilon) \in N$ を、 $2\alpha_k \|A\|^2 < \varepsilon/2$ とするようにしておこう。このとき、次式が成り立つ

$$(I + \alpha_k A)^{-1} = (I - \alpha_k A) + \alpha_k^2 (I + \alpha_k A)^{-1} A^2, \quad ** \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} |(I + \alpha_k A)^{-1} x^{k,n}| &\geq \inf_{|z|=1} |(I + \alpha_k A)^{-1} z| \\ &= \gamma \|I + \alpha_k A\| \\ &\geq \gamma (1 - \alpha_k \|A\|). \end{aligned} \quad (2.25)$$

従って、

$$\frac{|x^{k,n}| - |(I - \alpha_k A)x^{k,n}|}{\alpha_k |x^{k,n}|} - \frac{|x^{k,n}| - |(I + \alpha_k A)^{-1} x^{k,n}|}{\alpha_k |(I + \alpha_k A)^{-1} x^{k,n}|}$$

* 注 2.9 と A が線形であることによう。

** リマニ展開を用いる。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\{|x^{k,n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k,n}| \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|} \\
&\quad - \frac{\{|x^{k,n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k,n} + \alpha_k^2 A^2(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}| \} \cdot |x^{k,n}|}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|} * \\
&\leq \frac{|\{|x^{k,n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k,n}|\}| \cdot |\{|(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}| - |x^{k,n}|\}|}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|} \\
&\quad + \alpha_k \|A\|^2 \\
&\leq \frac{\alpha_k \|A\| \cdot \{\alpha_k \|A\| + \alpha_k^2 \|A\|^2 \} \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|} + \alpha_k \|A\| * \\
&\leq \alpha_k \|A\|^2 (1 - \alpha_k \|A\|) + \alpha_k^2 \|A\|^3 + \alpha_k \|A\|^2 ** \\
&= 2 \cdot \alpha_k \|A\|^2 \\
&\leq \varepsilon/2, \quad k \geq K \tag{2.26}
\end{aligned}$$

を得る。同様に、

$$\begin{aligned}
&\frac{|x^{k,n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k,n}|}{\alpha_k |x^{k,n}|} - \frac{|x^{k,n}| - |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|}{\alpha_k |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|} \\
&\geq -\varepsilon/2, \quad k \geq K \tag{2.27}
\end{aligned}$$

を得る。一方、 $\tilde{x}^{k,n} \triangleq (I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}$ とおくと、 $\alpha \mapsto \text{tr}(\alpha; A, \tilde{x}^{k,n}, \theta)$ 。
 $\alpha > 0$ が非減少関数であることに注意すると ***

$$\begin{aligned}
&\text{tr}(A; \tilde{x}^{k,n}, \theta) \leq \text{tr}(\alpha_k; A, \tilde{x}^{k,n}, \theta) \\
&= \frac{|(I+\alpha_k A)\tilde{x}^{k,n}| - |\tilde{x}^{k,n}|}{\alpha_k |\tilde{x}^{k,n}|} \\
&= \frac{|x^{k,n}| - |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|}{\alpha_k |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|}
\end{aligned}$$

を得る。上式と (2.26), (2.27), および (2.23) から、

* (2.24) 万より $|x^{k,n}| = 1$ を用い。

** (2.25) を用い。

*** 補助定理 2・1 参照。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall k \geq K(\varepsilon), \exists N(\varepsilon, k) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N,$$

$$\pi(A; \tilde{x}^{k,n}, \theta) \leq -K(a_n; -A, x^{k,n}, \theta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq -\mu(-A) + \varepsilon$$

を得る。上式と A の線形性から、

$$\inf_{|x|=1} \pi(A; x, y) = \inf_{x \neq 0} \pi(A; x, y)$$

$$\leq \pi(A; \tilde{x}^{k,n}, \theta)$$

$$\leq -\mu(-A) + \varepsilon$$

が成り立つ。 $\varepsilon > 0$ は任意であるから、上式と (2.21) から (2.17) を得る
(証明終)

(注 2.11) 定理 2.3 以降、定理 2.2, (g), 補題 2.3, (f') の観点からいうと有界な線形写像に対しては同じ評価を与えることを示してある。この点については、2.3.4においても一度説明する。

2.3.3 π 関数, μ 関数の値

π 関数, μ 関数の値は、定義からわかるようにノルムに依存している。この節では、種々のノルムおよび写像をえて、それに対する π 関数, μ 関数の値、又はその評価を求める。

まず、有限次元空間 ($X = \mathbb{R}^d$) の場合について考える。

[補題 2.4] ^{(b1) ~ (b5), (b6)} 行列 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ をとする。

i) ℓ_1 ノルム。ノルムを、

$$|x|_1 \triangleq \sum_{i=1}^d |x_i|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

と定めると、次式が成り立つ。

$$\mu_1(A) = \max_j \left\{ a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right\}.$$

$$-\mu_1(-A) = \min_j \left\{ a_{jj} - \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right\}.$$

ii) ℓ_2 ノルム。ノルムを、

$$|x|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

で与えると、次式が成り立つ。

$$\mu_2(A) = \max_i \pi_i \left(\frac{A+A^{\text{tr}}}{2} \right)$$

$$-\mu_2(-A) = \min_i \pi_i \left(\frac{A+A^{\text{tr}}}{2} \right).$$

iii) $\| \cdot \|_{\infty}$ と $\| \cdot \|_{\infty}$ を

$$\|x\|_{\infty} \triangleq \max \{ |x_i|, i \in \overline{d} \}$$

で与えると、次式が成り立つ。

$$\mu_{\infty}(A) = \max_i \{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}$$

$$-\mu_{\infty}(-A) = \min_i \{ a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}.$$

(注 2-12) この補題は、Dahlquist⁽⁷⁾ と Lozinskij⁽⁸⁾ に $\delta > 2$ のとき示された。

[補題 2-5] $\| \cdot \|_{\infty} \cdot I_{\phi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$\|x\|_{\phi} \triangleq \max \left\{ \sum_{i \in I(x)} x_i, -\sum_{i \in J(x)} x_i \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.28)$$

で与えろ。但し、 $I(\cdot)$, $J(\cdot)$ は次式で与えられる。

$$I(x) \triangleq \{ i \in \overline{d} \mid x_i > 0 \}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

$$J(x) \triangleq \{ j \in \overline{d} \mid x_j < 0 \}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

i) 行列 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$ に対して、次式が成り立つ。

$$-\mu_1(-A) \leq -\mu_{\phi}(-A) \leq \mu_{\phi}(A) \leq \mu_1(A).$$

ii) $b, e \in \mathbb{R}^d$, $b_i \geq 0$, $e_i = 1$, $i \in \overline{d}$ に対して、次式が成り立つ。

$$-\mu_{\phi}(-be^{\text{tr}}) \geq 0.$$

(証明) i). 補題 2-3, (b') に注意すると、

$$\mu_{\phi}(A) \leq \mu_1(A)$$

のみ示せばよい。このことは、定理 2-3 の S, 任意に与えた $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ に対して、

$$\lambda_{\phi}(A; x, \theta) \leq \mu_1(A) \quad (12.29)$$

を示すのと等価である。任意に x を与え。 $\alpha_0 > 0$ を

$$1 - \alpha \sum_{i \in I} |a_{ij}| > 0, \quad \forall j \in \bar{d}, \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]$$

となるようにせら。 $I \triangleq I(x)$, $I_\alpha \triangleq I(x + \alpha A x)$, $J \triangleq J(x)$, $J_\alpha \triangleq J(x + \alpha A x)$ とする。このとき, $\alpha > 0$ を十分小さくすると, $I < I_\alpha$, $J < J_\alpha$ であることに注意する。定義によつて,

$$|x + \alpha A x|_\phi = \max \left\{ \sum_{i \in I_\alpha} (x_i + \alpha \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j), - \sum_{i \in I_\alpha} (x_i + \alpha \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j) \right\} \quad (2.30)$$

である。一方、補題 2-4-i) カら $\alpha \in (0, \alpha_0)$ を十分小さくすると,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_\alpha} (x_i + \alpha \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j) &= \sum_{i \in I_\alpha} x_i + \alpha \sum_{j=1}^d (\sum_{i \in I_\alpha} a_{ij}) x_j \\ &\leq \sum_{j \in I_\alpha} (1 + \alpha a_{ij} + \alpha \sum_{i \neq j} |a_{ij}|) x_j \\ &\equiv [1 + \alpha \mu_1(A)] (\sum_{j \in I} x_j) \end{aligned} \quad (2.31)$$

が成り立つ。同様に $\alpha \in (0, \alpha_0)$ を十分小さくすると

$$-\sum_{i \in I_\alpha} (x_i + \alpha \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j) \leq [1 + \alpha \mu_1(A)] (-\sum_{i \in I} x_i) \quad (2.32)$$

が成り立つ。従つて、(2.30)～(2.32) から, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ を十分小さくすると,

$$|x + \alpha A x|_\phi \equiv |x|_\phi + \alpha \mu_1(A) \cdot |x|_\phi$$

を得る。上式と九関数の定義から、(2.29)を得る。

ii). 任意に x を与え、 I , I_α , J , J_α を上に同様に定めろ。

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_\alpha} (x_i + \alpha \sum_{j=1}^d b_i x_j) &= \sum_{i \in I_\alpha} x_i + \alpha (\sum_{i \in I_\alpha} b_i) (\sum_{j=1}^d x_j) \\ &= \sum_{i \in I_\alpha} x_i + \alpha (\sum_{i \in I_\alpha} b_i) (\sum_{i \in I} x_i + \sum_{j \in J} x_j), \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in I_\alpha} (x_i + \alpha \sum_{j=1}^d b_i x_j) = \sum_{i \in I_\alpha} x_i + \alpha (\sum_{i \in I_\alpha} b_i) (\sum_{i \in I} x_i + \sum_{j \in J} x_j), \quad \alpha > 0$$

が成り立つ。 $b_i \geq 0$, $i \in \bar{d}$ に注意すると,

$$|x + \alpha \cdot b \cdot e^\tau x|_\phi \equiv |x|_\phi, \quad \alpha > 0$$

を得る。従つて

$$\lambda(b e^{\alpha}; x, \theta) = 0$$

となる。従って、定理2・3の(iii)を得る。

(証明終)

[補助定理2・4] 写像 $f: R \rightarrow R$ を与える。このとき

$$\lambda(f; \alpha, \beta) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in R, \alpha \neq \beta$$

が成り立つ。

(証明)

(省略)

[補題2・6] 写像 $G: R^d \rightarrow R^d$ を

$$G(x) = [g_1(x), \dots, g_d(x)]^T.$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^d a_{ij}(x_j), \quad \forall x \in R^d$$

とする。但し、 $a_{ij}: R \rightarrow R$, $i, j \in \bar{d}$.

i)もし、次の条件:

$\lambda(a_{jj}; \alpha, \beta) - \sum_{i \neq j} |\lambda(a_{ij}; \alpha, \beta)| \leq m, \quad \forall \alpha, \beta \in R, \alpha \neq \beta, \forall j \in \bar{d}$
が成り立つならば、次式が成り立つ。

$$\lambda_1(G; x, y) \leq m, \quad \forall x, y \in R^d, x \neq y.$$

ii)もし、次の2条件:

$$a_{ij}(\alpha^*) = 0, \quad \forall i, j \in \bar{d};$$

$$\lambda(a_{jj}; \alpha, \alpha^*) - \sum_{i \neq j} |\lambda(a_{ij}; \alpha, \alpha^*)| \leq m, \quad \forall j \in \bar{d}, \alpha \neq \alpha^*$$

が成り立つならば、次式が成り立つ。

$$\lambda_1(G; x, \alpha^* e) \leq m, \quad \forall x \in R^d, x \neq \alpha^* e.$$

(証明) 補題2・4と同様にして証明できること。

(証明終)

[補題2・7] 写像 $H: R^d \rightarrow R^d$ を

$$H(x) = [b_1(e^{\alpha} x), \dots, b_d(e^{\alpha} x)]^T$$

とする。但し、 $b_i: R \rightarrow R$, $i \in \bar{d}$.

i)もし、

$$\lambda(b_i; \alpha, \beta) \leq 0, \quad \forall \alpha, \beta \in R, \alpha \neq \beta$$

が成り立つならば、次式が成り立つ。

$$\lambda(H; x, y) \leq 0, \quad \forall x, y \in R^d, x \neq y.$$

ii) もし、ある $\alpha^* \in R$ に対し、

$$b_i(\alpha^*) = 0, \quad i \in \bar{d};$$

$$\lambda(b_i; \alpha, \alpha^*) \geq 0, \quad \forall \alpha \in R, \quad \alpha \neq \alpha^*, \quad i \in \bar{d}$$

が成り立つならば、次式が成り立つ。

$$\pi(H; x, \alpha^* e) \geq 0, \quad \forall x \in R^d, \quad x \neq \alpha^* e.$$

(証明) i) 任意に $x, y \in R^d$, $x \neq y$ を与え。 $H(x) - H(y) = \hat{b}(x, y) \cdot e^{tr}(x-y)$,

$$\hat{b}_i(x, y) = \begin{cases} \lambda(b_i; e^{tr}x, e^{tr}y) \geq 0, & i \in \bar{d}, e^{tr}x \neq e^{tr}y \\ 0, & i \in \bar{d}, e^{tr}x = e^{tr}y \end{cases}$$

が成り立つから、補題 2.5, ii) を同様にして証明できる。

ii) i) を同様にして証明できる。

[補題 2.8] 写像 $F: R^d \rightarrow R^d$, $F \in P_C'$ を与え。このとき、

$$\pi(F; x, y) \leq \sup_{z \in I[x, y]} \mu[F'(z)], \quad \forall x, y \in R^d, x \neq y$$

が成り立つ。但し、 $I[x, y] \triangleq \{z \in R^d \mid z = \tau x + (1-\tau)y, \tau \in [0, 1]\}$ 。

(証明) 任意に $x, y \in R^d$, $x \neq y$ を与える。

$$\pi(F; x, y) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{|(I + \alpha F)x - (I + \alpha F)y| - |x - y|}{\alpha|x - y|}$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{|[I + \alpha \int_0^1 F'(\tau x + (1-\tau)y) d\tau](x-y)| - |x-y|}{\alpha|x-y|}^*$$

$$\leq \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\|[I + \alpha \int_0^1 F'(\tau x + (1-\tau)y) d\tau]\| - 1}{\alpha}$$

$$= \mu[\int_0^1 F'(\tau x + (1-\tau)y) d\tau]$$

$$\leq \int_0^1 \mu[F'(\tau x + (1-\tau)y)] d\tau$$

$$\leq \sup_{z \in I[x, y]} \mu[F'(z)].$$

(証明終)

* 補題 2.1 による

* 補題 2.3, (c), (e) による。

[補題2・9]⁽⁶⁷⁾ 行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ を与えろ。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \sum_{j=1}^n n_j = d$$

とし、 $\|A\|_L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$

$|x| = |y|_0, y = [x_1, \dots, x_n]^T, x_j \in \mathbb{R}^{n_j}, x \in \mathbb{R}^d$ を満足するとする。但し、 $\|\cdot\|_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 0, 1, \dots, n, n_0 = n, \|\cdot\|_0$ ルムを示し、 $\|\cdot\|_0$ は単調なルムとする^{*}。

このとき、 $\hat{A} = (\hat{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ で、

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} \mu_i(A_{ii}), & i \neq j, \\ \|A_{ij}\|_{i,j}, & i = j \end{cases}$$

とすると、

$$\max_i \{\mu_i(A_{ii})\} \leq \mu(A) \leq \mu_0(\hat{A})$$

が成り立つ^{**}。但し、 $\mu_i(\cdot), i = 0, 1, \dots, n$ は $\|\cdot\|_i$ ルムによって定められる μ 関数を示し、 $\|\cdot\|_{i,j}, i, j \in \bar{n}$ は、

$$\|A_{ij}\|_{i,j} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^j, \xi \neq 0} \frac{|A_{ij}\xi|_i}{\|\xi\|_j}$$

で与えられる。

[系2・2] $\|A\|_L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \in \ell_p, \|A\|_L, p \in [1, \infty]$, 又は、

$$|x|_p \equiv |Dx|_p, D = \text{diag}(d_1, \dots, d_d), d_i > 0, i \in \bar{d}, p \in [1, \infty]$$

で与えられるならば、補題2・9の結果はそのまま成り立つ。

(証明)

(省略)

- * 任意の $x^i \in [x_1^i, \dots, x_n^i]^T \in \mathbb{R}^n, i \in \bar{i}; |x_j^i| \leq |x_j^1|, j \in \bar{n}$ に対し、 $|x^i|_0 \leq |x^1|_0$ となるとき、 $\|\cdot\|_0$ は単調なルムといわれれる⁽⁶²⁾。
- ** 文献(67)では、 $\|\cdot\|_j: \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}_+, j \in \bar{n}$ が単調なルムであることを要求しているが、この条件は必要でなく、 $H_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ が単調なルムであることが必要である。

次に、無限次元空間の場合について考える。

[補題2-10] X を線形空間 \mathbb{R}^d 上のノルム空間とする*。

写像 $\tilde{F}: X \rightarrow X$ を、

$$(\tilde{F}x)(t) = F[x(t)], \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T$$

で与える。但し、 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 。

i) X のノルムを。

$$\|x\|_\infty \triangleq \sup\{|x(t)|_a, t \in T\}$$

で与える。但し、 $\|\cdot\|_a: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ は任意に指定されたノルムを示す。

このとき、

$$\inf_{\exists, \tau \in \bar{B}[0, 2\|x-y\|_\infty] \subset \mathbb{R}^d, x \neq y} \pi_a(F; x, y) \leq \pi_\infty(\tilde{F}; x, y).$$

$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

が成り立つ。

ii) X のノルムを、

$$\|x\|_1 \triangleq \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |x(i)|_a, & T = \mathbb{Z}_+ \\ \int_0^\infty |x(t)|_a dt, & T = \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

で与えるとすると、

$$\inf_{\exists, \tau \in \bar{B}[0, 2\|x-y\|_\infty], \exists \neq \tau} \pi_a(F; x, y) \leq \pi_1(\tilde{F}; x, y)$$

$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

が成り立つ。

(証明) 定理2-2, (g), (c), (d) より、

$$\|(I+\alpha\tilde{F})x - (I+\alpha\tilde{F})y\|_\infty = \|x-y\|_\infty$$

$$= \sup_{t \in T} \|(I+\alpha F)[x(t)] - (I+\alpha F)[y(t)]\|_a = \|x-y\|_\infty$$

$$\geq \sup_{t \in T} \{1 + \alpha \pi_a(F; x(t), y(t))\} \|x(t) - y(t)\|_a = \|x-y\|_\infty$$

* 定義2-8 参照。

$$\equiv \alpha \cdot |x-y| = \inf_{z, \tau \in \bar{B}[\theta, 2|x-y|], z \neq y} \mu_\alpha(F; z, \tau)$$

を得る。従って、入門数の定義によつて、i)を得る。

ii). i)と同様にして証明できること。

(証明終)。

[補題2.11] 対像 $F: H \rightarrow H$ を与えよ。このとき、

$$\mu_2(F; x, y) = \frac{\langle Fx - Fy, x - y \rangle}{\langle x - y, x - y \rangle}, \quad x, y \in H, x \neq y \quad (2.34)$$

が成り立つ。さらに、 $F \in \mathcal{F}_{\ell, L}$ のならば、

$$\inf_{x, y \in \bar{B}[z, r], x \neq y} \mu_2(F; x, y) = -\mu_2[-F; z, r], \quad z \in H, r > 0 \quad (2.35)$$

が成り立つ。

(証明) (2.35) は、文獻(28)による。(2.34)は (2.35) と同様にして証明される。

(証明終)

(注2.13) (2.35) より実ヒルベルト空間 H における、(2.15)、(2.16) における等号が成り立つことがわかる。

2・3・4 行列のクラスと入門数の関係

前節で $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ヒルベルト空間に対して入門数の値を示しておいたが^{*}、この節では、それらと種々の行列のクラスとの関係を示す。

まず、行列のクラスを示そう。

[定義2.12] 行列 $A = (a_{ij}) \in R^{d \times d}$ を与える。

1) A はクラス $P(p_0)$ に属す: $A \in P(A \in P_0)^{(59)}$

$\Leftrightarrow A$ の全ての主小行列式の値が正(非負)である。

2) $A \in Z^{(59)} \Leftrightarrow A$ の非角要素は必ず H 零。

3) $A \in M^{(59)} \Leftrightarrow A \in P \Rightarrow A \in Z.$ **

* 補題2.4.

* クラス M のわりにクラス K と呼ぶ場合もある。

4) $A \in \mathcal{D}^{(60)} \Leftrightarrow A \in M$.

但し, $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$: $\hat{a}_{ii} = a_{ii}$, $\forall j \in \bar{d}$, $\hat{a}_{ij} = -|a_{ij}|$, $\forall i, j \in \bar{d}$, $i \neq j$.

5) A は既約優対角である: $A \in IrDD^{(61)}$.

$\Leftrightarrow A$ は既約条件で, 次の 2 条件をみたす。

i) $|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq 0$, $\forall i \in \bar{d}$;

ii) $\exists k \in \bar{d}$, $|a_{kk}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| > 0$.

6) A は強(弱) 優列和である: $A \in SCSD$ ($A \in WCSD$)⁽²⁷⁾.

$\Leftrightarrow a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > (\geq) 0$, $\forall j \in \bar{d}$.

7) A は強(弱) 優行和である: $A \in SRSD$ ($A \in WRSD$)⁽²⁷⁾.

$\Leftrightarrow a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > (\geq) 0$, $\forall i \in \bar{d}$.

8) A は正定値(準正定値)である: $A \in PD$ ($A \in PSD$)⁽⁶¹⁾.

$\Leftrightarrow (A + A^T) \in P(P_0)$.

9) $A \in \mathcal{D}_+$ $\Leftrightarrow A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{dd})$, $a_{ii} > 0$, $\forall i \in \bar{d}$.

[定義 2.13]⁽⁶⁰⁾ 行列 $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ を与える。

$(A, B) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow {}^3D \in \mathcal{D}_+$, $DA, DB \in SCSD$.

[補題 2.12] (M 行列の性質)

i) $A \in M \Leftrightarrow {}^3D \in \mathcal{D}_+$, $AD \in SRSD$ ⁽⁵⁹⁾.

ii) $A \in Z$, $A \in IrDD$, $a_{ii} > 0$, $\forall i \in \bar{d} \Rightarrow A \in M$ ⁽⁶¹⁾.

定義 2.12, 2.13, 補題 2.3, 2.4, 2.12 から次の結果を得る。

[定理 2.4] 行列 $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ を与える。

i) $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow {}^3D \in \mathcal{D}_+$, $AD \in SRSD$;

$\Leftrightarrow {}^3D \in \mathcal{D}_+$, $-\mu_\infty(-D^T AD) > 0$

ii) $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow {}^3D \in \mathcal{D}_+$, $DA \in SCSD$;

$\Leftrightarrow {}^3D \in \mathcal{D}_+$, $-\mu_1(-DAD^T) > 0$

iii) $-\mu_\infty(-A) > 0 \Leftrightarrow A \in SRSD \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

iv) $-\mu_1(-A) > 0 \Leftrightarrow A \in SCSD \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

v) $A \in M \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

6) $A \in I_r DD \Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}^{d \times d}, S = \text{diag}(s_1, \dots, s_d)$
 $s_i = \text{sgn}(a_{ii}), i \in \bar{d}, SA \in \mathcal{D}$.

7) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \in P$.

8) $A \in PD \Rightarrow -\mu_c(A) > 0 \Rightarrow A \in P$.

9) $(A, \beta) \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}_+, -\mu_c(-DAD^T) > 0, -\mu_c(-DBD^T) > 0$.

(証明) 1) ~ 6), および 9) は定義と補題 2.4, 2.12 から明らか.

7) A の任意の主小行列を $C \in \mathbb{R}^{k \times k}, k \leq d$ とする。このとき、定義 6) で $C \in \mathcal{D}$ となる。従って, 1) にようり。

$\exists D \in \mathbb{R}^{k \times k}, D \in \mathcal{D}_+, -\mu_c(-D^T CD) > 0$
 となる。従って, 補題 2.3, (j') によつて,

$\text{Re}[\pi_i(c)] \geq -\mu_c(-D^T CD) > 0, \forall i \in \bar{k}$
 を得る。上式から,

$\det(C) = \prod_{i=1}^k \pi_i(c) > 0$
 となる。従つて, $A \in P$ となる。

8). 7) と同様にして示される。

(証明終)

2.3.5 受動性, 単調性, 双対写像と八関数.

この節では, まず, 受動性, 単調性の概念を一般のノルム空間にまで拡張する。これは, 本質的には Kato⁽¹⁾ によってなされたものであるが, そこで不質的な役割を果すものは, 双対写像という概念である。ここでは, 双対写像と八関数の関係を明らかにし, 最初に定めた受動性, 単調性を八関数を用いてあらわす。さらに, 八関数の性質を用いて, それらの物理的な意味を明らかにする。

単調な非線形写像(作用素)という語を最初に用いたのは, 筆者の知る限りでは, Minty⁽²⁾ であるが, 単調という語を用いた理由は次の二つである。

- i) 単調非減少な一変数関係との類推;
- ii) 受動性と区別するため。

これについて少しおえてみよう。一変数関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 f が単調非減少であることをいふことば。

$$f(x) - f(y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \geq y \quad (2.40)$$

が成り立つことであるが、これは、

$$[f(x) - f(y)] - (x - y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

と等価である。上式をもつと一般に、 $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ に対し、

$$\langle Fx - Fy, x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{H} \quad (2.41)$$

とかく、Minty^(*)は、 F が(2.41)を満たすとき、 F は単調(非減少)であると定義した。

一方、歴史的には、それ以前から、

$$\langle Fx, x \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{H} \quad (2.42)$$

を満たす線形写像 F を受動的(消散的、準正定値^{**})な写像と呼び、さらに、その類推から、(2.42)を満たす非線形写像をも受動的な写像と呼びならわしてきた。そして、この受動性と区別する意味で、単調性という語を用いる誤である。

さて以下においては、上に示した受動性、単調性の概念を一般のルム空間へ拡張することを考える。

(2.40)は、

$$|x - y + \beta [Fx - Fy]| \geq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall \beta \geq 0$$

と等価であるが、上式をもつと一般的に(絶対値をルムで表す)、

$$|(I + \beta F)x - (I + \beta F)y| \geq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall \beta \geq 0 \quad (2.43)$$

とかく。そして今般に、 $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ が(2.43)を満たすとき、 F は単調(非減少)であると呼ぶことにする。

ところで、Kato^(**)は、(2.41)の類推から、単調性を次のように定めた。

* 本によつては、増大的といふ語を用い、逆向きの不等号が成り立つ場合を消散的といふこともある。

** 準正定値といふ語は、下が自己共役の場合に限り用いられる場合もあるが、本文では自己共役でないともこの語を使つてゐる。

E.

[定義 2.14] " X^* を X の双対空間とする。各 $u \in X$, $u \neq 0$ に対し \exists 双対写像 $F_D(u) \in X^*$ を次式で定義する。

$$F_D(u) = \{f \in X^* \mid \|f\|^2 = |u|^2 = |u|^2 = (u, f) \triangleq f(u)\}.$$

[定義 2.15] " $F: X \rightarrow X$ は単調である。

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y, \exists f \in F_D(x-y), (Fx - Fy, f) \geq 0.$$

(注 2.14) ヒルベルト空間においては、各 $u \in H$ について双対写像は唯一存在して、 $f \in F_D(u)$ は。

$$(x, f) = \langle x, u \rangle$$

（「チ之らめる」）。従って、定義 2.15 は、(2.41) を Minty の定義の自然な拡張に「つなげている」といふことができる。

さて次に、双対写像と八関数の関係を示そう。

[定理 2.5] 写像 $F: X \rightarrow X$ を χ とする。次の3条件は等価である。

$$1) \forall x, y \in X, x \neq y, \exists f \in F_D(x-y), (Fx - Fy, f) \geq 0;$$

$$\Leftrightarrow 2) |(I + \beta F)x - (I + \beta F)y| \geq |x - y|, \forall x, y \in X, \beta \geq 0;$$

$$\Leftrightarrow 3) \pi(F; x, y) \geq 0, \forall x, y \in X, x \neq y.$$

（証明） 1) \Rightarrow 2). 任意に $x, y \in X$ を固定する。 $x = y$ のときは、明らかに 2) が成り立つ。 $x \neq y$ とする。1) が成り立つ。

$$\exists f \in F_D(x-y), (Fx - Fy, f) \geq 0$$

が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= (x - y, f) \\ &\leq (x - y + \beta [Fx - Fy], f) \\ &\leq |(I + \beta F)x - (I + \beta F)y| \cdot \|f\|, \beta \geq 0 \end{aligned}$$

となる。 $|x - y| = \|f\|$ より 2) を得る。

2) \Rightarrow 3). 八関数の定義から明らか。

3) \Rightarrow 1). 任意に $x, y \in X, x \neq y$ を χ とする。部分空間 $M \subset X$ を

$$M = \{m = \alpha(x-y) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

で定めろ。たゞ $\forall u \in P : X \rightarrow R_+$ および線形汎関数 $f_0 : M \rightarrow R$ を

$$P(u) = |x-y| \cdot |u|, u \in X.$$

$$f_0(m) = \alpha \cdot |x-y|^2, m = \alpha(x-y) \in M$$

で定めろ。このとき

$$|f_0(m)| \leq p(m), \quad m \in M$$

であることに注意する。

i) $F_x - F_y \in M$ の場合。部分空間 $M' \subset X$ を、

$$M' = \{m' = m + \beta(F_x - F_y) \mid m \in M, \beta \in R\}$$

で定めろ。線形汎関数 $f_0' : M' \rightarrow R$ を、

$$f_0'(m') = f_0(m) + \beta c, \quad m' = m + \beta(F_x - F_y) \in M' \quad (2.44)$$

で定めろ。このとき、定数 c は、

$$\begin{aligned} & \sup \{f_0(m) - p(m - [F_x - F_y]) \mid m \in M\} \\ & \equiv c \leq \inf \{p(m + F_x - F_y) - f_0(m) \mid m \in M\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

を満足するように定めよ。このとき、 f_0' は f_0 の拡張である。

$$|f_0'(m')| \leq p(m'), \quad m' \in M'$$

を満足する。したがって、

$$\begin{aligned} & \inf \{p(m + F_x - F_y) - f_0(m) \mid m \in M\} \\ & = \inf \{|\beta(x-y) + F_x - F_y| - \beta|x-y| \mid \beta \in R\} \cdot |x-y| \end{aligned} \quad (2.46)$$

である。又、

$$\begin{aligned} & \inf \{|\beta(x-y) + F_x - F_y| - \beta|x-y| \mid \beta \leq 0\} \\ & \geq |F_x - F_y| \\ & = \gamma(F; x, y) \cdot |x-y|. \end{aligned} \quad (2.47)$$

但し、 $\gamma(\cdot, \cdot, \cdot)$ は、(2.8) で定められた。

そこで、補助定理 2.1 を用いる。

$$\begin{aligned} & \inf \{|\beta(x-y) + F_x - F_y| - \beta|x-y| \mid \beta > 0\} \\ & = \inf \left\{ \frac{|(I+\alpha F)x - (I+\alpha F)y| - |x-y|}{\alpha|x-y|} \cdot |\alpha|x-y|| \mid \alpha > 0 \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|(I+\alpha F)x - (I+\alpha F)y| - |x-y|}{\alpha \cdot |x-y|} \cdot |x-y|$$

$$= \lambda(F; x, y) \cdot |x-y|$$

を得る。定理2-2, (b) に注意すると、(2.46)~(2.48) より

$$\inf \{ p(m+Fx-Fy) - f_0(m) \mid m \in M \} = \lambda(F; x, y) \cdot |x-y|^2 \quad (2.49)$$

を得る 上式と (2.45) より

$$C = \lambda(F; x, y) \cdot |x-y|^2 \quad (2.50)$$

となることを示す。そこで、Hahn-Banachの定理⁽⁶⁸⁾によると、
 f_0 の延長 $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ が存在する。

$$|f(u)| \leq p(u) = |x-y| \cdot |u|, \quad \forall u \in X$$

を満足する。そこで、上式より

$$\|f\| = |x-y|^2 = (u, f) = (u, f_0)$$

が成り立つ。また、 $f \in F_b(x-y)$ であり、(2.44), (2.50) を仮定する。

$$\begin{aligned} (Fx-Fy, f) &= (Fx-Fy, f_0) \\ &= \lambda(F; x, y) \cdot |x-y|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり。1)を得る。

ii) $Fx-Fy \in M$ の場合: $f_0 \in$ Hahn-Banachの定理による延長 (以下も)
の $\exists f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ とすると、 $f \in F_b(x-y)$ となる。そこで、

$$Fx - Fy = d \cdot (x-y)$$

とする。

$$\lambda(F; x, y) = d \geq 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} (Fx-Fy, f) &= (Fx-Fy, f_0) \\ &= d \cdot |x-y|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり 1)を得る。

(証明終)

(注2.15) (2.49) と同様に

$$\sup \{ f_0(m) - p(m - [Fx-Fy]) \mid m \in M \} = -\lambda(-F; x, y) |x-y|^2$$

を得る。従って、 $f \in F_b(x-y)$ は、

$$-\pi(-F; x, y)|x-y|^2 \leq (Fx - Fy, f) \leq \pi(F; x, y) \cdot |x-y|^2$$

を満足することがわかる。

(注 2・16) 1) と 2) の等価性は Kato["] にて示されてる。

以上の二通り、少なくとも式の形の類推という意味において、次のように定義ができる。

[定義 2・16] 写像 $F: X \rightarrow X$ は単調非減^サである。

$$\Leftrightarrow \pi(F; x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X, x \neq y.$$

写像 $F: X \rightarrow X$, $F\theta = \theta$ は受動的である*。

$$\Leftrightarrow \pi(F; x, \theta) \geq 0, \quad \forall x \in X, x \neq \theta$$

(注 2・17) 上の定義を $X = H$ の場合について示すと、次のようになる
(補題 2・11 参照)。

$F: H \rightarrow H$ は単調非減^サである。

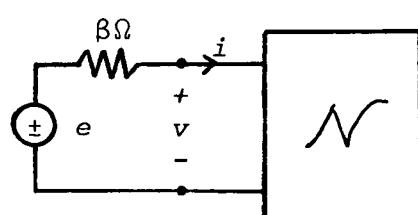
$$\Leftrightarrow \langle Fx - Fy, x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in H, x \neq y.$$

$F: H \rightarrow H$, $F\theta = \theta$ は受動的である。

$$\Leftrightarrow \langle Fx, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H, x \neq \theta.$$

さて次に、定義 2・16 の物理的意味を考えよう。

図 2-1 に示す回路を考える。今、 N の特性が



$$i(t) = (GV)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$G\theta = \theta$$

で与えられるとする。さらに、次の条件：

[A] $G: L_2 \rightarrow L_2$, G : 因果的,

$$\langle GV, v \rangle_T \geq 0, \quad \forall v \in L_2, \quad T \in \mathbb{R}$$

図 2-1 受動性の説明 が満足されるとする。但し、

$$\langle GV, v \rangle_T = \int_{-\infty}^T \langle (GV)(t), v(t) \rangle dt.$$

* $F\theta = \theta$ という条件は、工学的にはほとんど問題でない。

さらに、任意の入力 $e \in L_2 e$ (L_2 の拡張空間) に対して、キルヒhoff の法則およびオームの法則：

$$e = v + \beta G \quad (2.51)$$

をみたす解 $v \in L_2 e$ が存在するとする。

このとき、 $\Gamma e \in L_2$ ならば、 $v \in L_2$ となり、

$$\langle e, e \rangle \equiv \langle v, v \rangle + \beta^2 \langle Gv, Gv \rangle \equiv \langle v, v \rangle \quad (2.52)$$

となる」というのが、受動回路に対するよく知られた結果である

ところ、条件 [A] のゆえに、次の条件：

[B] $G : X \rightarrow X$, G : 因果的.

$$\Re(G; V, \theta) \geq 0, \quad \forall V \in X,$$

が満足されると^{**}、さらに、任意の $e \in X e$ に対して、(2.51) をみたす解 $v \in X e$ が存在するとすると、定理 2.2, (g), (c), (d), 補助定理 2.2 が成り立つ。

$$0 > |e| \geq |e|_+$$

$$\begin{aligned} &= |v + \beta Gv| + \\ &\geq |v|_+, \quad \forall T \in R \end{aligned} \quad (2.53)$$

が成り立つ、 $V \in X$ となること、および (2.52) とよく似て (2.53) も成り立つことがわかる。

このことは、定義 2.16 における受動性の定義が、単に式の形の類推から定義域を拡張したものだけではなく、その物理的意味をも保存しているといふ意味で、従来知られてる（ヒレベルト空間における）受動性の概念をノルム空間へ拡張したものと考えていいことを示している。

又、単調性については、受動性が原点に対してのみ注目した性質が各点において成り立つことをいうと考えればよいので省略する。

* 定義 2.8 参照

** 条件 [A] の場合も、明らかに、 $\Re(G, V, \theta) \geq 0, \forall V \in H, V \neq 0$ が成り立つ。

最後に、後の便利のため、次のような定義を示しておく。

[定義 2.17] 写像 $F: X \rightarrow X$ は狭義単調増加である。

$\Leftrightarrow \lambda(F; x, y) > 0, \forall x, y \in X, x \neq y.$

F は一様に単調増加である。

$\Leftrightarrow \exists m > 0, \lambda(F; x, y) \geq m > 0, \forall x, y \in X, x \neq y.$

(注 2.18) 定理 2.3, 2.4 から、定義 2.12 で示した行列のクラス $M, \mathcal{D}, SCSD, SRSD, PD$ に属する行列は一様単調増加である。

2.4 縮小写像原理

この節では、縮小写像原理およびそれから導かれるいくつもの結果について整理する。

[定義 2.18] \mathbb{Q} をバナッハ空間 B の閉部分集合とする。

写像 $G: B \rightarrow B$ が \mathbb{Q} 上の縮小写像である。

$\Leftrightarrow G$ が次の 2 条件を満足する。

i) $G(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$;

ii) $\exists \gamma \in (0, 1), |Gx - Gy| \leq \gamma |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$

[定義 2.19] x^* が G の不動点である。

$\Leftrightarrow x^* = Gx^*.$

[補題 2.13] (縮小写像原理^(*)) \mathbb{Q} をバナッハ空間 B の閉部分集合とする。写像 $G: B \rightarrow B$ が \mathbb{Q} 上の縮小写像ならば、次の 2 条件が成り立つ。

i) G は \mathbb{Q} 内に唯一の不動点 x^* を有する；

ii) 任意に $x^* \in \mathbb{Q}$ を与え、

$$x^{k+1} = Gx^k, k \in \mathbb{N}$$

とすると、

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$$

となる。

[定義 2.20] 写像 $T: D \subset X \rightarrow R \subset X, D, R$: 開集合、は同相写像である。 $\Leftrightarrow T$ が次の 3 条件を満足する。

- i) T は全射である: $R = T(D)$;
- ii) T は単射である: $Tx \neq Ty \Leftrightarrow x \neq y, \forall x, y \in D$;
- iii) T および $T^{-1}: R \rightarrow D$ は連続である。

[補題 2.14]⁽¹²⁾ 写像 $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, および同相写像 $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を与え。このとき, $\hat{G} = T^*GT$ が開部分集合 $S \subset \mathbb{R}^d$ 上の縮小写像ならば, G は, $T(S)$ 内で唯一の不動点 x^* を有し, 任意の $x^* \in T(S) \cap \mathbb{R}^d$ に対して, $\{x^k | x^{k+1} = Gx^k, k \in \mathbb{N}\}$ は x^* へ収束する。

[系 2.3] 写像 $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ および同相写像 $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を与え。写像 $\hat{G}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を, $\hat{G} = T^*GT$ で定める。もし, \hat{G} が不動点 y^* を有し, さらに次の条件:

$$\forall r > 0, \exists \delta(r) \in (0, 1),$$

$$|\hat{G}y - y^*| \leq r|y - y^*|, \quad \forall y \in \bar{B}[y^*; r] \quad (2.54)$$

が成り立つとする。このとき, G は 内で唯一の不動点 を有する

・又, $T \in \mathcal{F}_{\delta}$ でかつ。

$$\exists m > 0, \lambda(T; x, y) \geq m > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \quad (2.55)$$

が成り立つならば, 任意の $\tilde{x}^* \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\tilde{x}^{k+1} = G\tilde{x}^k + \varepsilon^k, \quad |\varepsilon^k| \leq (1-\gamma_0)|T^*\tilde{x}^k - y^*|m \quad (2.56)$$

とすると,

$$|\tilde{x}^k - x^*| \leq [\gamma_0^k |\tilde{x}^0 - x^*| + \gamma_0^k m] M_0 / m \quad (2.57)$$

が成り立つ。但し, $\gamma_0 \in (0, 1)$ は, $\gamma_0 \triangleq |T^*\tilde{x}^0 - x^*|$ に対して, (2.54) を満足する定数で, M_0 は, 次式で与えられる。

$$M_0 \triangleq \|T; y^*, \gamma_0\|. \quad (2.58)$$

(証明) この系の前半は明らか。後半のみ示す。

とすると,

$$\tilde{y}^{k+1} = \hat{G}y^k + T^*(G\tilde{x}^k + \varepsilon^k) - T^*\tilde{x}^k$$

が成り立つ。 (2.54), (2.55) と定理 2.2, (f) やら

$$|\tilde{y}^k - y^*| \leq \gamma_0 |\tilde{y}^0 - y^*| + (1-\gamma_0)\gamma_0 \leq \gamma_0$$

$$|\tilde{y}^k - y^*| \leq \gamma_0 |\tilde{y}^0 - y^*| + (1-\gamma_0)\gamma_0 \leq \gamma_0$$

$$|\tilde{y}^{k+1} - y^*| \leq \gamma_0 |\tilde{y}^k - y^*| + (1-\gamma_0) \cdot r_0 \leq r_0$$

を得る。従って

$$\begin{aligned} |\tilde{y}^{k+1} - y^*| &\leq \gamma_0^k |\tilde{y}^0 - y^*| + r_0 \\ &\leq \gamma_0^k \cdot |\tilde{x}^0 - x^*| / m + r_0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

となる。一方、M₀ε (2.58) のように定めると、

$$\frac{|\tilde{x}^k - x^*|}{|\tilde{y}^k - y^*|} = \frac{|T\tilde{y}^k - Ty^*|}{|\tilde{y}^k - y^*|} \leq M_0$$

となるから、上式と (2.59) によって (2.57) を得る。 (証明終)

2.5 結 言

この章では、数学的な準備を行った。ここで、定義された概念、整理された結果は以下の章において非常に重要な役割を果す。特に、入関数、μ関数は、本研究において得られる諸結果を導くにあたって重要な部分を占めている。又、それらと行列のクラス、あるいは双対写像との関係を明らかにした。このことは、行列のクラスや双対写像を用いて得られる結果が、入関数、μ関数を用いてより一般的そして統一的な形で述べられるということを示すとともに、入関数、μ関数の有効な範囲の限界を示していく。

第3章 平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性⁽⁷⁰⁾⁽⁷¹⁾

3・1 緒 言

非線形回路における状態方程式の導出^{(22), (23), (72) ~ (77)}、大規模複合系における状態方程式の導出⁽⁷⁸⁾、非線形抵抗回路網の直流解析^{(9), (22) ~ (33)}などの問題は平衡点方程式(直流方程式)の可解性の問題に帰着される。

又、第6章で論じる関数解析的手法による非線形フィードバック系の出入力安定解析は、本質的に、非線形Volterra型積分方程式などの非線形関数方程式の可解性—写像(作用素)の有界性、連續性、因果性など—を調べる問題である。

この章では、 $F(x) = u$ 、又は、 $F(x, y) = u$ なる形で与えられる平衡点方程式および非線形方程式の可解性について論じる。

まず3・2では、基礎となる $F(x) = u$ なる形の方程式について考察する。ただし、 F はバナッハ空間 B からそれ自身への連続写像とする。ここでいう可解性とは、「任意に入力 $u \in B$ を与えたとき、方程式 $F(x) = u$ は唯一解 $x^*(u)$ を有するが、そして $u \mapsto x^*$ は連続か」という問題、すなわち、写像 F の同相写像^{(42), (62)}かどうかを調べる問題である。

この節では、まず3・2・1において、この章の結果を専くにあたって重要な役割を果す接続の性質(the continuation property)^{(12), (13)}を説明するとともに、それを用いて F の同相写像になるための一般的な条件を示す。次に3・2・2では、 F の局所的同相写像⁽¹²⁾になるための条件について考える。そして3・2・3においては、3・2・1および3・2・2の結果をまとめ、さらに実用的な条件を示す。

次に3・3では、3・2の結果を応用して、 $F(x, y) = u$ なる形の方程式の可解性について考察する。但し、 F はバナッハ空間 $B \times B'$ から B の連続写像とする。さてここでいう可解性とは、「任意に入力 $u \in B$ およびパラメータ $y \in B'$ を与えたとき、方程式 $F(x, y) = u$ は唯一解 $x^*(u, y)$ を有するか、そして $(u, y) \mapsto x^*$ は連続か」という問題である。

最後に 3・4 では、3・2, 3・3 で得られた結果を非線形回路に応用し、非線形 RLC 回路の標準形状態方程式を導くとともに、非線形抵抗回路における直流解の存在条件を示す。

3・2 可解性

3・2・1 接続の性質と同相写像

ここでは、以下の議論において重要な役割を果す接続の性質という概念を導入し、それを用いて F が同相写像にならための一般的な条件を示す。接続の性質は、Reinboldt⁽³⁾ によって導入された概念であれば、文献(12)と(13)とはその定義が若干異なる。ここでは、わかり易い文献(12)の定義に従う。

[定義 3・1]⁽¹²⁾ 写像 $F: X \rightarrow X$ は局所的同相写像である。

\Leftrightarrow X の各点 x に対して、 x の開近傍 $U(x)$ および Fx の開近傍 $V(Fx)$ が存在して、 F の U への制限、 $F|_U: U \rightarrow V$ は同相写像である*。

[定義 3・2]⁽¹²⁾ 写像 $F: DCB \rightarrow B$ は、連続写像 $g: [0, 1] \rightarrow B$ に対して接続の性質を有する。

\Leftrightarrow もし連続写像 $p: [0, a] \rightarrow D$, $a \in (0, 1]$ が存在して、

$$F[p(t)] = g(t), \quad \forall t \in [0, a] \quad (3.1)$$

を満足するならば、 $\lim_{t \uparrow a} p(t) = p(a) \in D$ が存在して、 $F[p(a)] = g(a)$ となる。

[補題 3・1]⁽¹²⁾ 写像 $F: DCB \rightarrow B$ は開集合 D において局所的同相写像とする。もし、 F が全ての線形写像

$$g(t) = ty^* + (1-t)y' \quad t \in [0, 1] \quad (3.2)$$

に対して接続の性質を有するならば、 $F(D) = B$ となる。すなはち、 F は D から B への全射である**。但し、 $y^*, y' \in B$, $y^* \neq y'$ は任意の点とする。

(証明) 任意に $x^* \in D$; $y^* \in B$, $y^* \neq y' \in F(x^*)$ を固定する。 $g: [0, 1] \rightarrow$

* 同相写像の定義は、定義 2・20 に示す。

** 文献(12)では、 $B = \mathbb{R}^d$ に対して示している。

B を(3.2)のように定める。 F は局所的同相写像であるから、ある $a \in (0,1]$ に対して、 $p: [0, a] \rightarrow D$, $p \in C$ が存在して、

$$F[p(t)] = f(t), \quad t \in [0, a]. \quad (3.3)$$

となる。このとき、 F が f に対して接続の性質を有するなら、

$$\lim_{t \uparrow a} p(t) = p(a) \in D \quad (3.4)$$

が成立する。

$$F(\xi') = p(a), \quad \xi' = p(a)$$

となる。

1) $a_1 = 1$ の場合。 $y' = F[p(1)] = F(\xi')$ となり、 $y' \in F(D)$ であることがわかる。

2) $a_1 < 1$ の場合。 $(3.3), (3.4)$ と F が同相写像であることおよび D の開集合であることに注意すると、ある $a_2 \in (a_1, 1]$ に対して、 $p: [0, a_2] \rightarrow D$, $p \in C$ が存在して、

$$F[p(t)] = f(t), \quad t \in [0, a_2]$$

が成り立つ。

以下の中を繰り返すと、単調増加列 $\{a_k, k \in \mathbb{N}\} \subset (0, 1]$ が存在して、各 $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $p: [0, a_k] \rightarrow D$ が存在して、

$$F[p(t)] = f(t), \quad t \in [0, a_k]$$

が成り立つ。今、数列 $\{a_k\}$ の極限を a_∞ とする。もし、 $a_\infty = 1$ ならば、上の1)と同様にして、 $y' \in F(D)$ となる。 $y' \in B$ であるから、 $F(D) = B$ となり結論が得られる。

従って、 $a_\infty = 1$ を示す。もし $a_\infty < 1$ とすると、 F が f に対して接続の性質を有するから、

$$\lim_{t \uparrow a_\infty} p(t) = p(a_\infty) \in D$$

が成立する。

$$F[p(a_\infty)] = f(a_\infty)$$

が成り立つ。このとき、上の2)と同様に考えると、 a_∞ は $\{a_k\}$ の極限であることに矛盾する。(証明終)

さて次に、 F が同相写像になるための条件を示そう。まず次の準備をする。

[定義 3・3] 関数のクラス M_0 を次式で定める。

$$M_0 \triangleq \left\{ m : R_+ \rightarrow R_+ \mid m \in P_C; \forall \alpha \in R_+, \exists \varepsilon(\alpha) > 0 \right. \\ \left. m(\beta) \geq \varepsilon, \forall \beta \in [0, \alpha]; \int_0^\alpha m(s) ds = \infty \right\}.$$

[補題 3・2] (Redheffer の不等式^{(18), (19)}) 関数 $b : m : R_+ \rightarrow R$, $b, m \in P_C$ を与えよ。微分不等式：

$$v'_+(t) \triangleq \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} [v(t+\alpha) - v(t)]/\alpha \leq b(t+0)/m(v), \quad v(0) \leq c$$

を考えよ。今

$$B(t) \triangleq \int_0^t b(s) ds$$

$$M(t) \triangleq \int_{v(0)}^t m(s) ds$$

とする。もし、次の 2 条件：

- 1) $\forall t \in R_+, \exists c \in R, M(c) + B(t) = M(t);$
- 2) $\exists t \geq v(0), m(t) > 0$

が満足されれば。

$v(t) \triangleq M^{-1}[M(c) + B(t)], \quad \forall t \in R_+$
が成り立つ。

[補題 3・3] 写像 $F : B \rightarrow B$ が局所的同相写像とする。もし、次の 2 条件のうち 1) と 2) が満足されれば、 $F : B \rightarrow B$ は同相写像である。

- i) $\exists m \in M_0, |F(x) - F(y)| \leq m(\max\{|x|, |y|\}) \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in B;$
- ii) $\exists m \in M_0, |F(x) - F(y)| \leq m(|x - y|) \cdot (x - y), \quad \forall x, y \in B.$

(証明) 假定より、 F が単射であること、 F が連続であることは明らかであるから、 F が全射であることを示せばよい。任意に $y, y' \in B$, $y \neq y'$ を固定し、線形写像 $f : [0, 1] \rightarrow B$ を

$$f(t) = ty + (1-t)y', \quad t \in [0, 1] \tag{3.5}$$

を定める。今、写像 $P : [0, 1] \rightarrow B$, $t \in [0, 1]$ が存在して、

$$F[p(t)] = f(t), \quad * t \in [0, a] \quad (3.6)$$

を満足するとする。今 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, a]$ を a に収束する任意の単調増加列とする。もし、 $\{p(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ がコーシー列になるならば、 B は完備であるから、極限は存在し、

$$\lim_{t \rightarrow a^-} p(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(t_k) = p(a) \in B$$

となる。そこで、 F の連続性から、 $F[p(a)] = f(a)$ となり、 F は f に対する接続の性質をみたす。従って補題 3・1 により結論を得る。

以下 $\{p(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ がコーシー列になることを示す。

まず i) が満足されるとする。このとき、

$$v(t) \triangleq |p(t)|, \quad t \in [0, a)$$

とすると、(3.6) より

$$\begin{aligned} v'_+ &= \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \frac{|F^{-1}[f(t+\alpha)]| - |F^{-1}[f(t)]|}{\alpha} \\ &\leq \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \frac{|y^* - y'|}{m(\max\{|p(t+\alpha)|, |p(t)|\})} \\ &= |y^* - y'| / m[v(t)], \quad * t \in [0, a) \end{aligned} *$$

を得る。従って、

$$b(t) = |y^* - y'|.$$

$$M(T) = \int_{V(0)}^T m(s)$$

とおくと、補題 3・2 より^{**}

$$\begin{aligned} |p(t)| &= v(t) \\ &\leq M^{-1}(|y^* - y'| \cdot t) \\ &\leq M^{-1}(|y^* - y'| \cdot a), \quad * t \in [0, a) \end{aligned} \quad (3.7)^{***}$$

$$\begin{aligned} * \quad \alpha > 0 \text{ に対し}, \quad \alpha |y^* - y'| &= |f(t+\alpha) - f(t)| = |F[p(t+\alpha)] - F[p(t)]| \\ &\geq m(\max\{|p(t+\alpha)|, |p(t)|\}) \cdot |p(t+\alpha) - p(t)|: \end{aligned}$$

$$** \quad m \in M_0 \text{ ら}, \quad M([v(0), \infty)) = \mathbb{R}^+.$$

$$*** \quad T \equiv v(0), \quad m(\alpha) \geq 0, \quad * \alpha \geq 0.$$

を得る。従って、 $m \in M_0$ に注意すると、

$\exists \varepsilon (M^{-1}[|y^* - y'| \cdot a]) > 0, m(|p(t)|) \geq \varepsilon > 0, \forall t \in [0, a)$
が成り立つ。上式と (3.6), (3.7) の S.

$$\begin{aligned} |f(t_i) - f(t_j)| &= |F[p(t_i)] - F[p(t_j)]| \\ &\leq m(\max\{|p(t_i)|, |p(t_j)|\}) \cdot |p(t_i) - p(t_j)| \\ &\leq \varepsilon |p(t_i) - p(t_j)|, \quad \forall i, j \in N \end{aligned}$$

を得る。一方

$$|f(t_i) - f(t_j)| = |t_i - t_j| \cdot |y^* - y'|, \quad \forall i, j \in N \quad (3.8)$$

であるから、

$$|p(t_i) - p(t_j)| \leq (|y^* - y'| / \varepsilon) \cdot |t_i - t_j|, \quad \forall i, j \in N$$

を得る。従って、 $\{p(t_k)\}_{k=1}^\infty$ はヨーリー列となる。

次に ii) が満足されるときは、上と同様に (2),

$$v(t) = |p(t)|, \quad t \in [0, a) \text{ とすると},$$

$$v_+ \equiv |y^* - y'| / m(+0)$$

から、

$$\begin{aligned} |p(t)| &\leq |y'| + |y^* - y'| \cdot t / m(+0) \\ &\leq |y'| + |y^* - y'| \cdot a / m(+0), \quad \forall t \in [0, a) \end{aligned} \quad (3.9)$$

を得る。従って、 $m \in M_0$ の S

$$\exists \varepsilon ([|y'| + |y^* - y'| \cdot a / m(+0)]) > 0, m(|p(t)|) \geq \varepsilon > 0, \quad \forall t \in [0, a)$$

が成り立つ。上式と (3.6), (3.8), (3.9) から、

$$|p(t_i) - p(t_j)| \leq (|y^* - y'| / \varepsilon) \cdot |t_i - t_j|, \quad \forall i, j \in N$$

を得る。従って、 $\{p(t_k)\}_{k=1}^\infty$ はヨーリー列となる。 (証明終)

3・2・2 局所的同相写像

前節では、 F が局所的同相写像であることを仮定した上で議論を行ったが、この節では、 F が局所的同相写像になるための条件について考える。

有限次元空間、すなはち、 $B = \mathbb{R}^d$ である場合について、領域不変性定

理(後に補題3.6で示す)によつて, F が連続かつ单射であれば, F は開写像, 従つて局所的同相写像となることが示される。この節の主な目的は, 一般のバナッハ空間において, F が局所的にリップシツツ連続であるときに, F が局所的同相写像になるための条件を示すことである。

まず次の補助定理を示す。

[補助定理3.1] 写像 $F: B \rightarrow B_0$ は連続とする。もし, 次の条件:

$$\begin{aligned} & \exists z \in B, \quad \exists r_0, \alpha_0, m_0 > 0, \\ & -\text{r}(\alpha_0; -F, x, y) \geq m_0 > 0, \quad \forall x, y \in B_0 \cong B[z; r_0], \quad x \neq y \end{aligned} \quad (3.10)$$

が満足されれば, F の B_0 への制限, $F/B_0: B_0 \rightarrow F(B_0)$ は同相写像となる。ここで, $\text{r}(\cdot; \cdot, \cdot, \cdot)$ は, (2.9) で与えられる。

(証明) 補助定理2.1と(3.10)から,

$$\begin{aligned} -\text{r}(-F; x, y) & \geq -\text{r}(\alpha_0; -F, x, y) \\ & \geq m_0 > 0, \quad \forall x, y \in B_0, \quad x \neq y \end{aligned}$$

を得る。上式と定理2.2, (g) から, F/B_0 は B_0 から $F(B_0)$ への全单射となる。従つて, 後に F が開写像であること, すなはち, 任意の開集合 $D \subset B_0$ に対して, $F(D)$ が開集合であることを示せば結論が得られる。

この証明は次のよう順序で示される。

- 1) 任意に $y' \in F(D)$ を定める;
- 2) y' の適当な開近傍 $V(y')$ を定め, 任意に $y'' \in V(y')$ を定める;
- 3) $x' \in D$ と $Fx' = y'$ なる点とし, x' の適当な開近傍 $U(x') \subset D$ を定め $y'' \in F(U) \subset F(D)$ を示す。

このとき, $y'' \in V(y')$ が任意 $\exists s, V(y') \subset F(U)$ となる。そこで, $y'' \in F(U)$ が任意 $\exists s$ から, $F(U)$ は開集合となる。

$r > 0$ を, $U(x') \cong B_1 \cong B[x'; r]$ とするとように十分小さくとる。そこで, $V(y') \cong B_1 \cong B[y'; r, m_0]$ とする。

(3.10) より,

$$0 < m_0 \leq -\text{r}(\alpha_0; -F, x, y)$$

$$= \frac{|x-y| - |(I-\alpha_0 F)x - (I-\alpha_0 F)y|}{\alpha_0 |x-y|}, \quad x, y \in \bar{B}, x \neq y$$

(3.11)

を得る。任意に $y^* \in B$ を固定し、写像 $H: \bar{B} \rightarrow B$ を、

$$Hx = (I - \alpha_0 F)x + \alpha_0 y^*$$

と定めると、(3.11) より、

$$|Hx - H\tilde{x}| \leq (1 - \alpha_0 m_0) \cdot |x - \tilde{x}|, \quad x, \tilde{x} \in \bar{B}. \quad (3.12)$$

および、

$$\begin{aligned} |Hx - x'| &\leq |Hx - Hx'| + |x' - \alpha_0 Fx' + \alpha_0 y^* - x'| & * \\ &\leq (1 - \alpha_0 m_0) |x - x'| + \alpha_0 |y^* - y'| & ** \\ &< (1 - \alpha_0 m_0) r_i + \alpha_0 \cdot r_i \cdot m_0 & *** \\ &= r_i, \quad x \in \bar{B}. & (3.13) \end{aligned}$$

を得る。従って、 $H(\bar{B}) \subset \bar{B}$ であり、(3.12) と縮小写像原理（補題2.13）から、 H は唯一の不動点 $x^* \in \bar{B}$ を有する。このとき、

$$x^* = Hx^* \iff Fx^* = y^*$$

に注意すると、 $y^* \in F(D)$ となる。
(証明終)

これを用いて次の補題を得る。

[補題3.4] 写像 $F: B \rightarrow B$, $F \in \mathcal{F}_{LL}$ を与えよ。もし、次の条件：

$$\forall z \in B, \exists r(z), m(z) > 0,$$

$$\forall (F; x, y) \in \mathcal{F}, \forall x, y \in B [z; r], x \neq y.$$

が満足されれば、 $F: B \rightarrow B$ は局所的同相写像となる。

(証明) 任意に $z \in B$ を与えよ。 $r_0 = \min\{r(z), s(z)\}$ とする。但し $s(z)$ は定義2.7によって定まる。さらに、 $\lambda_0 = \|F(z, r)\|$ とする。ここで、 $\|\cdot\|$ は、(2.4) によって定められる。任意に $\beta > 1$ を与え、

$$R \triangleq \beta + \lambda_0$$

* $Hx' = (I - \alpha_0 F)x' + \alpha_0 y^*$.

** (3.12) および $Fx' = y'$ を用いよ。

*** $z \in \bar{B} \equiv \bar{B}[z; r]$, $y^* \in B[y'; r, m_0]$.

$$= \frac{|x-y| - (\frac{1}{k})|Fx-Fy|}{(\frac{1}{k}) \cdot |x-y|}$$

$$\geq k - l_0 = \beta > 0, \quad \forall x, y \in B_0 \triangleq B[z; r_0], \quad x \neq y$$

を得る。従って、補助定理3・1に $\delta > 0$, $(kI+F): B_0 \rightarrow (kI+F)(B_0)$ は同相写像となる。

以下次の順序で証明を行う。

- 1) 任意に開集合 $D \subset B_0$ を定める;
 - 2) 任意に $y' \in F(D)$ を固定する;
 - 3) $x' \in D$ と $Fx' = y'$ の点をとる;
 - 4) $r_1 > 0$ を, $B_1 \triangleq B[kx' + y'; r_1] \subset (kI+F)(D)$, $B_2 \triangleq B[x'; r_1] \subset D$ とするように定める。(このように $r_1 > 0$ は, $(kI+F)(D)$ が D の開集合であることを存在する。);
 - 5) y' の開立傍 $B_3 \triangleq B[y'; (m/k)r_2]$, $r_2 \triangleq [m/(k+m)]r_1 < r_1$ の任意の点 y^2 をとる;
 - 6) 任意に $x \in \bar{B}_4 \triangleq \bar{B}[x'; r_2] \subset B_2 \subset B_0$ に対して,
- $$|y^2 + kx - (y' + kx')| \leq (m/k)r_2 + k \cdot r_2 \\ = (m/k) \cdot r_1 \\ < r_1,$$

すなわち,

$$(y^2 + kx) \in B_1 \subset (kI+F)(D), \quad \forall x \in \bar{B}_4$$

となることに注意して, 写像 $H: \bar{B}_4 \rightarrow B_\Sigma$

$$Hx = (kI+F)^{-1}(kx + y^2)$$

を定義する:

7) 定理2.2, (d) と仮定より

$$\pi(kI+F; x, \tilde{x}) \geq k+m > 0, \quad \forall x, \tilde{x} \in \bar{B}_4 \subset B_0.$$

が成り立つことと $(kI+F): B_0 \rightarrow (kI+F)(B_0)$ が同相写像であることに注

* $R = l_0 + \beta > l_0$, $l_0 \leq m$ (注2.9, 補助定理2.3参照).

意すると、定理2.2, (g) りより、任意の $y, \tilde{y} \in (kI+F)(B_0)$ に対して
 $| (kI+F)^{-1}y - (kI+F)^{-1}\tilde{y} | \leq [\frac{1}{(k+m)}] | y - \tilde{y} |$

従って、

$$| Hx - H\tilde{x} | \leq [\frac{1}{(k+m)}] | x - \tilde{x} |, \quad * x, \tilde{x} \in \overline{B_4}$$

が成り立つ。そしてこれを用いると、任意の $x \in \overline{B_4} \setminus \{x\}$ で、

$$\begin{aligned} | Hx - H' | &\leq | Hx - Hx' | + | Hx' - x' | \\ &\leq [\frac{1}{(k+m)}] \cdot | x - x' | \\ &\quad + | (kI+F)^{-1}(y^2+kx') - (kI+F)^{-1}(y^2+kx') | \\ &\leq [\frac{1}{(k+m)}] \cdot r_2 + [\frac{1}{(k+m)}] \cdot (M_k) \cdot r_2 \\ &\leq r_2, \end{aligned}$$

x

すなわち、

$$Hx \in \overline{B_4}, \quad * x \in \overline{B_4}$$

となる。従って、縮小写像定理から、 M_1 の唯一の不動点 $x^* \in \overline{B_4} \cap B_2$ を有する。よって、

$$x^* = Hx^* \Leftrightarrow Fx^* = y^*$$

に注意すると、 $y^* \in F(\overline{B_4}) \subset F(D)$ となる；

(g) $y^* \in B_3$ は任意であるから、 $B_3 \subset F(B_2) \subset F(D)$ となる；

(g) $y^* \in F(D)$ は任意であるから、 $F(D)$ は開集合である。

以上のことから、 F が開写像であることがわかった。

一方、仮定と定理2.2, (g) りより、 $F/B_0 : B_0 \rightarrow F(B_0)$ は全単射である

。従って、 $F/B_0 : B_0 \rightarrow F(B_0)$ は同相写像であり、 $z \in B$ は任意であるから
 $F : B \rightarrow B$ は局所的同相写像となる。 (証明終)

ヒルベルト空間については、又の Minty ⁽¹⁹⁾ による次の結果が知られている。

[補題3.5] ⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾ 写像 $F : H \rightarrow H$, $F \in C$ を与え。もし次の条件:

* $z \in H$, $\exists r(z)$, $m(z) > 0$,

$\lambda(F; x, y) \geq m > 0$, * $x, y \in B[z; r]$, $x \neq y$

が成り立つば、 $F: H \rightarrow H$ は局所的同相写像である。但し、 $\lambda_2(\cdot; \cdot)$ は補題 2.11 で与えられる。

(注 3.1) 補題 3.4 と 3.5 の違いは、 $F \in \text{Field } F \in C$ の点である。

最後に、有限次元空間の場合について示す。

[補題 3.6] (領域不变性定理^{(34), (35)}) 写像 $F: R^d \rightarrow R^d$, $F \in C$ は单射とする。このとき、任意の開集合 $D \subset R^d$ に対し、 $F(D)$ は開集合である。すなはち、 F は開写像となる。

3.2.3 同相写像のための実用的十分条件

3.2.1 で示した補題 3.3 は、 F の性質を調べるために非常に有益であるが、 F がそのような条件をみたすが否かをどうにして調べるかという点で実用性に欠ける面を持ってくる。このような観点から、この節では、 F が同相写像になるための実用的十分条件を示す。

[定理 3.1] 写像 $F: B \rightarrow B$, $F \in \text{Field}$ を与えよ。もし、次の 2 条件のうちいずれか一方が満足されるならば、 $F: B \rightarrow B$ は同相写像である。

- i) $\exists m \in M_0$, $\lambda_2(F; x, y) \geq m(\max\{|x|, |y|\})$, $\forall x, y \in B, x \neq y$;
- ii) $\exists m \in M_0$, $\lambda_2(F; x, y) \leq m(|x - y|)$, $\forall x, y \in B, x \neq y$.

(証明) 補題 3.4, 定理 2.2, (g), および補題 3.3 から明らか。

(証明終)

[定理 3.2] 写像 $F: H \rightarrow H$, $F \in C$ を与えよ。もし、次の 2 条件のうちいずれか一方が満足されれば、 $F: H \rightarrow H$ は同相写像である。

- i) $\exists m \in M_0$, $\lambda_2(F; x, y) \geq m(\max\{|x|, |y|\})$, $\forall x, y \in H, x \neq y$;
- ii) $\exists m \in M_0$, $\lambda_2(F; x, y) \leq m(|x - y|)$, $\forall x, y \in H, x \neq y$.

(証明) 補題 3.5, 定理 2.2, (g), および補題 3.3 から明らか。

(証明終)

[系 3.1] 写像 $F: H \rightarrow H$, $F \in C$ を与えよ。もし、次の 2 条件のうち

i) すなはち一方が満足されれば、 $F: H \rightarrow H$ は同相写像である。

i) $\exists m > 0, \forall z, F(z, y) \geq m, \forall x, y \in H, x \neq y^{(1)}$;

ii) $\exists m \in M^* \subset M_0, \forall z, F(z, y) \geq m (\max\{|x|, |y|\})$,

$\forall x, y \in H, x \neq y^{(2)}$.

但し、 M_0^* は M_0 と 単調非増加関数の集合との積集合を示す。

(証明)

(有財)

同様に、有限次元空間の場合について次の結果が成り立つ。

[定理3・3] 写像 $F: R^d \rightarrow R^d, F \in C$ を与える。もし、次の2条件のうち、すなはち \rightarrow の満足されれば、 $F: R^d \rightarrow R^d$ は同相写像である。

i) $\exists m \in M_0, \lambda(F; x, y) \geq m (\max\{|x|, |y|\}), \forall x, y \in R^d, x \neq y$;

ii) $\exists m \in M_0, \lambda(F; x, y) \geq m(|x-y|), \forall x, y \in R^d, x \neq y$.

(証明) 領域不变性定理(補題3・6), 定理2・2.(g), および補題3・3 が明らか。

(注3・2) 定理3・3の結果は、次の2つの意味において、Minty⁽¹⁾ と Browder の結果の拡張となるであろう。

i) ノルムは任意に指定されたノルムであり、 ℓ_2 ノルムとは限らない;

ii) $M_0^* \subset M_0$ である(系3・1参照)。

[系3・2]⁽²⁾ 写像 $F: R^d \rightarrow R^d, F \in \mathcal{F}_q, LCC$ を与える。もし、次の条件:

$\exists \varepsilon > 0, \exists p \geq 0, \exists m \in M(\varepsilon, p)$.

$-m[-F; z, r] \geq m(r), \forall z \in R^d, r > 0$

が満足されれば、 $F: R^d \rightarrow R^d$ は同相写像である。但し、 $M(\varepsilon, p)$ は。

$M(\varepsilon, p) \triangleq \{m: R^+ \rightarrow R^+ \mid m \in PC; m(x) \geq \varepsilon x^p, \forall x \in R^+\}$ で与えられる。

(証明) 任意に $x, y \in R^d, x \neq y$ をとる。 $z \triangleq \frac{1}{2}(x+y), r = \frac{1}{2}|x-y|$ とすると、 $x, y \in \bar{B}[z; r]$ となる。従って仮定から、

$$\lambda(F; x, y) \geq -m[-F; z, r]$$

$$\begin{aligned} &\leq m(r) \\ &= m(|x-y|) \end{aligned}$$

を得る。一方、 $\exists_{\mu} \in C, m(\varepsilon, p) \subset M_0$ であるから、定理 3・3 によって結論を得る。

[系 3・3] 写像 $F: R^d \rightarrow R^d, F \in C'$ を与えよ。もし、次の条件：

$$^3 m > 0, -\mu[-F'(z)] \geq m > 0, \forall z \in R^d.$$

が満足されるならば、 $F: R^d \rightarrow R^d$ は同相写像である。

(証明) 補題 2・8、および定理 3・3 から明らか。 (証明終)

(注 3・3) Desoer 和 Haneda⁽²¹⁾ は、 $F \in C' \subset P_C'$ の場合にこの結果を示している。そしてそれは、 L_2 ノルムを用いて Ohtsuki 和 Watanabe⁽²³⁾, Kuh 和 Hajj⁽²⁵⁾、および Ohtsuki 和 Yoshida⁽²⁶⁾ の結果や、 L_1 ノルムを用いて Stern⁽²²⁾、および Willson, Jr.⁽³⁰⁾ の結果を特殊な場合と併んでいる。

3・3 パラメータに関する連続性

前節では、 $F(x) = u$ なる形の方程式の可解性について考えた。そしてそれは、連続な逆写像の存在の問題であった。それに対し、この節では、 $F(x, y) = u$ なる形の方程式の可解性について考える。この場合は、“陰関数”的存在の場合となる*。

さて、写像 $F: B \times B' \rightarrow B$ は連続とする。今、任意に $y \in B'$ を固定しておき方程式： $F_y(x) \triangleq F(x, y) = u$ は、定理 3・1 を用いると適当な条件の下に唯一解 $x^* = F_y(u)$ を有するであろう。従って、 $G: B \times B' \rightarrow B$ を $G(u, y) \triangleq F_y(u)$ で定めると、方程式： $F(x, y) = u$ は、 F_y が存在することを保証するような条件の下に、唯一解 $x^* = G(u, y)$ を有する。すばやく $F(G(u, y), y) = u$ は $G: B \times B' \rightarrow B$ が存在する。これで、最初に、“陰関数”という語を用いて理由である。ところで、この G の連続性について

* 通常、陰関数という語は連続微分可能という条件の下でのみ使われる。従ってその意味で、陰関数という語は適切ではないかも知れない。

はどうであろうか、これがこの節の主たる問題である。

これに対する結果は次のようにならう。

[定理3・4] 写像 $F: B \times B' \rightarrow B$, $F \in \mathcal{F}_{\text{el}}$ を与えよ^{*}。もし、次の2条件のうちいずれか一方が成立すれば、写像 $G: B \times B' \rightarrow B$, $G \in C$ が存在して、

$$F(G(u, y), y) = u, \quad \forall (u, y) \in B \times B'$$

を満足する。

i) $\exists m \in M_0, \exists k \geq 0, \forall y \in B'$,

$$\pi(F(\cdot, y); x, \tilde{x}) \geq m(\max\{|x|, |\tilde{x}|\} + k|y|), \quad \forall x, \tilde{x} \in B, x \neq \tilde{x}$$

ii) $\exists m \in M_0, \forall y \in B'$,

$$\pi(F(\cdot, y); x, \tilde{x}) \geq m(|x - \tilde{x}|), \quad \forall x, \tilde{x} \in B, x \neq \tilde{x}$$

(証明) 写像 $\bar{\pi}: B \times B' \rightarrow B \times B'$ を、

$$\bar{\pi}(x, y) = (F(x, y), y), \quad (x, y) \in B \times B' \quad (3.14)$$

で与えよ。このとき、任意に $(u, z) \in B \times B'$ を与えよ、方程式：

$$\bar{\pi}(x, y) = (u, z)$$
 の可解性について考えよと、明らかに、

$$y = z$$

であり、これから、

$$F(x, z) = u$$

なる方程式が得られる。写像 $F_z: B \rightarrow B$ を、 $F_z(x) \triangleq F(x, z)$ で与えると假定する、 $F_z \in \mathcal{F}_{\text{el}}$ とする。又、 $\tilde{m}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$\tilde{m}(a) \triangleq m(a + k|z|), \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$$

で定めると、 $m \in M_0$ ならば、 $\tilde{m} \in M_0$ となることは容易にわかる。従って、条件 i) 又は ii) が満足されるとより、定理3・1 より (3.15) は唯一解 $x^* = F_z^{-1}(u)$ を有する。従って、任意の $(u, z) \in B \times B'$ に対して、

(3.14) は、それに対応した一意解 $(F_z^{-1}(u), z)$ を有する。このことから $\bar{\pi}: B \times B' \rightarrow B \times B'$ は全单射となることがわかる。従って、後は $\bar{\pi}$ の連續性をいえよ。そしてそのためにには、 $\bar{\pi}$ が開写像であることを示せばよい。

* $B \times B'$ のルムは、 $|F(x, y)| \triangleq |x| + |y|$ で与えられる。

- 1) 任意に開集合 $D \subset B \times B'$ を与える；
- 2) 任意に $(u', z') \in \bar{\pi}(D)$ を与える；
- 3) (x', y') を $\bar{\pi}(x', y') = (u', z')$ なる点とする；
- 4) $F \in \mathcal{F}_{el}$ から $\bar{\pi} \in \mathcal{F}_{el}$ となることに注意して、 $r_i \in (0, \delta(x', y'))$ を十分小さくとり、 $B_i \equiv B[(x', y'); r_i] \subset D$ とするようにする；
- 5) $l_0 \equiv \| \bar{\pi} ; (x', y'), r_i \|$ とする；
- 6) 任意に $\beta > 2l_0$ を定める；
- 7) $A : B \times B' \rightarrow B \times B'$ を、 $A(x, y) \equiv (x, \beta y)$ で定める；
- 8) $\bar{\pi} : B_i \rightarrow B \times B'$ を、 $\bar{\pi}(x, y) = (A \circ \bar{\pi})(x, y) = (F(x, y), \beta y)$ で定める。

このとき、 $x \neq \bar{x}$ ならば、

$$\begin{aligned}
 & \lambda(\bar{\pi}; (x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|x + \alpha F(x, y) - [\bar{x} + \alpha F(\bar{x}, \bar{y})]| + (1 + \alpha \beta)|y - \bar{y}| - (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)}{\alpha (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)} \\
 &\geq \frac{\lambda(F(\cdot, y); x, \bar{x}) |x - \bar{x}| - |F(\bar{x}, y) - F(x, y)| + \beta |y - \bar{y}|}{|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|} \quad *** \\
 &\equiv \lambda(F(\cdot, y); x, \bar{x}) + (\beta - 2l_0) |y - \bar{y}| / (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|) \\
 &\equiv \lambda(F(\cdot, y); x, \bar{x}) \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

を得る。同様に、 $x = \bar{x}$ ならば、

$$\lambda(\bar{\pi}; (x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \geq \beta > 0 \tag{3.17}$$

を得る。従って、条件 i) 又は ii) と (3.16), (3.17) および補題 3.4 から、 $\bar{\pi} : B_i \rightarrow \bar{\pi}(B_i)$ は同相写像となる。

- 9) $B_i \subset D$ から、 $\bar{\pi}(B_i) = (A^{-1} \circ \bar{\pi})(B_i) \subset \bar{\pi}(D)$ ；
- 10) $A : B \times B' \rightarrow B \times B'$ は、明らかに同相写像であり、 $\bar{\pi}(B_i)$ は開集合であるから、 $\bar{\pi}(B_i) = (A^{-1} \circ \bar{\pi})(B_i)$ が開集合となる；
- 11) $(u', z') \in \bar{\pi}(B_i) \subset \bar{\pi}(D)$ は任意であるから、 $\bar{\pi}(D)$ は開集合となる。

以上で、 $\bar{\pi}$ が開写像となることがわかった。

(証明終)

さて次に、有限次元空間の場合について示す。

[定理3・5] 写像 $F: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F \in C$ を与えよ。もし次の条件のうちいずれか一方が成り立つば、写像 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^d$, $G \in C$ が存在して、

$$F(G(u, y), y) = u, \quad \forall (u, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$$

を満足する。

i) $\exists m \in M_0, \exists R \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^r$,

$$\lambda(F(\cdot, y); x, \tilde{x}) \geq m(\max\{|x|, |\tilde{x}|\}), \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d, x \neq \tilde{x};$$

ii) $\exists m \in M_0, \forall y \in \mathbb{R}^r$,

$$\lambda(F(\cdot, y); x, \tilde{x}) \geq m(|x - \tilde{x}|), \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d, x \neq \tilde{x}.$$

(証明) 写像 $\bar{\Psi}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ を、

$$\bar{\Psi}(x, y) = (F(x, y), y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$$

で与えよ。このとき、定理3・4の証明の前半と同様にして、 $\bar{\Psi}$ は全単射であることが示される。一方、 $F \in C$ から、 $\bar{\Psi} \in C$ となる λ の領域不変性定理(補題3・6)によつて $\bar{\Psi}$ は開写像となる。 (証明終)

[系3・4] 写像 $F: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F \in PC'$ を与えよ。もし、次の条件:

$$\exists m > 0, -\mu[-\partial_x F(x, y)] \geq m > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$$

が満足されれば、写像 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^d$, $G \in C$ が存在して、

$$F(G(u, y), y) = u, \quad \forall (u, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$$

を満足する。但し、 $\partial_x F(x, y)$ は点 (x, y) における $x \mapsto F(x, y)$ の偏微分を示す。

(証明) 補題2・8、および定理3・5から明らか。 (証明終)

(注3・4) KuhとHajj⁽²⁵⁾は、 $F \in C \cap PC'$ の場合にこの結果を L_2 と L^∞ の場合について示している。その場合 $G \in C'$ となる。

[系3・5] 写像 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F \in C$, および $A \in \mathbb{R}^{d \times r}$ を与えよ。もし次の条件:

$$\exists m \in M_0, \lambda(F; x, \tilde{x}) \geq m(|x - \tilde{x}|), \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d, x \neq \tilde{x}$$

が成り立つれば、写像 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^d$, $G \in C$ が存在して

$$F(G(u, y) + Ay) = u, \quad \forall (u, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$$

を満足する。

(証明) 定理3・5から明らか。

(証明終)

3・4 応用例

3・4・1 非線形RLMC回路における状態方程式の導出

非線形時間不变RLMC回路網：非線形時間不变結合抵抗、非線形時間不变キャパシタ、非線形時間不变結合インダクタ、および独立電圧源、電流源からなる電気回路網を考える。

与えられたRLMC回路には、適当なノーマル木^{*}で、次の条件(A-1)～(A-3)を満足するものが存在するものとする。

(A-1) :

$$\begin{bmatrix} V_R \\ i_g \end{bmatrix} = f(i_R, V_g), f: \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_g} \rightarrow \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_g}, f \in C;$$

$$\exists m_R \in M_0, R_2(f; x, y) \geq m_R(|x - y|_2), \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_g}, x \neq y;$$

(A-2) :

$$g_c = h_c(V_c), h_c: \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}, h_c \in C;$$

$$\exists m_c \in M_0, R_2(h_c; x, y) \geq m_c(|x - y|_2), \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_c}, x \neq y;$$

$$g_s = h_s(V_s), h_s: \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}, h_s \in C;$$

$$R_2(h_s; x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_s}, x \neq y;$$

(A-3) :

$$\begin{bmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_L(i_L, i_P) \\ g_R(i_L, i_P) \end{bmatrix} \quad g_L: \mathbb{R}^{n_L} \times \mathbb{R}^{n_P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_L}, g_R: \mathbb{R}^{n_L} \times \mathbb{R}^{n_R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_R}, g_L, g_R \in C;$$

$$\exists m_L \in M_0^*, R_2(g; x, y) \geq m_L(|x - y|_2), \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_L} \times \mathbb{R}^{n_R}, x \neq y;$$

但し, $g(i_L, i_P) \triangleq (g_L(i_L, i_P), g_R(i_L, i_P))$.

* ノーマル木：全ての電圧源、できるだけ多くのキャパシタを木に含み、できるだけ少ないインダクタを木に含む。又、電流源は木に含まなければいい。

ここで、添字は慣例に従って表3・1のよう規定している。又、 v , i , \dot{v} , \dot{i} および中は、それぞれ、電圧、電流、電荷、および磁束の変数を示し添字をつけて区別している。例えば、 v_E は本枝のキャパシタの電圧を示している。又、 n_k は素子 k の数（例えは、 n_G は G の数）を示す。

表3・1 添字記号

	電圧源	キャパシタ	抵抗	インダクタ	電流源
木枝	E	C	G	Γ	
リニク枝		S	R	L	J

1-マル木によって定まる基本ループ行列 $B_f = [I : F]$ の主要部下を次のように表やす。

$$F \triangleq \begin{bmatrix} F_{SE} & F_{Sc} & 0 & 0 \\ F_{RE} & F_{Rc} & F_{RG} & 0 \\ F_{LE} & F_{Lc} & F_{LG} & F_{LR} \\ F_{JE} & F_{Jc} & F_{JG} & F_{JR} \end{bmatrix}$$

(注3・5) $F_{SG} = 0$, $F_{ST} = 0$, $F_{RT} = 0$ となるのは、1-マル木の定義による⁽⁸⁾。

電圧則 (KVL), 電流則 (KCL) から、

$$\begin{bmatrix} v_R \\ i_G \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} i_R \\ v_G \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \tilde{v}_R \quad (3.19)$$

を得る。但し、

$$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -F_{RG} \\ F_{RG}^{\text{tr}} & 0 \end{bmatrix}, \beta \triangleq \begin{bmatrix} -F_{RC} & 0 \\ 0 & F_{LG}^{\text{tr}} \end{bmatrix}, \tilde{v}_R \triangleq \begin{bmatrix} -F_{RE} v_E \\ F_{JG}^{\text{tr}} i_J \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

条件 $(A-1) \Leftarrow (3.19)$ から

$$f(i_R, v_G) - \alpha \begin{bmatrix} i_R \\ v_G \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \tilde{v}_R \quad (3.21)$$

を得る。 $\alpha^{\text{tr}} = -\alpha$ であることに注意すると、条件 $(A-1)$ から、

$$\begin{aligned}\lambda_2(f - \alpha; x, y) &\geq \lambda_2(f; x, y) \\ &\geq m_R(1x - \delta_2), \quad \forall x, y \in R^{n_R} \end{aligned} \quad (3.22)$$

が成り立つ。従って、定理3・3のう。

3) $\hat{f}: R^{n_R} \times R^{n_G} \rightarrow R^{n_R} \times R^{n_G}$, $\hat{f} \in C$,

$$\begin{bmatrix} i_R \\ V_G \end{bmatrix} = \hat{f}(\beta \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \tilde{V}_R)$$

を得る。KVLとKCLのう。

$$\begin{cases} V_S = -F_{SC}V_C - F_{SE}V_E \\ i_C = F_{SC}^{\text{tr}}i_S + F_{RC}^{\text{tr}}i_R + F_{LC}^{\text{tr}}i_L + F_{JC}^{\text{tr}}i_J \end{cases}$$

が成り立つ。上式と(A-2)のう。

$$\begin{aligned} i_C &= \dot{q}_C \\ &= \frac{d}{dt}[h_C(V_C)] \\ &= F_{SC}^{\text{tr}}\dot{q}_S + F_{RC}^{\text{tr}}i_R + F_{LC}^{\text{tr}}i_L + F_{JC}^{\text{tr}}i_J \\ &= \frac{d}{dt}[F_{SC}^{\text{tr}}h_S(-F_{SC}V_C - F_{SE}V_E)] + F_{RC}^{\text{tr}}i_R + F_{LC}^{\text{tr}}i_L + F_{JC}^{\text{tr}}i_J \\ \therefore \quad &\frac{d}{dt}[h_C(V_C) - F_{SC}^{\text{tr}}h_S(-F_{SC}V_C - F_{SE}V_E)] \\ &= F_{RC}^{\text{tr}}i_R + F_{LC}^{\text{tr}}i_L + F_{JC}^{\text{tr}}i_J \end{aligned} \quad (3.24)$$

を得る。KVLとKCLのう。

$$\begin{cases} V_L = -F_{LR}V_R - F_{LG}V_G - F_{LC}V_C - F_{LE}V_E \\ i_T = F_{LR}^{\text{tr}}i_L + F_{JR}^{\text{tr}}i_J \end{cases}$$

が成り立つ。上式と(A-3)のう。

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{d}{dt}[g_L(i_L, i_T)] \\ &= -F_{LR} \frac{d}{dt}[g_R(i_L, i_T)] - F_{LG}V_G - F_{LC}V_C - F_{LE}V_E \\ \therefore \quad &\frac{d}{dt}[g_L(i_L, F_{LR}^{\text{tr}}i_L + F_{JR}^{\text{tr}}i_J) + F_{LR}g_R(i_L, F_{LR}^{\text{tr}}i_L + F_{JR}^{\text{tr}}i_J)] \\ &= -F_{LG}V_G - F_{LC}V_C - F_{LE}V_E \end{aligned} \quad (3.25)$$

を得る。今、

$$\begin{cases} \delta \triangleq h_C(V_C) - F_{SC}^{\text{tr}}h_S(-F_{SC}V_C - F_{SE}V_E) \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \phi \triangleq g_L(i_L, F_{LR}^{\text{tr}}i_L + F_{JR}^{\text{tr}}i_J) + F_{LR}g_R(i_L, F_{LR}^{\text{tr}}i_L + F_{JR}^{\text{tr}}i_J) \end{cases}$$

$$x \triangleq [g^{\text{tr}}, \phi^{\text{tr}}]^{\text{tr}} \quad (3.27)$$

$$y \triangleq [U_c^{\text{tr}}, i_L^{\text{tr}}]^{\text{tr}} \quad (3.28)$$

$$\gamma \triangleq \begin{bmatrix} 0 & F_{LC}^{\text{tr}} \\ -F_{LC} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$u \triangleq \begin{bmatrix} F_{JC}^{\text{tr}} i_J \\ -F_{LE} U_E \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

とすると、(3.23)～(3.30)から、

$$\dot{x} = -\beta^{\text{tr}} \hat{f}(\beta y + \tilde{v}_R) + \gamma y + u \quad (3.31)$$

を得る。一方、(A-2) と補題 2・11 カラ、

$$\begin{aligned} & \pi_2(\hat{h}_c - F_{Sc}^{\text{tr}} \hat{h}_s(-F_{Sc} \cdot -\gamma); \xi, \varsigma) \\ &= \frac{\langle \hat{h}_c(\xi) - F_{Sc}^{\text{tr}} \hat{h}_s(-F_{Sc} \xi - \gamma) - [\hat{h}_c(\xi) - F_{Sc}^{\text{tr}} \hat{h}_s(-F_{Sc} \xi - \gamma)], \xi - \varsigma \rangle}{\langle \xi - \varsigma, \xi - \varsigma \rangle} \\ &= \pi_2(\hat{h}_c; \xi, \varsigma) + \frac{\langle \hat{h}_s(-F_{Sc} \xi - \gamma) - \hat{h}_s(-F_{Sc} \xi - \gamma), -F_{Sc}(\xi - \varsigma) \rangle}{\langle \xi - \varsigma, \xi - \varsigma \rangle} \end{aligned}$$

$$\geq m_c (|\xi - \varsigma|_2), \forall \xi, \varsigma \in R^{n_c}, \xi \neq \varsigma, \forall \gamma \in R^{n_s} \quad (3.32)^*$$

が成り立つから、(3.26) と定理 3・5 カラ、

$$\exists \hat{f}: R^{n_c} \times R^{n_s} \rightarrow R^{n_c}, \hat{f} \in C, U_c = \hat{f}(y, -F_{SE} U_E) \quad (3.33)$$

を得る。又、(A-3) と補題 2・11 カラ

$$\begin{aligned} & \pi_2(q_L(\cdot, F_{LP}^{\text{tr}} \cdot + \gamma) + F_{LP} q_R(\cdot, F_{LP}^{\text{tr}} \cdot + \gamma); \xi, \varsigma) \\ & \geq m_L (|\xi, F_{LP}^{\text{tr}} \xi + \gamma - (\varsigma, F_{LP}^{\text{tr}} \varsigma + \gamma)|_2) \\ & = m_L (\{ \langle \xi - \varsigma, (I + F_{LP} F_{LP}^{\text{tr}})(\xi - \varsigma) \rangle \})^{1/2} \\ & \geq m_L (\sqrt{1+R} \cdot |\xi - \varsigma|_2) \end{aligned} \quad (3.34)^{**}$$

が成り立つ。但し、 $R \triangleq \mu_2(F_{LP} F_{LP}^{\text{tr}}) \geq 0$ 。

$m_L \in M_0^*$ ならば、 $\tilde{m}_L(a) \triangleq m_L(\sqrt{1+R} \cdot a)$, $a \in R_+$ とすると、 $\tilde{m}_L \in M_0$ であるから、(3.34)，定理 3・5 と (3.27) カラ、

$$\exists \hat{g}: R^{n_L} \times R^{n_R} \rightarrow R^{n_L}, \hat{g} \in C, i_L = \hat{g}(\phi, F_{TR}^{\text{tr}} i_J) \quad (3.35)$$

を得る。従って、

* $-F_{Sc}(\xi - \varsigma) = -F_{Sc}\xi - \gamma - [-F_{Sc}\varsigma - \gamma]$ および (A-2) によろ。

** $m_L \in M_0^*$ であるから m_L は単調非増加である。

$$V_x \triangleq \begin{bmatrix} -F_{SE} V_E \\ F_{JP}^{tr} i_J \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

とすると、(3.27), (3.28), (3.33), (3.35)および(3.36)から

$$\dot{x} = \psi(x, V_x) \quad (3.37)$$

を得る。但し、

$$\psi(x, V_x) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{f}(x, -F_{SE} V_E) \\ \hat{g}(x, F_{JP}^{tr} i_J) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

(3.31)および(3.37)から

$$\dot{x} = -\beta^{tr} \hat{f} [\beta \psi(x, V_x) + \tilde{V}_R] + \gamma \psi(x, V_x) + u \quad (3.39)$$

が成り立つ。これが非線形RLMC回路の1つの状態方程式表現である。

3・4・2 非線形抵抗回路における直流解析への応用

ここでは、2つのタイプの直流方程式について考えよう。1つは混合解析に際して現われるもので、もう1つは、非線形トランジスタ・ダイオードを含む回路において現われるものである。

[例1] 直流方程式: $A f(A^r x + v) + B g(B^r x + w) + S x = u$

一般的な非線形抵抗回路: 電圧制御形非線形抵抗、電流制御形非線形抵抗、非線形結合抵抗、線形抵抗、および直流電圧源、電流源からなる電気回路を考える。電圧制御形抵抗と電流制御形抵抗の両方を含んでいいるから

ここでは、混合解析を用いる。混合解析においては、与えられた回路を2つの部分回路に分割し、一方に対しては、カットセット解析を適用し、他方に対しては、ループ解析を適用する。さて、与えられた回路およびそのグラフをN、カットセット解析を適用する方の部分回路およびそのグラフをNa、ループ解析を適用する方の部分回路およびそのグラフをNbで示すことにする。又、枝電圧ViをNaに属する枝の電圧VaとNbに属する枝の電圧Vbに分割する。同様に枝電流iをiaとibに分割する。さらに、Na、Nbに属する抵抗に関しては、その電圧(電流)をVa(ia)、Vb(ib)で示すことになり、その枝特性は、

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_a \\ \hat{v}_b \end{bmatrix} = f(\hat{v}_a, \hat{i}_b), f: \mathbb{R}^{\hat{d}} \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{d}}, f \in C \quad (3.40)$$

で与えられるものとする。上式は次のようなことを意味している。

- i) 電圧制御形抵抗は全て N_a に属す；
- ii) 電流制御形抵抗は全て N_b に属す；
- iii) 結合抵抗は、その特性および回路トポロジー (3.40) のような表現が可能なものに限られる。

次に N_a, N_b をそれぞれの木枝とリンク枝に分割する。この際木枝の優先順序は、電圧源、電圧制御形抵抗、(結合抵抗、線形非結合抵抗)、電流制御形抵抗、電流源の順にとり、電圧源は全て木枝に、電流源は全てリンク枝に含まれるものとする。 N, N_a, N_b および N の木枝、リンク枝の集合を表 3-2 のように定める。このとき、 N_b は N から N_b に属する枝を開放除去して得られ、 N_b は N から N_b に属する枝を既絶除去して得られることに注意すると、

$$T = T_a \cup T_b$$

$$Z = Z_a \cup Z_b$$

であり、さらに、 Z_a に属すリンク枝は、 N にありて T_a に属す木枝とのみ基本ループを成すことがわかる。

このことと木枝の優先順序から基本ループ行列は、次のような特殊な形であらわされる。

$$B_f = [I \ F] \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & F_{aa'} & F_{aa} & 0 \\ 0 & I & F_{a'a} & F_{a'a} & 0 \\ 0 & 0 & I & F_{ba'} & F_{ba} & F_{bb'} & F_{bb} \\ 0 & 0 & 0 & I & F_{b'a'} & F_{b'a} & F_{b'b'} & F_{b'b} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$F_{aa} \triangleq \begin{bmatrix} A_{vv} & 0 \\ A_{av} & A_{aa} \end{bmatrix}, F_{bb} \triangleq \begin{bmatrix} B_{bb} & 0 \\ B_{cb} & B_{cc} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

但し、Fに対する添字は表3・3のように定め、A、Bに対する添字は表3・4のように定めよう。

表3・3 Fに対する添字

	1(2)番目の添字
a	$L_a(T_a)$ に属する抵抗
a'	$L_a(T_a)$ に属する電流(圧)源
b	$L_b(T_b)$ に属する抵抗
b'	$L_b(T_b)$ に属する電流(圧)源

表3・4 A、Bに対する添字

	1(2)番目の添字
v	$L_a(T_a)$ に属する電圧制御形抵抗
a	$L_a(T_a)$ に属するその他の抵抗
c	$L_b(T_b)$ に属する電流制御形抵抗
b	$L_b(T_b)$ に属するその他の抵抗

電圧vおよび電流iを次のように分割する。

$$v \triangleq \begin{bmatrix} V_{aa} \\ V_{ae} \\ V_{oe} \\ V_{ee} \\ V_{at} \\ V_{bt} \end{bmatrix}, \quad i \triangleq \begin{bmatrix} i_{ae} \\ i_{oe} \\ i_{ee} \\ i_{et} \\ i_{at} \\ i_{bt} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

このとき、KVL: $Bv = 0$, KCL: $[-\mathbf{F}^{\text{tr}} \mathbf{I}]i = 0$ の一部D'は

$$\begin{cases} V_{ae} + F_{aa} V_{at} = -F_{aa'} V_{et} \\ V_{oe} + F_{ba} V_{at} = -F_{ba'} V_{et} - F_{bb'} V_{bt} \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} -F_{aa} i_{ae} - F_{ba} i_{oe} + i_{at} = F_{aa'} i_{ae'} + F_{ba'} i_{oe'} \\ -F_{bb} i_{oe} + i_{bt} = F_{bb'} i_{oe'} \end{cases} \quad (3.45)$$

を得る。さて今、

$$\hat{i}_a \triangleq \begin{bmatrix} i_{ae} \\ i_{at} \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_a \triangleq \begin{bmatrix} V_{ae} \\ V_{at} \end{bmatrix}, \quad \hat{i}_b \triangleq \begin{bmatrix} i_{oe} \\ i_{bt} \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_b \triangleq \begin{bmatrix} V_{oe} \\ V_{bt} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

となることに注意する。そこで、

$$F_{ba} \triangleq \begin{bmatrix} S_{bv} & S_{ba} \\ S_{cv} & S_{ca} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$V_{ae} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{ve} \\ \eta_{ae} \end{bmatrix}, V_{at} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{vt} \\ \eta_{at} \end{bmatrix}, i_{be} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{be} \\ \hat{\xi}_{ce} \end{bmatrix}, i_{bt} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{bt} \\ \hat{\xi}_{ct} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$i_{ae} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\xi}_{ve} \\ \hat{\eta}_{ae} \end{bmatrix}, i_{at} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\xi}_{vt} \\ \hat{\eta}_{at} \end{bmatrix}, V_{be} \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{be} \\ \xi_{ce} \end{bmatrix}, V_{bt} \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{bt} \\ \xi_{ct} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$-F_{aa'}V_{a't} \triangleq \begin{bmatrix} e_v \\ e_a \end{bmatrix}, -F_{ba'}V_{a't} - F_{bb'}V_{b't} \triangleq \begin{bmatrix} e_b \\ e_c \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$F_{aa'}^{\text{tr}} i_{a'1} + F_{ba'}^{\text{tr}} i_{b'1} \triangleq \begin{bmatrix} j_v \\ j_a \end{bmatrix}, F_{bb'}^{\text{tr}} i_{b'1} \triangleq \begin{bmatrix} j_b \\ j_c \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{11} \triangleq \begin{bmatrix} B_{bb} & \emptyset \\ \emptyset & -A_{aa}^{\text{tr}} \end{bmatrix}, C_{21} \triangleq \begin{bmatrix} \emptyset & -A_{av}^{\text{tr}} \\ B_{cb} & \emptyset \end{bmatrix} \\ C_{22} \triangleq \begin{bmatrix} -A_{vv}^{\text{tr}} & \emptyset \\ \emptyset & B_{cc} \end{bmatrix}, \\ C \triangleq \begin{bmatrix} I & C_{11} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & C_{21} & C_{22} & I \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (3.52)$$

$$S \triangleq \begin{bmatrix} \emptyset & S_{ba} & S_{bv} & \emptyset \\ -S_{bu}^{\text{tr}} & \emptyset & \emptyset & -S_{ca}^{\text{tr}} \\ -S_{bv}^{\text{tr}} & \emptyset & \emptyset & -S_{cv}^{\text{tr}} \\ \emptyset & S_{ca} & S_{cv} & \emptyset \end{bmatrix} = -S^{\text{tr}} \quad (3.53)$$

$$\eta \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{be} \\ \hat{\eta}_{at} \\ \eta_{bt} \\ \hat{\eta}_{ae} \end{bmatrix}, \xi \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{ve} \\ \xi_{ct} \\ \xi_{vt} \\ \xi_{ce} \end{bmatrix}, \chi \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{be} \\ \eta_{at} \\ \xi_{vt} \\ \hat{\xi}_{ce} \end{bmatrix}, u \triangleq \begin{bmatrix} e_b \\ j_a \\ j_v \\ e_c \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

由上式，(3.44), (3.45), (3.47) ~ (3.54) 的

$$C \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} + S \chi = u \quad (3.55)$$

故得

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} \triangleq C^{\text{tr}} x + y \quad (3.56)$$

を得る。但し、

$$\hat{\eta} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{be} \\ \hat{\eta}_{at} \\ \hat{\eta}_{ct} \\ \hat{\eta}_{al} \end{bmatrix}, \quad \hat{\zeta} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_{ve} \\ \hat{\zeta}_{ct} \\ \hat{\zeta}_{ut} \\ \hat{\zeta}_{ce} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$y \triangleq [0^{\text{tr}}, \theta^{\text{tr}}, j_b^{\text{tr}}, e_a^{\text{tr}}, e_v^{\text{tr}}, j_c^{\text{tr}}, \theta^{\text{tr}}, \theta^{\text{tr}}]^{\text{tr}}$$

∴ 2'. (3.40), (3.46), (3.48), (3.49), (3.52), (3.54), (3.56) および (3.57) を参照して、

$$\eta \triangleq f(\hat{\eta}) = f\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ C_{11}^{\text{tr}} & C_{21}^{\text{tr}} \end{bmatrix} x + y_\eta\right), \quad f \in C \quad (3.58)$$

$$\zeta \triangleq g(\hat{\zeta}) = g\left(\begin{bmatrix} 0 & C_{22}^{\text{tr}} \\ 0 & I \end{bmatrix} x + y_\zeta\right), \quad g \in C \quad (3.59)$$

を得る。但し、

$$y \triangleq \begin{bmatrix} y_\eta \\ y_\zeta \end{bmatrix}, \quad y_\eta \triangleq [\theta^{\text{tr}}, \theta^{\text{tr}}, j_b^{\text{tr}}, e_a^{\text{tr}}]^{\text{tr}}, \quad y_\zeta \triangleq [e_v^{\text{tr}}, j_c^{\text{tr}}, \theta^{\text{tr}}, \theta^{\text{tr}}]^{\text{tr}} \quad (3.60)$$

∴ 2'. (3.52), (3.55), (3.58)~(3.60) と 2'

$$\begin{bmatrix} I & C_{11} \\ 0 & C_{21} \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} I & C_{11} \\ 0 & C_{21} \end{bmatrix}^{\text{tr}} x + y_\eta\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{22} & I \end{bmatrix} g\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{22} & I \end{bmatrix}^{\text{tr}} x + y_\zeta\right) + Sx = u \quad (3.61)$$

を得る。

方程式 (3.61) に関しては、次の結果が成り立つ。

[系. 3.6] 方程式 (3.61) において, C_{11}, C_{21} は正則とする。次の条件:

$$\exists m > 0, \quad \pi_2(f; \tilde{z}, \tilde{s}) \geq m > 0, \quad \forall \tilde{z}, \tilde{s} \in \mathbb{R}^{d_1}, \tilde{z} \neq \tilde{s};$$

$$\exists R \in \mathbb{R}, \quad \pi_2(g; \tilde{z}, \tilde{s}) \leq R, \quad \forall \tilde{z}, \tilde{s} \in \mathbb{R}^{d_2}, \tilde{z} \neq \tilde{s};$$

$$m \left\{ -\mu_2 \left(-\begin{bmatrix} I & C_{11} \\ 0 & C_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C_{11} \\ 0 & C_{21} \end{bmatrix}^{\text{tr}} \right) - |R| \cdot \|I + C_{22} C_{22}^{\text{tr}}\|_2 \right\} > 0$$

が成り立てば、方程式 (3.61) は任意の $(U, y_r, y_s) \in \mathbb{R}^{d_3} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_1}$ に
対して唯一解 $x^*(U, y_r, y_s) \in \mathbb{R}^{d_3}$ を有する。さらに、 $(U, y_r, y_s) \mapsto x^*$
は連続である。

(証明) $A \triangleq \begin{bmatrix} I & C_{11} \\ 0 & C_{21} \end{bmatrix}, B \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{22} & I \end{bmatrix}$

とする。 $S = -S^{\text{tr}}$ に注意すると補題 2・11 と仮定から

$$\begin{aligned} & \mu_2(Af(A^{\text{tr}} \cdot + y_r) + Bg(B^{\text{tr}} \cdot + y_s) + S; x, \tilde{x}) \\ &= \frac{\langle f(A^{\text{tr}}x + y_r) - f(A^{\text{tr}}\tilde{x} + y_r), A^{\text{tr}}x - y_r - [A^{\text{tr}}\tilde{x} - y_r] \rangle}{\langle x - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle} \\ &+ \frac{\langle g(B^{\text{tr}}x + y_s) - g(B^{\text{tr}}\tilde{x} + y_s), B^{\text{tr}}x - y_s - [B^{\text{tr}}\tilde{x} - y_s] \rangle}{\langle x - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle} \\ &\geq m \frac{\langle x - \tilde{x}, AA^{\text{tr}}(x - \tilde{x}) \rangle}{\langle x - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle} - k \frac{\langle x - \tilde{x}, BB^{\text{tr}}(x - \tilde{x}) \rangle}{\langle x - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle} \\ &\geq m \{-\mu_2(-AA^{\text{tr}})\} - |k| \cdot \|BB^{\text{tr}}\|_2 \\ &= m \{-\mu_2(-AA^{\text{tr}})\} - |k| \cdot \|I + C_{22}C_{22}^{\text{tr}}\|_2 \\ &\stackrel{m > 0, k \neq 0}{=} 0, \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^{d_3}, x \neq \tilde{x} \end{aligned}$$

を得る。従って、定理 3・5 から結論を得る。

(証明終)

ここで次に、対象する回路が、単調非減少性特性を有する 2 端子抵抗と電源からなる場合を考えよう。この場合は、(3.61) の導出と同様にして

$$Q_a \triangleq [-F_{aa}^{\text{tr}} \quad I], \quad B_b \triangleq [I \quad F_{bb}]$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} Q_a & 0 \\ 0 & B_b \end{bmatrix} \quad \left. \right\} (3.62)$$

$$S \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -F_{ab}^{\text{tr}} \\ F_{ab} & 0 \end{bmatrix} = -S^{\text{tr}} \quad (3.63)$$

$$y \triangleq \begin{bmatrix} -F_{aa} V_{a\ddagger} \\ \theta \\ \theta \\ F_{bb}^{\text{tr}} i_{b\ddagger} \end{bmatrix}, \quad U \triangleq \begin{bmatrix} F_{ba}^{\text{tr}} i_{b\ddagger} \\ -F_{ba} V_{a\ddagger} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

とすると、

$$Ch(C^{\text{tr}}x + y) + Sx = u \quad (3.65)$$

なる直流方程式を得る。

[系 3・7] 直流方程式 (3.65) に於いて、 $f: \mathbb{R}^{\hat{d}} \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{d}}$ は連續とする。もし、次の条件：

$\exists m \in M_0^*, \alpha_2(Ch(\tilde{x}), \tilde{z}) \geq m(1/\|z - \tilde{z}\|_2)$, $\forall \tilde{x}, \tilde{z} \in \mathbb{R}^{\hat{d}}, z \neq \tilde{z}$ が成り立つならば、任意の $(u, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{\hat{d}}$ に対して、方程式 (3.65) は唯一解 $x^*(u, y)$ を有する。さらに $(u, y) \mapsto x^*$ は連続である。

(証明) 系 3・6 の証明、又は (3.34) と同様にして

$$\begin{aligned} \alpha_2(Ch(C^{\text{tr}}x + y); \tilde{x}, \tilde{z}) &\geq m(\sqrt{1+k} \cdot \|x - \tilde{x}\|_2), \\ k &\triangleq \max\{\mu_2(F_{aa}F_{aa}^{\text{tr}}), \mu_2(F_{bb}F_{bb}^{\text{tr}})\}, \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d, x \neq \tilde{x} \end{aligned} \quad (3.66)$$

を得るから、定理 3・5 によって結論を得る。 (証明終)

さらに抵抗の特性に結合がない場合には。

$$Ch[C^{\text{tr}}x + y] \triangleq \begin{bmatrix} h_1(-F_{aa}\tilde{x} + e_a) \\ h_2(\tilde{x}) \\ h_3(\tilde{x}) \\ h_4(F_{bb}^{\text{tr}}\tilde{x} + j_b) \end{bmatrix}, \quad x \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

$$e_a \triangleq -F_{aa}V_a x, \quad j_b \triangleq F_{bb}^{\text{tr}}i_b$$

とかけろ。従って、

$$Ch[e^{\text{tr}}x + y] = \begin{bmatrix} h_2(\tilde{x}) \\ h_3(\tilde{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{aa}^{\text{tr}} & 0 \\ 0 & F_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(-F_{aa}\tilde{x} + e_a) \\ h_4(F_{bb}^{\text{tr}}\tilde{x} + j_b) \end{bmatrix}$$

となるから、

$$f(x) \triangleq \begin{bmatrix} h_2(\tilde{x}) \\ h_3(\tilde{x}) \end{bmatrix}, \quad g(z) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(z_1) \\ h_4(z_2) \end{bmatrix}, \quad z \triangleq \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} -F_{aa}^{\text{tr}} & 0 \\ 0 & F_{bb} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} \triangleq \begin{bmatrix} e_a \\ j_b \end{bmatrix}$$

とすと、

$$f(x) + Ag[A^T x + \hat{g}] + Sx = u \quad (3.65)$$

なら直流方程式を得る。

[系3・8] 方程式(3.65)において、写像 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^{\tilde{d}} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ は連続とする。もし、次の条件:

$\exists m > 0$, $\pi_2(f + Ag[A^T \cdot + \hat{g}]; x, \hat{x}) \geq m$, $\forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^d$, $\forall y \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ が成り立てば、方程式(3.65)は任意の $(u, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ に対し唯一解 $x^*(u, y)$ を有する。さらに、 $(u, y) \mapsto x^*$ は連続である。

(証明) 定理3・5から明らか。

(証明終)

[例2] 直流方程式: $Af(x) + Bx = u$.

P 個の非線形トランジスタ, q 個の非線形ダイオード, 線形時間不变抵抗、および独立電圧源、電流源からなる電気回路を考える。今、ノートンの定理によって、図3-1に示す等価回路が得られたとする。そこで、トランジスタ・ダイオードのモデルは図3-2に示される。

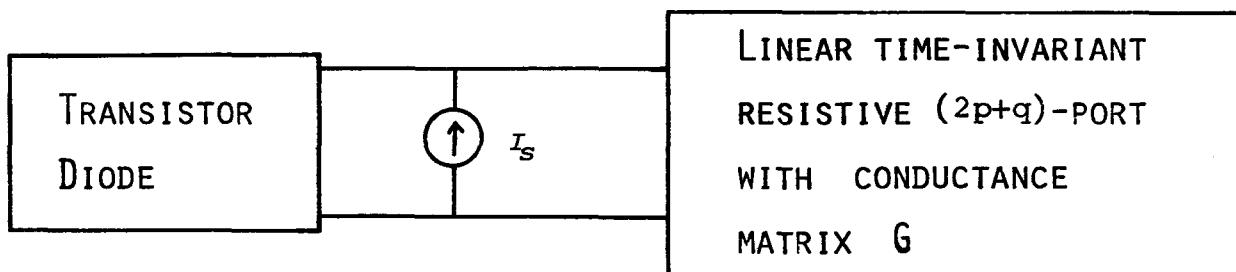
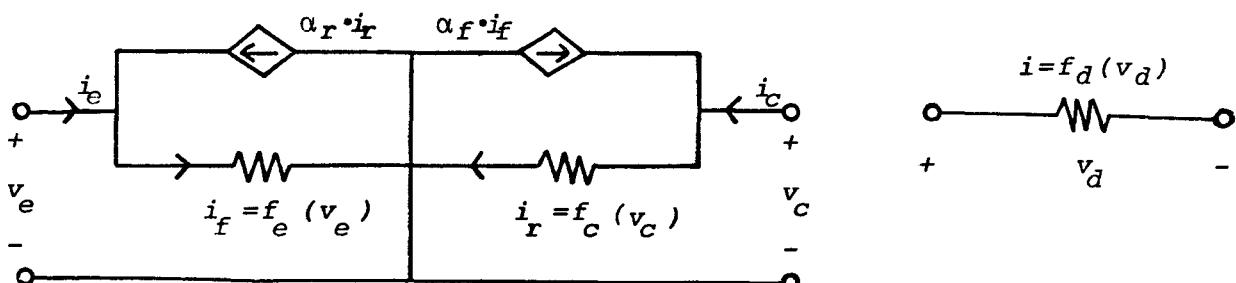


図3-1 等価回路



(a) ハーモニクスモデル

(b) ダイオードモデル

図3-2 トランジスタ、ダイオードモデル

今.

$$x \triangleq [v_{e1}, v_{c1}, \dots, v_{ep}, v_{cp}, v_{di}, \dots, v_{dg}]^{\text{tr}} \in \mathbb{R}^{2p+8}$$

$$y \triangleq [i_{e1}, i_{c1}, \dots, i_{ep}, i_{cp}, i_{di}, \dots, i_{dg}]^{\text{tr}} \in \mathbb{R}^{2p+8}$$

とすると図3-1のよう

$$y = -Bx + u$$

(3.66)

を得る。一方、図3-2のよう

$$\begin{bmatrix} i_{ek} \\ i_{ck} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -dr^{(k)} \\ -df^{(k)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ek}(v_{ek}) \\ f_{ck}(v_{ck}) \end{bmatrix}, \quad k \in \bar{P}$$

となるから。

$$T_k \triangleq \begin{bmatrix} 1 & -dr^{(k)} \\ -df^{(k)} & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \bar{P}$$

$$A \triangleq \text{diag}(T_1, \dots, T_p, I_g) \in \mathbb{R}^{(2p+8) \times (2p+8)}$$

$$f(x) \triangleq [f_{e1}(v_{e1}), \dots, f_{cp}(v_{cp}), f_{di}(v_{di}), \dots, f_{dg}(v_{dg})]^{\text{tr}}$$

とすると

$$y = Af(x)$$

が成り立つ。上式を (3.66) から、

$$Af(x) + Bx = u$$

なら直流方程式が得られる。(3.67) に対しては次の結果が成り立つ。

[系3.9] 方程式 (3.67) において、 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は連続とする。もし次の条件のうち、いずれか一方が成り立てば、(3.67) は唯一解 $x^*(u)$ を有する。さらに、 $u \mapsto x^*$ は連続である。

i) $\exists m > 0$,

$$\alpha(f_{ek}; \alpha, \beta) \geq m, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta, \quad k \in \bar{P};$$

$$\alpha(f_{ck}; \alpha, \beta) \geq m, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta, \quad k \in \bar{P};$$

$$\alpha(f_{dk}; \alpha, \beta) \geq m, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta, \quad k \in \bar{g};$$

$$\exists D \in \mathcal{D}_+, \quad DA \in S \subset SD, \quad DB \in W \subset D;$$

ii) $\alpha(f_{ek}; \alpha, \beta) \geq 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta, \quad k \in \bar{P};$

$$\alpha(f_{ck}; \alpha, \beta) \geq 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta, \quad k \in \bar{P};$$

$\alpha(f_{\alpha\beta}; \alpha, \beta) \geq 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in \bar{\mathcal{S}}$;
 $\exists D \in \mathcal{D}_+$, $DA \in WCSD$, $DB \in SCSD$.

(証明) まず i) が成り立つ場合を考える。

$$|x|_D \triangleq |Dx|_1, x \in \mathbb{R}^d$$

とすると、定理 2・2, (i), (f), (c), よび補題 2・6 から、

$$\rho_D(Af + B; x, y) \geq \varepsilon m > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y$$

を得る。但し、 $\varepsilon \triangleq -\mu, (-DAD^{-1}) > 0$ 。

従って、定理 3・3 から結論を得る。ii) が成り立つ場合にも同様にして示されると、(証明終)

(注 3・6) $\exists D \in \mathcal{D}_+$, $DA \in SCSD$, $DB \in WCSD$ ($DA \in WCSD$, $DB \in SCSD$) なる条件が満足されるためには、 $(A, B) \in \mathcal{D}$ であれば十分であり、そのための必要十分条件は、Mitra と So⁽⁶⁰⁾ によって示されている。

(注 3・7) この例 2 は、Willson, Jr.⁽³⁰⁾ によって与えられた。

3・5 結 言

この章では、平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について考察し、従来知られている結果を、二、三の例外を除いて、全て含むようなシャープな結果を得た。又、3・4においてその応用例を示したが、以下の第 5 章、第 6 章、第 7 章においても応用される。

第4章 非線形常微分方程式の可解性および安定性 (63), (82), (83)

4・1 緒 言

この章では、非線形常微分方程式の可解性および安定性について考察する。まず4・2では、大域的な条件の下に、i)初期値問題、ii)初期状態、入力およびパラメータに関する連続性について考察する。得られた結果はよく知られた岡村の結果^{(37), (38)}の実用的な十分条件となっている。

次に4・3では、まず4・3-1において、安定性について整理し、次に4・3-2では、安定性を考慮することによって、局所的な条件の下に、非線形常微分方程式の可解性について考察する。

最後に4・4では、上で得られた結果を周期系に対して応用する。ここでは、まず最初に一般的な形で周期系における周期解の存在およびその安定性について論じ、さらにそこで得られた結果を、非線形RLMC回路、非線形トランジスタ・ダイオードを含む電気回路、および鉄共振などにおいて現われるDuffing方程式に対して応用する。

4・2 非線形常微分方程式の可解性

4・2・1 解の存在と一意性

対象とする非線形常微分方程式系のうち最も一般的なものは、次式で与えられる。

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, v, t, p) + u \quad (4.1)$$

但し、 $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times J \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, $J \subset \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^P$, $f \in C$; $u: J \rightarrow \mathbb{R}^d$, $v: J \rightarrow \mathbb{R}^r$, $u, v \in P_C$.

さてここで J 、パラメータ $p^0 \in \Delta$ を任意に固定し、次の微分方程式系、

$$\dot{x} = f(x, v, t) + u \quad (4.2)$$

を考える。但し、 $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times J \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f \in C$ は、

$$f(x, v, t) \equiv \tilde{f}(x, v, t, p^0) \quad (4.3)$$

で与えられる。

まず最初に、 $u, v \in CCP_C$ の場合について考える。この場合 (4.2) の解は次のように定められる。

[定義 4.1] 任意に $u, v \in C$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$ を与える。

$x(\cdot) = x(\cdot; x^0, t_0, u_{[t_0, T]}, v_{[t_0, T]}) \in C^d[t_0, T]^*$ は、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.2) の解である。

$\Leftrightarrow x \in C^d[t_0, T]$ が次の 3 条件を満足する。

$$i) \quad x(t_0) = x^0;$$

$$ii) \quad \forall t \in (t_0, T), \dot{x}(t) = f[x(t), v(t), t] + u(t);$$

$$iii) \quad \dot{x}_+(t_0) = f[x^0, v(t_0), t_0] + u(t_0),$$

$$\dot{x}_-(T) = f[x(T), v(T), T] + u(T).$$

ところで、 u, v は時間関数だから、一度 u, v を与えると、 $\hat{f}: \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\hat{f} \in C$ を、

$$\hat{f}(x, t) \triangleq f[x, v(t), t] + u \tag{4.4}$$

で定め、(4.2) のやり方に、

$$\dot{x} = \hat{f}(x, t) \tag{4.5}$$

について考へても同じであることに注意しよう。

微分方程式系 (4.5) の局所的な解の存在については、次の結果が知られている。

[補題 4.1] (Peano の定理^{(37), (38), (46), (81)})

$D_0 \triangleq \{(x, t) \in \bar{B}[x^0, b] \times [t_0, T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}, b > 0, t_0 < T\}$ とする。

$$M_0 \triangleq \max \{ |\hat{f}(x, t)|, (x, t) \in D_0 \}.$$

$$a_0 \triangleq \min \{ T - t_0, b/M_0 \}$$

とすると、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.5) の解 $x(\cdot) = x(\cdot; x^0, t_0)$ が少なくとも 1 つ区間 $[t_0, t_0 + a]$ で存在して D 内にある。

* $C^d[t_0, T] \triangleq \{ x: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty = \sup_t |x(t)| < \infty \}.$

(注4・1) この補題から次のことがわかる。任意に $x^* \in \mathbb{R}^d$, $t_0 < T$ を与えると、点 (x^*, t_0) から右に出る (4.5) の解 $x(\cdot)$ が少なくとも 1 つ区間 $[t_0, t_1]$, $t_1 \equiv t_0 + a_0$ において存在する。次に、 $x^* = x^*(t_1)$ として、 M_1, a_1 を M_0, a_0 と同様に定めると、点 (x^*, t_1) から右に出る (4.5) の解 $x^*(\cdot)$ が少なくとも 1 つ区間 $[t_1, t_2]$, $t_2 \equiv t_1 + a_1$ において存在する。この操作をくり返して行うと、点 (x^*, t_i) , $i \in \mathbb{Z}_+$ から右に出る (4.5) の解 $x^*(\cdot)$ が少なくとも 1 つ区間 $[t_i, t_{i+1}]$, $t_{i+1} = t_i + a_i$ において存在することがわかる。そして、

$$x(t) = x^*(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \in \mathbb{Z}_+$$

とすると、 $x(\cdot)$ は、点 (x^*, t_0) から右に出る (4.5) の 1 つの解となることがわかる。ところで、 $t_\infty \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} t_i$ は、 $t_\infty < T$ となるかむしれ $\neq T^*$ 。そしてこのとき、上に定めた $x(\cdot)$ は、区間 $[t_0, t_\infty]$ で 1 つ定義されない。なぜなら、もし $x(\cdot)$ が $[t_0, t_\infty]$ で存在するとすると、補題 4・1 からある $\hat{a} > 0$ が存在して、点 $(x(t_\infty), t_\infty)$ から右に出る (4.5) の解 $x^*(\cdot)$ が区間 $[t_\infty, t_\infty + \hat{a}]$ で存在することになり、これは t_∞ の定義に矛盾するからである。

さて、我々が得た結果は、大域的な解の存在、すなはち、任意に $x^* \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathbb{T}$, $t_0 < T$ を与えたとき、点 (x^*, t_0) から右に出る (4.5) の解 $x(\cdot)$ が少なくとも 1 つ区間 $[t_0, T]$ において存在することであるから補題 4・1 だけでは十分である。

[定義 4・2] 点 (x^*, t_0) から右に出る (4.5) の解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, a]$ で存在するとする。もし、点 (x^*, t_0) から右に出る (4.5) の解 $x^*(\cdot)$ が区間 $[t_0, a]$ で存在して、 $x(t) = x^*(t)$, $t \in [t_0, a]$ となるならば解 $x(\cdot)$ は $t = a$ で接続可能 (continuous) であるといふ**。

* 例えば、 $\hat{f}(x) = x^2$, $x^* = 1$, $t_0 = 0$, $T = 2$ とすると $t_0 = 1$ である。

** この定義は、文献 (38) の定義と若干異っているが、この方がやり易いのでこういう定義にする。

[補助定理4・1] 任意に $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$ を与える。任意の $a \in (t_0, T)$ に対して、点 (x^0, t_0) から右に出る(4.5)の解が、 $t = a$ で接続可能ならば、点 (x^0, t_0) から右に出る(4.5)の解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ において存在する。

(証明) 注4・1 から明らか。

(証明終)

[補題4・2]⁽³⁸⁾ 微分方程式系(4.5)において、リアブリフ関数 $V: D \rightarrow \mathbb{R}_+$, $D \stackrel{\Delta}{=} \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}, |x| \geq L > 0\}$ が存在して、

- i) $\forall t \in \mathcal{T}, V(\cdot, t) \in \mathcal{F}_{\text{SL}}$;
- ii) $\exists m > 0, m|x| \leq V(x, t), \forall (x, t) \in D$;
- iii) $V'_{(4.5)}(x, t) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{V(x + \alpha \hat{f}(x, t), t + \alpha) - V(x, t)}{\alpha}$
 $\leq 0, \forall (x, t) \in \text{Int}(D)$

を満足するならば、任意に $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$ を与え下とき、点 (x^0, t_0) から右に出る(4.5)の解 $x(\cdot)$ は、任意の $a \in (t_0, T)$ で接続可能である。従って、点 (x^0, t_0) から右に出る(4.5)の解 $x(\cdot)$ が少なくとも \mapsto 区間 $[t_0, T]$ において存在する*。

次に、解の唯一性について次の結果が知られている。

[補題4・3]⁽³⁸⁾ 微分方程式系(4.5)において、リアブリフ関数

$\tilde{V}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ が存在して、

- iv) $\forall t \in \mathcal{T}, \tilde{V}(\cdot, \cdot, t) \in \mathcal{F}_{\text{SL}}$;
- v) $x = y \Rightarrow \tilde{V}(x, y, t) = 0, \forall t \in \mathcal{T}$;
- vi) $x \neq y \Rightarrow \tilde{V}(x, y, t) > 0, \forall t \in \mathcal{T}$;
- vii) $\tilde{V}'_{(4.5)}(x, y, t) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\tilde{V}(x + \alpha \hat{f}(x, t), y + \alpha \hat{f}(y, t), t + \alpha) - \tilde{V}(x, y, t)}{\alpha}$
 $\leq 0, \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}$

を満足すれば、任意に $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$ を与え下とき、点 (x^0, t_0)

* 補助定理4・1 参照。

から右に出る (4.5) の解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ で存在すれば一意である。

上に示した補題 4・2, 4・3 から次の結果を得る。

[定理 4・1] 微分方程式系 (4.2) において次の条件:

$$\exists k: \mathbb{R}_+ \times J \rightarrow \mathbb{R}, k \in P_C, \forall t \in J, \forall z \in \mathbb{R}^r,$$

$$R(f(\cdot, z, t); x, y) \leq k(|z|, t), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \quad (4.6)$$

が成り立つとする。このとき、任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in J$, $t_0 < T$, $u, v \in C$ に対して、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.2) の一意解 $x(\cdot; x^0, t_0, u_{[t_0, T]}, v_{[t_0, T]})$ が区間 $[t_0, T]$ において存在する。

(証明) 任意に $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in J$, $t_0 < T$, $u, v \in C$ を与え。 $\hat{f} \in C$ を (4.4) で定める。そして、任意に $L > 0$ を与え。 $D \triangleq \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times J, |x| \geq L > 0\}$ とする。さらに $V: D \rightarrow \mathbb{R}_+$ を、

$$V(x, t) \triangleq \exp \left(- \int_{t_0}^t [|k| |v(\tau)| + |\hat{f}(0, \tau)| / L] d\tau \right) |x|$$

と定める。このとき、

$$\text{i)} \quad m \triangleq \exp \left(- \int_{t_0}^T [|k| |v(\tau)| + |\hat{f}(0, \tau)| / L] d\tau \right)$$

とすると、

$$m|x| \leq V(x), \quad \forall (x, t) \in D$$

が成り立つ；

$$\text{ii)} \quad V^{(4.5)}(x, t)$$

$$= \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \exp \left(- \int_{t_0}^{t+\alpha} [|k| |v(\tau)| + |\hat{f}(0, \tau)| / L] d\tau \right) |x + \alpha \hat{f}(x, t)| \right.$$

$$- \left. \exp \left(- \int_{t_0}^t [|k| |v(\tau)| + |\hat{f}(0, \tau)| / L] d\tau \right) |x| + \frac{1}{\alpha} \right\}$$

$$\leq [|\hat{f}(0, t)| / |x|] V(x, t)$$

$$+ \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|x + \alpha \hat{f}(x, t) - \alpha \hat{f}(0, t)| - |x|}{\alpha} V(x, t)$$

$$+ \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\exp \left(- \int_{t_0}^{t+\alpha} [|k| |v(\tau)| + |\hat{f}(0, \tau)| / L] d\tau \right)}{\alpha} |x|$$

$$= [|\hat{f}(0, t)| / |x| + \alpha (f(\cdot, v(t), t; x, 0))$$

$$- |\hat{f}(0, t)| / L - |k| |v(t)|, t)] V(x, t)$$

$$\leq 0, \quad \forall (x, t) \in \text{Int}(D)$$

が成り立つ。従って、補題4・2によつて、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.2) の解 $x(\cdot)$ が少なくとも $1 \rightarrow$ 区間 $[t_0, T]$ で存在する。

次に、一意性については、 $\tilde{V}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times J \rightarrow \mathbb{R}_+$ を、

$$\tilde{V}(x, y, t) \triangleq \exp\left(-\int_{t_0}^t |k|(|v(\tau)|, \tau)|d\tau|\right) |x - y|$$

で与えると、補題4・3の条件 iv) ~ vii) が成り立つことがわかる。従つて解 $x(\cdot)$ は一意である。
(証明終)

次に、 $u, v \in \mathcal{P}_c$ である場合について考える。この場合 (4.2) の解は次のように定められる。

[定義4・3] 任意に $u, v \in \mathcal{P}_c$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in J$, $t_0 < T$ を与えよ。

$x(\cdot) = x(\cdot; x^0, t_0, u_{[t_0, T]}, v_{[t_0, T]}) \in C^d[t_0, T]$ は、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.2) の解である。

$\Leftrightarrow D_T \triangleq \{t_i \in (t_0, T) \mid i \in \overline{m} \mid t_{i+1} > t_i, i \in \overline{m}\}$ を用いての不連続点とするととき、 $x(\cdot)$ が次の4条件を満足する。

i) $x(t_0) = x^0$;

ii) $\forall t \in (t_0, T) - D_T, \dot{x}(t) = f[x(t), v(t), t] + u(t);$

iii) $\forall t \in D_T, \dot{x}_+(t) = f[x(t), v(t+0), t] + u(t+0),$
 $\dot{x}_-(t) = f[x(t), v(t-0), t] + u(t-0);$

iv) $\dot{x}_+(t_0) = f[x^0, v(t_0+0), t_0] + u(t_0+0),$

$$\dot{x}_-(T) = f[x(T), v(T-0), T] + u(T-0),$$

さて、このように解を定義すると、定理4・1から直ちに次の結果を得る。

[定理4・2] 微分方程式系 (4.2) において、条件 (4.6) が満足されるとす。とこのとき、任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in J$, $t_0 < T$, $u, v \in \mathcal{P}_c$ に対して、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.2) の一意解 $x(\cdot; x^0, t_0, u_{[t_0, T]}, v_{[t_0, T]})$ が区間 $[t_0, T]$ において存在する。

(証明) $\hat{f}^k: \mathbb{R}^d \times [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 0, 1, \dots, m$; $t_{m+1} = T$ を、

$$f^k(x, t) \triangleq \begin{cases} f[x, v(t_k+0), t_k] + u(t_k+0), & t = t_k \\ f[x, v(t), t] + u(t), & t \in (t_k, t_{k+1}) \\ f[x, v(t_{k+1}-0), t_{k+1}] + u(t_{k+1}-0), & t = t_{k+1} \end{cases}, x \in \mathbb{R}^d$$

で定めろ。このとき, $f \in C$, $u, v \in P_C$ だから, $\hat{f}^k: \mathbb{R}^d \times [t_k, t_{k+1}]$ に
おいて連続となる。従って、各 $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対し、微分方程式系：

$$\dot{x} = \hat{f}^k(x, t)$$

(定義 4・1 の意味で、任意の $x^k \in \mathbb{R}^d$ に対し、点 (x^k, t_k) から右に出る一
意解 $x^k(\cdot)$ を区間 $[t_k, t_{k+1}]$ で持つ。今、

$$x^k = x^{k-1}(t_k), k \in \overline{m}; \quad x^0: \text{既知}$$

とすると、 $x: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ で、

$$x(t) = x^k(t), t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \{0, 1, \dots, m\}$$

とすると、 $x(\cdot)$ は定義 4・3 の意味で、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.
2) の一意解で、区間 $[t_0, T]$ で定義されることがわかる。(証明終)

4・2・2 初期状態、入力、パラメータに関する連続性。

前節で丁寧に非線形常微分方程式の初期値問題について考え、一意解が存
在するための条件を明らかにした。この節では、その条件の下に、解が
初期状態、入力、およびパラメータに関して連続となることを示す。

まず連続性を定義しよう。

[定義 4・4] 微分方程式系 (4.1) を考える。任意に $x^0, \tilde{x}^0 \in \mathbb{R}^d$, t_0, T
 $\in J$, $t_0 < T$, $u, \tilde{u}, v, \tilde{v} \in P_C$, $p, \tilde{p} \in \mathcal{B}$ を与えろ。今、点 (x^0, t_0) およ
び (\tilde{x}^0, t_0) から右に出る (4.1) の一意解 $x(\cdot) \triangleq x(\cdot; x^0, t_0, u_{[t_0, T]},$
 $v_{[t_0, T]})$ および $\tilde{x}(\cdot) \triangleq x(\cdot; \tilde{x}^0, t_0, \tilde{u}_{[t_0, T]}, \tilde{v}_{[t_0, T]})$ が区間 $[t_0, T]$
において存在するととする。もし、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \max\{|x^0 - \tilde{x}^0|, \|u - \tilde{u}\|_\infty, \|v - \tilde{v}\|_\infty, |p - \tilde{p}|^p\} < \delta,$$

$$|x - \tilde{x}|_\infty < \epsilon$$

が成り立つならば、系 (4.1) の解は、初期状態、入力、およびパラメ
ータに関して連続であるという。但し、 $| \cdot |_\infty$ は、

$|U|_\infty \triangleq \sup \{ |U(t)| \mid t \in [t_0, T] \}$

で与えられる。

[補題4・4] (比較定理⁽³⁸⁾) 次の微分方程式

$$\dot{\psi} = g(\psi, t), \quad \psi(t_0) = \psi^0 \quad (4.7)$$

但し, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \triangleq B[0, A] \times [t_0, T] \subset \mathbb{R}^2$, $A > 0$, $t_0 < T$; $g \in C$.

(4.7) の最大解 $\psi_M(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ において, D 内に留まるとする。もし、連続関数 $\psi(\cdot)$, $\psi(t_0) = \psi^0$ が,

$$\dot{\psi}_+(t) \leq g(\psi(t), t), \quad \psi(t) \in D$$

を満足するならば,

$$\psi(t) \leq \psi_M(t), \quad \forall t \in [t_0, T]$$

となる。

補題4・4. 定理4・2を用いて次の結果を得る。

[定理4・3] 微分方程式系(4.1)を考える。もし、次の条件:

$$\exists R: \mathbb{R}^d \times J \rightarrow \mathbb{R}, R \in P_C, \quad \forall t \in J, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad \forall p \in \Delta,$$

$$R(\tilde{f}(\cdot, z, t, p); x, y) \leq R(z, t), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad x \neq y \quad (4.8)$$

が満足されるならば、任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in J$, $t_0 < T$, $u, v \in P_C$, $p \in \Delta$ に対し、点 (x^0, t_0) から右に出る(4.1)の一意解 $x(\cdot)$ が存在し、初期状態: x^0 , 入力: u, v およびパラメータ: p に関する連続である。

(証明) 一意解が存在することは定理4・2から明らか。従って連続性のみ示す。任意に $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in J$, $t_0 < T$, $u, v \in P_C$, $p \in \Delta$ を与え。

$$x(t) \triangleq x(t; x^0, t_0, u_{[t_0, T]}, v_{[t_0, T]}), \quad t \in [t_0, T]$$

$$\psi(t) \triangleq |x(t)|, \quad t \in [t_0, T]$$

とすると、(4.8) カら定理4・1の証明を同様にして

$$\psi(t_0) = |x^0|$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_+(t) &\leq R(|\psi(t)|, t) \psi(t) + |\tilde{f}(0, v(t), t, p) + u(t)| \\ &\leq \beta \psi(t) + \gamma \end{aligned}$$

を得る。但し、 $\beta \triangleq |R(|v(\cdot)|, \cdot)|_\infty$, $\gamma \triangleq |\tilde{f}(0, v(\cdot), \cdot, p) + u(\cdot)|_\infty$ 。

従って、比較定理(補題4・4)から、

$$\begin{aligned}\Psi(t) &\leq \exp[\beta(t-t_0)]|x^0| + \{\exp[\beta(t-t_0)] - 1\} \gamma / \beta \\ &\leq B \triangleq \exp[\beta(T-t_0)] \cdot (|x^0| + \gamma / \beta) - \gamma / \beta, \quad \forall t \in [t_0, T]\end{aligned}\quad (4.9)$$

を得る。一方、ルムの等価性から、

$$\exists C > 0, \quad |(r, \xi, t, p)| \leq C \max\{|r|, |\xi|, |t|, |p|\}, \quad \forall (r, \xi, t, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$$

が成り立つ。従って、(4.9) りより $|x(t)|_\infty \leq B$ となることに注意すると、 $f \in C$ であるから、

$$\begin{aligned}\forall \hat{\delta} > 0, \quad \exists \delta'_1(\hat{\delta}) > 0, \quad \max\{|u - \tilde{u}|_\infty, |p - \tilde{p}|_1\} < \delta'_1, \\ |f[x(t), u(t), t, p] - \tilde{f}[x(t), \tilde{u}(t), t, \tilde{p}]| < \hat{\delta}, \\ \forall t \in [t_0, T].\end{aligned}\quad (4.10)$$

を得る。一方、ある $\delta_1'' > 0$ に対して、

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &\triangleq \max\{|r(\xi, t)|, \xi \in \bar{B}[\theta; 1/\alpha + \delta_1'']\}, \quad t \in [t_0, T] \text{ かつ} \\ |x - \tilde{x}^0| < \delta_0 &\triangleq \exp[-\tilde{\beta}(T-t_0)] \cdot \epsilon / 3\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$|u - \tilde{u}|_\infty < \delta_2 \triangleq \exp[-\tilde{\beta}(T-t_0)] \cdot \beta \cdot \epsilon / 3 \quad (4.12)$$

とし、(4.10) の $\hat{\delta}$ は $\hat{\delta} = \delta_2$ に対して成り立つうえに $\delta'_1(\delta_2)$ を定める。

$$|u - \tilde{u}|_\infty < \delta_1, \quad \delta_1 \triangleq \min\{\delta'_1(\delta_2), \delta_1''\} \quad (4.13)$$

$$|p - \tilde{p}|_1 < \delta_1 \quad (4.14)$$

とする。このとき、

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t; \tilde{x}^0, t_0, \tilde{u}_{[t_0, T]}, \tilde{v}_{[t_0, T]}, \tilde{p}), \quad t \in [t_0, T]$$

$$\zeta(t) \triangleq |x(t) - \tilde{x}(t)|, \quad t \in [t_0, T]$$

とすると、(4.8) のう。

$$\zeta(t_0) = |x^0 - \tilde{x}^0|$$

$$\dot{\zeta}_+(t) \leq \lambda(f(\cdot; \tilde{u}(t), t, \tilde{p}; x(t), \tilde{x}(t)) / |x(t) - \tilde{x}(t)|$$

$$+ |\tilde{f}(x(t), u(t), t, p) - \tilde{f}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t, \tilde{p})|)$$

$$\leq \tilde{\beta} \zeta(t) + \delta_2, \quad \forall t \in [t_0, T]$$

を得る。従って、比較定理から、

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (4.15)$$

を得る。 (4.11) ~ (4.15) カテ。

$$\delta \equiv \min \{ \delta_0, \delta_1, \delta_2 \}$$

とすると、

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \max \{ |x^0 - \tilde{x}^0|, \|U - \tilde{U}\|_\infty, \|V - \tilde{V}\|_\infty, |p - \tilde{p}| \} < \delta, \\ & \|x - \tilde{x}\|_\infty < \varepsilon \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

この定理から直ちに次の系を得る。

[系 4.1] 微分方程式系 (4.1) において次の条件：

$$\begin{aligned} & \exists k: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+, k \in P_C, \forall t \in \mathcal{T}, \forall z \in \mathbb{R}^r, \forall p \in S, \\ & |\tilde{f}(x; z, t, p) - \tilde{f}(y; z, t, p)| \leq k(|z|, t) |x - y|, \\ & \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \quad (4.16) \end{aligned}$$

が成り立てば、任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$, $U, V \in P_C$, $p \in S$ に対し、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.1) の一意解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ において存在し、初期状態、入力、およびパラメータに開く連続である。

(証明) 定理 2.2, (b) カテ、(4.16) が満足されるとき、(4.8) が満足されることがわかる。従って、定理 4.3 によって結論を得る。

(証明終)

[系 4.2] 次の微分方程式系：

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, v, p) + u \quad (4.17)$$

を考える。但し、 $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times S \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S \subset \mathbb{R}^r$, $\tilde{f} \in C$; $v: \mathcal{T} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$, $u: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $U, V \in P_C$ 。

もし、次の条件のうちいずれか一方が成立すれば、任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$, $U, V \in P_C$, $p \in S$ に対し、点 (x^0, t_0) から右に出る (4.17) の一意解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ において存在し、初期状態、入力、およびパラメータに開く連続である。

- i) $\exists k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $k \in P_C$, $\forall z \in \mathbb{R}^r$, $\forall p \in S$,
- $|\tilde{f}(x, z, p) - \tilde{f}(y, z, p)| \leq k(|z|) |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^d$;
- ii) $\exists k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in P_C$, $\forall z \in \mathbb{R}^r$, $\forall p \in S$,

$$x(\tilde{f}(\cdot, \cdot, p); x, y) \leq k(t), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y.$$

(証明)

(省略)

[定理 4.3] 次の微分方程式系:

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, t, p) + u \quad (4.18)$$

を考える。但し, $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times J \times S \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S \subset \mathbb{R}^P$, $J \subset \mathbb{R}$, $\tilde{f} \in C$; $u: J \rightarrow \mathbb{R}^d$, $u \in P_C$.

もし, 次の条件のうちいずれか一方が成り立てば, 任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $t_0 < T$, $u \in P_C$, $p \in S$ に対して, 点 (x^0, t_0) から右に出る (4.18) の一意解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ において存在し, 初期状態, 入力, およびパラメータに連続である。

i) $\exists k: J \rightarrow \mathbb{R}_+$, $k \in P_C$, $\forall t \in J$, $\forall p \in S$,

$$|\tilde{f}(x, t, p) - \tilde{f}(y, t, p)| \leq k(t) |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d;$$

ii) $\exists k: J \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in P_C$, $\forall t \in J$, $\forall p \in S$,

$$x(\tilde{f}(\cdot, t, p); x, y) \leq k(t), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y.$$

(証明)

(省略)

4.3 安定性と可解性

4.3.1 安定性

安定性には, 大別してリアプロンの意味の安定性と入出力安定性の2つがある。そしてリアプロンの安定性は, 大ざっぱにいえば, 安定, 減衰安定, 指数安定の3つの概念に分けられる。漸近安定性に関しては第7章で詳しく検討するので, この節では主に安定と指数安定について考えよう。又入出力安定性については, 第6章で詳しく検討するのでこの節ではあまりこれず, その特殊な場合に含まれる有界入力有界状態安定(以下BIBS安定と略す)についてのみ考えよう。

まずリアプロンの安定性についてその定義を示そう。

[定義 4.5] 微分方程式系 (4.2) において,

$$\exists x^* \in \mathbb{R}^d, \exists \xi^* \in \mathbb{R}^r, f(x^*, \xi^*, t) = 0, \quad \forall t \in J \quad (4.19)$$

が成り立つとする。このとき、 $U(\cdot) \equiv 0$, $V(\cdot) \equiv x^*$ とすると、 $x^*(t) = x^*$, $t \in \mathcal{T}$ は (4.2) の 1 つの解である。

1) 平衡点 x^* は安定である。

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in \mathcal{T}, \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \forall x^0 \in B[x^*, \delta], |x(t) - x^*| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

但し、 $x(\cdot) \equiv x(\cdot; x^0, t_0, \theta, \dot{x}^*)$ 。

2) x^* は一様安定である。

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall t_0 \in \mathcal{T}, \forall x^0 \in B[x^*, \delta], |x(t) - x^*| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

3) x^* は漸近安定である。

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \text{i)} \quad &x^* \text{ は安定;} \\ \text{ii)} \quad &\forall t_0 \in \mathcal{T}, \exists \delta(t_0) > 0, \forall x^0 \in B[x^*; \delta], \forall \varepsilon > 0, \\ &\exists T(t_0, x^0, \varepsilon) > 0, |x(t) - x^*| < \varepsilon, \forall t \geq T + t_0. \end{aligned}$$

4) x^* は一様漸近安定である。

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \text{i)} \quad &x^* \text{ は一様安定;} \\ \text{ii)} \quad &\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) > 0, \forall x^0 \in B[x^*; \delta], \\ &\forall t_0 \in \mathcal{T}, |x(t) - x^*| < \varepsilon, \forall t \geq T + t_0. \end{aligned}$$

5) x^* は指數安定である。

$$\Leftrightarrow \exists m > 0, \exists \delta > 0, \forall t_0 \in \mathcal{T}, \exists K(t_0) > 0, \forall x^0 \in B[x^*, \delta], |x(t) - x^*| \leq K(t_0) \exp[-m(t - t_0)] \cdot |x^0 - x^*|, \forall t \geq t_0.$$

6) x^* は大域漸近安定である。

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \text{i)} \quad &x^* \text{ は安定;} \\ \text{ii)} \quad &\forall t_0 \in \mathcal{T}, \forall x^0 \in \mathbb{R}^d, \forall \varepsilon > 0, \exists T(t_0, x^0, \varepsilon) > 0, \\ &|x(t) - x^*| < \varepsilon, \forall t \geq T + t_0. \end{aligned}$$

7) x^* は一様大域漸近安定である。

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \text{i)} \quad &x^* \text{ は一様安定;} \\ \text{ii)} \quad &\forall r > 0, \exists \beta(r) > 0, \forall t_0 \in \mathcal{T}, \forall x^0 \in B[x^*; r], \\ &|x(t) - x^*| < \beta, \forall t \geq t_0; \end{aligned}$$

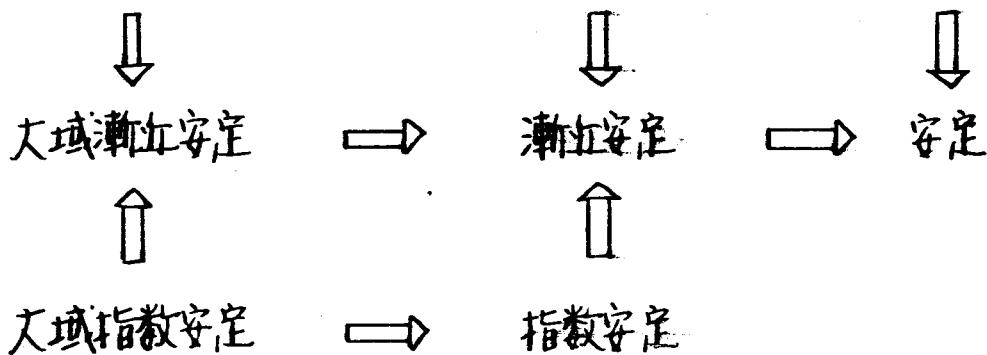
iii) $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon > 0, \exists T(r, \varepsilon) > 0, \forall x^0 \in B[x^*; r],$
 $\forall t_0 \in T, |x(t) - x^*| < \varepsilon, \forall t \geq T + t_0.$

8) x^* は大域指数安定である。

$\Leftrightarrow \exists m > 0, \forall t_0 \in T, \exists K(t_0) > 0, \forall x^0 \in \mathbb{R}^d,$
 $|x(t) - x^*| \leq K(t_0) \exp[-m(t-t_0)] |x^0 - x^*|, \forall t \geq t_0.$

(注4・2) 上の諸定義の間に次の関係が成り立つ。

一様大域漸近安定 \Rightarrow 一様漸近安定 \Rightarrow 一様安定



[定義4・6] 微分方程式系(4.2)はIBS安定である。

$\Leftrightarrow \forall t_0 \in T, \exists K(t_0) > 0, \exists r > 0, \exists B(t_0, r) > 0, \forall x^0 \in B[\theta; r],$
 $\forall u, v \in P_c, |x(t; x^0, t_0, u, v)|$
 $\leq K(t_0) |x^0| + B(t_0, r) \int_{t_0}^t \|u(s)\|_1 + \|f(s, v(\cdot))\|_\infty ds, \forall t \geq t_0.$

[定理4・4] 微分方程式系(4.2)において、(4.19)が満足されるとする。 $u(\cdot) \equiv \theta, v(\cdot) \equiv \dot{x}^*$ とする。

(a) $\exists r^* > 0, \forall t \in T,$

$\pi(f(\cdot, \dot{x}^*, t); x, x^*) \leq 0, \forall x \in B^* \triangleq B[x^*; r^*], x \neq x^*$ が成り立つならば、

$\forall t_0 \in T, \forall x^0 \in B^*, |x(t) - x^*| \leq |x^0 - x^*|, \forall t \geq t_0$ となる。従って、 x^* は安定である。但し、 $x(\cdot) \equiv x(\cdot; x^0, t_0, \theta, \dot{x}^*)$ ；

(b) $\exists r^* > 0, \exists m > 0, \forall t \in T,$

$\pi(f(\cdot, \dot{x}^*, t); x, x^*) \leq -m, \forall x \in B^*, x \neq x^*$ (4.20)
 が成り立つならば、

$$\forall t_0 \in J, \forall x^0 \in B^*$$

$$|x(t) - x^*| \leq \exp[-m(t-t_0)] |x^0 - x^*|, \quad \forall t \geq t_0.$$

が成り立つ。従って、 x^* は指數安定かつ一様漸近安定である；

(C) 条件 (4.20) が成り立つならば、

$$\forall t_0 \in J, \forall x^0 \in B^*, \forall \delta \in (0, r^*), \forall u \in P_C, \|u\|_\infty \leq M(r^* - \delta)$$

$$|x(t; x^0, t_0, u, \xi^*) - x^*| \leq \hat{r} \triangleq r^* - \delta, \quad \forall t \geq t_0.$$

が成り立つ。

(証明) まず (a) から示す。任意に $t_0 \in J, x^0 \in B^*$ を与えろ。

$$\psi(t) \triangleq |x(t) - x^*|, \quad t \geq t_0$$

とすると、定理 4.1 の証明と同様にして、

$$\psi(t_0) = |x^0 - x^*| < r^*$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \lambda(f(\cdot, \xi^*, t); x, x^*) |x - x^*| \\ &\leq 0, \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

を得る。従って、比較定理(補題 4.4) から (a) を得る。

(b). (a) と同様にして示せり。

(C). 任意に $t_0 \in J, x^0 \in B^*, \delta \in (0, r^*), u \in P_C, \|u\|_\infty \leq m\hat{r}, \hat{r} \triangleq r^* - \delta$ を与えろ。

$$\psi(t) \triangleq |x(t; x^0, t_0, u, \xi^*) - x^*|, \quad t \geq t_0$$

とすると、定理 4.1 の証明と同様にして、

$$\psi(t_0) = |x^0 - x^*| < \hat{r}$$

$$\dot{\psi}(t) \leq -m\psi(t) + \|u(t)\|$$

$$\leq -m\psi(t) + m\hat{r}, \quad \forall t \geq t_0$$

を得る。従って、比較定理から、

$$\begin{aligned} \psi(t) &\leq \exp[-m(t-t_0)] \psi(t_0) + [-m(t-t_0)] \hat{r} \\ &\leq \hat{r}, \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

[定理 4.5] 微分方程式系 (4.2) において、(4.19) が満足されるとする。 $u(\cdot) \equiv 0, v(\cdot) \equiv \xi^*$ とする。

(a) $\exists k: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathcal{P}_c : \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t k(\tau) d\tau = \infty, \forall t \in \mathbb{J}$,
 $\varrho(f(\cdot, \xi^*, t); x, x^*) \leq -k(t), \forall x \in \mathbb{R}^d, x \neq x^*$

が成り立つならば、 x^* は大域漸近安定である；

(b) $\exists k: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathcal{P}_c : \exists m > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \int_{t_0}^t k(\tau) d\tau \geq mt - a$,
 $\forall t \geq 0, \varrho(f(\cdot, \xi^*, t); x, x^*) \leq -k(t), \forall x \in \mathbb{R}^d, x \neq x^*$

が成り立つならば、 x^* は大域指數安定である。

(証明) まず (a) のを示す。任意の $t_0 \in \mathbb{J}, x^0 \in \mathbb{R}^d$ を与える。仮定から定理 4・4 の証明と同様にして

$$\begin{aligned} & |x(t; x^0, t_0, \varepsilon, \xi^*) - x^*| \\ & \leq \exp \left[- \int_{t_0}^t k(\tau) d\tau \right] |x^0 - x^*| \\ & \leq \exp \left[\int_{t_0}^t k(\tau) d\tau \right] \cdot \exp \left[- \int_{t_0}^t k(\tau) d\tau \right] \cdot |x^0 - x^*|, \\ & \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

を得る。従って、 x^* は大域指數安定となる。

(b). (a) と同様にして示される。

(証明終)

[定理 4・6] 微分方程式系 (4.2) における次の条件：

$\exists k: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathcal{P}_c : \exists m > 0, \int_{t_0}^t k(\tau) d\tau \geq mt, \forall t \geq 0$,
 $\forall \xi \in \mathbb{R}^r, \forall t \in \mathbb{J}$,

$$\varrho(f(\cdot, \xi, t); x, \theta) \leq -k(t), \forall x \in \mathbb{R}^d, x \neq \theta$$

が成り立つならば、(4.2) は BIBS 安定である。

(証明) 任意に $t_0 \in \mathbb{J}, x^0 \in \mathbb{R}^d, u, v \in \mathcal{P}_c$ を与える。

$$\Psi(t) \equiv |x(t; x^0, t_0, u, v)|, t \geq t_0$$

とすると、定理 4・1 の証明と同様にして、

$$\Psi(t_0) = |x^0|,$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t) & \leq \varrho(f(\cdot, u(t), t); x(t), \theta) \Psi(t) + \|f(\theta, v(t), t) + u(t)\| \\ & \leq -k(t) \Psi(t) + A \end{aligned} \tag{4.21}$$

を得る。但し、 $A \equiv \|f(\theta, v(\cdot), \cdot) + u(\cdot)\|_\infty$ 。

比較定理 (補題 4・4) と (4.21) のより、

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &\leq \exp\left[-\int_{t_0}^t R(\tau)d\tau\right]\Psi(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\left[-\int_\tau^t R(s)ds\right]A ds \\
&\leq \exp[-mt] \exp\left[\int_{t_0}^{t_0} R(\tau)d\tau\right]\Psi(t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^t \exp\left[\int_{t_0}^{t_0} R(\tau)d\tau - \int_s^t R(\tau)d\tau\right]A ds \\
&\leq \exp\left[\int_{t_0}^{t_0} R(\tau)d\tau\right]\Psi(t_0) \\
&\quad + \exp\left[\int_{t_0}^{t_0} R(\tau)d\tau\right]A \cdot \int_{t_0}^t \exp(-ms) ds \\
&\leq K(t_0)|x^0| + B(t_0)[|f(\theta, u(\cdot), \cdot)|_\infty + |u|_\infty], \quad t \geq t_0
\end{aligned}$$

を得る。但し、

$$K(t_0) \triangleq \exp\left[\int_{t_0}^{t_0} R(\tau)d\tau\right], \quad B(t_0) = K(t_0) \cdot \exp(-mt_0)/m.$$

(証明終)

4・3・2 安定性と可解性

前節4・2においては、大域的な条件の下に非線形常微分方程式の可解性について考えたが、ここでは安定性を考慮することによって、局所的な条件の下に可解性について考えよう。

[定理4・7] 微分方程式系(4.1)における次の3条件：

- i) $\exists x^* \in \mathbb{R}^d, \exists y^* \in \mathbb{R}^r, \hat{f}(x^*, y^*, t, p) = 0, \forall t \in \mathcal{T}, \forall p \in \mathcal{S}_p;$
- ii) $\exists r^* > 0, \exists R: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}, \forall t \in \mathcal{T}, \forall p \in \mathcal{S}_p,$
 $\alpha(\hat{f}(\cdot, y^*, t, p); x, y) \leq R(t), \forall x, y \in \bar{\mathcal{B}}^* \triangleq \bar{\mathcal{B}}[x^*; r^*], x \neq y;$
- iii) $\exists m > 0, \forall t \in \mathcal{T}, \forall p \in \mathcal{S}_p,$
 $\alpha(\hat{f}(\cdot, y^*, t, p); x, x^*) \leq -m, \forall x \in \bar{\mathcal{B}}^*, x \neq x^*$

が満足されるとする。この時、任意に $\delta \in (0, r^*)$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$, $x^* \in \mathcal{B} \triangleq \bar{\mathcal{B}}[y^*; \delta]$, $\hat{y} \triangleq y^* - \delta$, $u \in \mathcal{P}_c$, $|u|_\infty < m\hat{y}$ を与え、 $u(\cdot) \equiv y^*$ とすると、点 (x^*, t_0) から右に出る(4.1)の一意解 $x(\cdot) \triangleq x(\cdot; x^*, t_0, u_{[t_0, T]}, y^*, p)$ が区間 $[t_0, T]$ において存在する。さらに、 $x(\cdot)$ は、 x^*, u, p に関して連続である。

(証明) まず $u \in C$ の場合について考える。

$$M^* \triangleq \max \{ |\hat{f}(x, \bar{s}^*, t, p)| + \|u\|_\infty, x \in \bar{B}^*, t \in I \triangleq [t_0, T] \},$$

$$\alpha^* \triangleq \min \{ T - t_0, \delta / M^* \}$$

とするとこのとき、

$$\bar{B}[x; \delta] \subset \bar{B}^*, \quad \forall x \in \hat{B}$$

であるから、

$$M(x, s) \triangleq \max \{ |\hat{f}(y, \bar{s}^*, t, p)| + \|u\|_\infty, y \in \bar{B}[x; \delta], t \in [s, T] \},$$

$$\alpha(x, s) \triangleq \min \{ T - s, \delta / M(x, s) \}$$

とすると、

$$\alpha(x, s) \geq \alpha^*, \quad \forall x \in \hat{B}, \quad \forall s \in [t_0, T] \quad (4.22)$$

であることに注意する。

補題4.1と(4.22)から、任意に $x^k \in \hat{B}$, $t_k \in I$ を与えようと点 (x^k, t_k) から右に出る(4.1)の解 $x^k(\cdot)$ が区間 $[t_k, t_k + \alpha^*]$ において少々なくとも \rightarrow 存在し、 $\bar{B}[x^k; \delta] \subset \bar{B}^*$ にとどまることがわかる。

まず、この $x^k(\cdot)$ が一意であることを示す。2つの解 $x^k(\cdot)$, $y^k(\cdot)$ が存在し下とすると ($x^k(t_k) = y^k(t_k) = x^k$), $\Psi: [t_k, t_k + \alpha^*] \rightarrow \mathbb{R}$ を、

$\Psi(t) \triangleq \exp \left[- \int_{t_k}^t |k(\tau)| d\tau \right] |x^k(t) - y^k(t)|, \quad t \in [t_k, t_k + \alpha^*]$

とすると、条件 i), ii) から、定理4.1の証明と同様にして、

$$\Psi(t_k) = 0,$$

$$\dot{\Psi}(t) \leq [\lambda(\hat{f}(\cdot, \bar{s}^*, t, p); x^k(t), y^k(t)) - |k(t)|] \Psi(t)$$

$$\leq 0, \quad \forall t \in [t_k, t_k + \alpha^*]$$

が得られる。従って、比較定理によつて、

$$|x^k(t) - y^k(t)| \leq \exp \left[+ \int_{t_k}^{t_k + \alpha^*} |k(\tau)| d\tau \right] \Psi(t) = 0,$$

$$\quad \forall t \in [t_k, t_k + \alpha^*]$$

となり、 $x^k(\cdot)$ は一意であることがわかる。

一方、定理4.4, (c) から、

$$|x^k(t) - x^*| \leq \hat{r}, \quad \forall t \in [t_k, t_k + \alpha^*]$$

となるから、 $x^* \in \hat{B}$ に定めし、点 (x^*, t_0) から右に出る(4.1)の一意解 $x^*(\cdot)$ が区間 $[t_0, t_0 + \alpha^*]$ において存在し、 \hat{B} 内に留まることがわかる。

以下

$$x^k = x^{k-1}(t_k), t_k = t_0 + k \cdot a^*, k = 1, 2, \dots$$

とすると、点 (x^k, t_k) から右に出る (4.1) の一意解 $x^k(\cdot)$ が区間 $[t_k, t_{k+1}]$ において存在し、 \bar{B} 内に留まる。又、 $a^* > 0$ であるから、ある $K \in \mathbb{N}$ に対して、 $t_{K+1} \geq T$ となる。従って、

$x(t) \equiv x^k(t), t \in [t_k, t_{k+1}] \cap [t_0, T], k = 0, 1, \dots, K$ とすると、 $x(\cdot)$ は点 (x^0, t_0) から右に出る (4.1) の一意解で、区間 $[t_0, T]$ において \bar{B} 内に留まっている。

次に、 $u \in \mathcal{P}_c$ の場合は、上の結果を用いると定理 4.2 と同様にして証明できる。

又、 x^0, u, v に関する連続性は、定理 4.3 と同様にして証明できる
(証明終)

4.4 周期系への応用

4.4.1 周期解の存在と安定性

この節では、前節の結果を応用して周期系における周期解の存在とその安定性について考える。

対象する周期系は次式で与えられる。

$$\dot{x} = f(x, v, t) + u \quad (4.23)$$

但し、 $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f \in C$; $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$, $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $u, v \in \mathcal{P}_c$.

系 (4.23) において次の仮定 (A-1) が満足されるものとする。

$$A-1: \exists \omega > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^r,$$

$$f(x, \xi, t + \omega) = f(x, \xi, t), \quad v(t + \omega) = v(t),$$

$$u(t + \omega) = u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

まず次の補題を示す。この補題は、なれば自明のことであるが、非線形系においては線形系や準線形系の場合と異なり連続な周期関数からなるバ

ナッシュ空間を構成することができ困難であるため以下の議論において重要な役割を果していく。

[補題4・5] 假定(A-1)の下に系(4.23)を考える。系(4.23)の解の存在と一意性が保証されるならば、次の2条件は同値である。

- i) $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \exists x^* \in \mathbb{R}^d, x(t+\omega; x^*, t_0) = x(t; x^*, t_0), \forall t \geq t_0;$
- ii) $\exists x^* \in \mathbb{R}^d, x^* = x(\omega; x^*, 0).$

(証明) i) \Rightarrow ii). 明らか。

ii) \Rightarrow i), まず ii) $\Rightarrow x(t+\omega; x^*, 0) = x(t; x^*, 0), \forall t \geq 0$ を示す。

$$\phi(t) \triangleq x(t; x^*, 0), t \geq 0,$$

$$\psi(t) \triangleq x(t+\omega; x^*, 0), t \geq 0$$

とすると、假定(A-1)から、

$$\dot{\phi}(t) = f[\phi(t), v(t), t] + u(t), \phi(0) = x^*,$$

$$\dot{\psi}(t) = f[\psi(t), v(t+\omega), t+\omega] + u(t+\omega)$$

$$= f[\psi(t), v(t), t] + u(t), \psi(0) = x^*$$

假定から解の存在と一意性が保証されているから、

$$\phi(t) = \psi(t), \forall t \geq 0$$

$$\therefore x(t+\omega; x^*, 0) = x(t; x^*, 0), \forall t \geq 0$$

を得る。

一方、解の存在と一意性は区間 $[0, \infty)$ において保証されているから、任意の $t_0 \geq 0$ に対し、 $x^* \triangleq x(t_0; x^*, 0)$ とすれば i) が成り立つ。

(証明終)

[定理4・8] 假定(A-1)の下に系(4.23)を考える。系(4.23)において次の2条件のうちいずれか一方が満足されれば、系(4.23)は唯一の周期解を有し、それは大域指數安定である。

- i) $\exists m > 0, \exists \gamma \in \mathbb{R}^r, \forall t \in \mathbb{R}$

$$x(f(\cdot, \gamma, t); x, y) \leq -m, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y;$$
- ii) $\exists k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, k \in P_C: k(t+\omega) = k(t), \forall t \geq 0;$

$$\exists m > 0, \int_0^{\omega} k(\tau) d\tau \geq m\omega, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lambda(f(\cdot, z, t); x, y) \leq -k(t), \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y.$$

(証明) i) \Rightarrow ii) は明らかであるから、ii) が満足されるとする。このとき、定理4.3によつて、系(4.23)の解の存在と一意性、および、初期状態に関する連續性が保証される。従つて、写像 $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $T \in C$:

$$T(x^0) = x(\omega; x^0, 0) \quad (4.24)$$

が定義できる。今、 $x(\cdot) \equiv x(\cdot; x^0, 0)$, $y(\cdot) \equiv x(\cdot; y^0, 0)$ をそれぞれ点 $(x^0, 0)$, $(y^0, 0)$ から右に出る(4.23)の解とし、

$$z(t) \equiv x(t) - y(t), t \geq 0 \quad (4.25)$$

とすると、

$$\dot{z}(t) = f(y + z, v, t) - f(y, v, t) \quad (4.26)$$

となる。そして、 $y(\cdot), v(\cdot)$ は時間関数と考えていよいから、 $\hat{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\hat{f} \in C$ を、

$$\hat{f}(z, t) \equiv f[y(t) + z, v(t), t] - f[y(t), v(t), t], \quad (4.27)$$

で定めると、(4.26), (4.27) から、

$$\dot{z} = \hat{f}(z, t) \quad (4.28)$$

が成り立つ。一方、ii) と (4.27) やり

$$\lambda(\hat{f}(\cdot, t); x, y) \leq -k(t), \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \quad (4.29)$$

が成り立つ。すると、

$$\Psi(t) = |z(t)|, t \in [0, \omega]$$

とすると、(4.29) やり、

$$\Psi(0) = |x^0 - y^0|$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t) &= \lambda(\hat{f}(\cdot, v(t), t); y(t) + z(t), y(t)) \cdot \Psi(t) \\ &\leq -k(t) \Psi(t), \forall t \in [0, \omega] \end{aligned}$$

となり、比較定理と ii) によつて

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \exp[-\int_0^{\omega} k(\tau) d\tau] \Psi(0) \\ &\leq \exp(-m\omega) |x^0 - y^0| \end{aligned} \quad (4.30)$$

を得る。従つて、(4.24), (4.25), と (4.30) やり、

$$|T(x^0) - T(y^0)| \leq \gamma |x^0 - y^0|, \quad \forall x^0, y^0 \in \mathbb{R}^d,$$

$$\gamma \equiv \exp(-m\omega) < 1$$

を得る。上式と縮小写像原理(補題2・13)から、 T は唯一の不動点 x^* を有する。このとき、

$$\zeta^* = x(\omega; \zeta^*, 0)$$

であるから、補題4・5によつて、系(4.23)は唯一の周期解を有するこゝがわかつ。

一方、 $k(\cdot)$ が周期関数であることに注意すると、ii)から、

$$\int_0^t k(\tau) d\tau \geq mt - \int_0^\omega [m + |k(\tau)|] d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

が成り立つから、(4.28), (4.29)と定理4・5から、 $\beta(t) \equiv 0$ は大域指數安定となる。従つて、周期解は大域指數安定となる。(証明終)

[定理4・9] 假定(A-1)の下に系(4.23)を考える。系(4.23)において、次の2条件が満足されるとする。

i) $\exists x^* \in \mathbb{R}^d, \exists \zeta^* \in \mathbb{R}^r, f(x^*, \zeta^*, t) = \theta, \forall t \in \mathbb{R}_+$;

ii) $\exists r^* > 0, \exists m > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\alpha(f(\cdot, \zeta^*, t); x, y) \leq -m, \quad \forall x, y \in \bar{B}^* \triangleq \bar{\beta}[x^*; t^*], \quad x \neq y.$$

今、任意に $\delta \in (0, r^*)$ を与えて、 $\hat{r} \triangleq r^* - \delta$ とする。このとき、

$$v(t) = \zeta^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

$$|v(t)| < m\hat{r}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

ならば、系(4.23)は、 $V \triangleq \bar{\beta}[x^*; \hat{r}]$ 内に留まる唯一の周期解を有し、任意の $x^0 \in V$, $t_0 \geq 0$ に対し、点 (x^0, t_0) から而出る(4.23)の解 x^* は指數的に周期解軌道に近づく。

(証明) 定理4・7, 4・4, および縮小写像原理を用いると定理4・8の証明と同様にして証明できる。(証明終)

(注4・3) この定理4・8および4・9は、リアフノフ関数を用いて一般的な形で得られて、⁽³⁸⁾ その結果の実用的な十分条件となつてゐる。

4.4.2 応用例

ここでは、4.4.1で得られた結果に対し、3の応用例を示す。

[例1] 非線形RLMC回路

非線形時間不変結合抵抗、線形時間不変キャパシタ、線形時間不変結合インダクタ、および独立電圧源、電流源からなる電気回路網を考える。

与えられたRLMC回路において、次の仮定A～Cが満足されるものとする。

[仮定A] 適当なノード本数で次の(A'-1)～(A'-3)を満足するものが存在する。

(A'-1) :

$$\begin{bmatrix} V_R \\ i_R \end{bmatrix} = f(i_R, V_R), \quad f: \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_R}, \quad f \in \mathcal{F}_L;$$

$$\exists m > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_R}, x \neq y; \quad \exists M > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_R}, x \neq y; \quad \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

(A'-2) :

$$\begin{bmatrix} q_c \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_c V_c \\ C_s V_s \end{bmatrix}, \quad C_c = \text{diag}(c_{11}, \dots, c_{nn}), \quad c_{ii} > 0, \quad i \in \overline{n_c};$$

$$C_s = \text{diag}(s_{11}, \dots, s_{nn}), \quad s_{ii} > 0, \quad i \in \overline{n_s};$$

(A'-3) :

$$\begin{bmatrix} \Phi_L \\ \Phi_R \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} i_L \\ i_R \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_L+n_R) \times (n_L+n_R)}$$

$$-M_2(-L) > 0, \quad L = L^{\text{tr}}.$$

[仮定B] 基本ループ行列(3.18)から得られる。

$$\beta \triangleq \begin{bmatrix} -F_{RC} & \odot \\ \odot & F_{LG}^{\text{tr}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_R+n_S) \times (n_C+n_L)}$$

のランクは

$$\text{rank}(\beta) = n_L + n_C$$

である。

[仮定C] 入力 $V_R, i_T \in \mathcal{P}_C$ は、直流又は周期 ω の周期関数である。

仮定A～Cが満足されるとき、与えられたRLMC回路は、唯一の大域

指数安定な周期 w の周期解を有する。

このことを示そう。仮定Aが満足されるとき、3・4・1における条件 $(A-1) \sim (A-3)$ が満足されると、全く同様にして、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\begin{array}{c} C_C V_C - F_{SC}^{tr} C_S (-F_{SC} V_C - F_{SE} V_E) \\ [L_{LL} + F_{LP} L_{PL}, L_{LP} + F_{LP} L_{PP}] \begin{bmatrix} i_L \\ F_{LP}^{tr} i_L + F_{PP}^{tr} i_T \end{bmatrix} \end{array} \right) \\ &= -\beta^{tr} \left(f(\cdot) - \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -F_{RG} \\ F_{RG}^{tr} & \textcircled{1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\beta \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{RE} V_E \\ F_{RG}^{tr} i_T \end{bmatrix} \right) \\ &+ \begin{bmatrix} \textcircled{1} & F_{LC}^{tr} \\ -F_{LE} & \textcircled{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{SC}^{tr} i_T \\ -F_{LE} V_E \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

を得る。今、

$$\left. \begin{aligned} C &\triangleq [I \ F_{SC}^{tr}] \begin{bmatrix} C_C & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & C_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F_{SC} \end{bmatrix} \\ Z &\triangleq [I \ F_{LP}] \perp \begin{bmatrix} I \\ F_{LP}^{tr} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

$$A = \text{diag}[C, Z]$$

とすると、 $(A'-2), (A'-3)$ からAは対称かつ正定値行列となり⁽⁴⁾、
 $Q^T \cdot Q^{-1} = A$ なら対称かつ正定値行列Qが存在する。⁽⁵⁾従って、

$$x \triangleq \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$p \triangleq \begin{bmatrix} F_{SC}^{tr} C_S F_{SE} V_E \\ (L_{LP} + F_{LP} L_{PP}) F_{PP}^{tr} i_T \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\xi \triangleq Q^{-1} x + Q p \quad (4.35)$$

$$K \triangleq Q \beta^{tr}$$

$$v = -Q^2 p + \begin{bmatrix} -F_{RE} V_E \\ F_{RG}^{tr} i_T \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$S = Q \begin{bmatrix} \textcircled{1} & F_{LC}^{tr} \\ -F_{LC} & \textcircled{1} \end{bmatrix} Q = -S^{tr} \quad (4.37)$$

$$U \triangleq -Q \begin{bmatrix} \textcircled{1} & F_{LC}^{tr} \\ -F_{LC} & \textcircled{1} \end{bmatrix} Q^T P + \begin{bmatrix} F_{JC}^{tr} i_J \\ -F_{LE} U_E \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -F_{RG} \\ F_{RG}^{tr} & \textcircled{1} \end{bmatrix} = -\alpha^{tr} \quad (4.39)$$

とすると、(4.31)~(4.39) から。

$$Q^{-1} \dot{x} = -Q^{-1} K (f(\cdot) - \alpha)^{-1} (K^{tr} \dot{x} + U) + Q^{-1} S \dot{x} + Q^{-1} U$$

$$\therefore \dot{x} = -K (f(\cdot) - \alpha)^{-1} (K^{tr} \dot{x} + U) + S \dot{x} + U \quad (4.40)$$

を得る。ここで

$$f(x^i) - \alpha x^i = y^i, \quad i \in \mathbb{Z}$$

とすると、補題2・11 から、任意の $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_L}$, $y^1 \neq y^2$ に対して

$$\begin{aligned} R_2([f(\cdot) - \alpha]^{-1}; y^1, y^2) &= \frac{\langle x^1 - x^2, f(x^1) - \alpha x^1 - f(x^2) + \alpha x^2 \rangle}{\|f(x^1) - f(x^2) - \alpha(x^1 - x^2)\|_2^2} \\ &= \frac{\langle x^1 - x^2, f(x^1) - f(x^2) \rangle}{\|f(x^1) - f(x^2) - \alpha(x^1 - x^2)\|_2^2} * \\ &\geq \frac{m \|x^1 - x^2\|_2^2}{(\ell + \|\alpha\|_2)^2 \|x^1 - x^2\|_2^2} ** \\ &\geq m / (\ell + \|\alpha\|_2)^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

が成り立つ。一方、仮定B から。

$$\text{rank}(K) = \text{rank}(\beta) = n_c + n_L$$

となることに注意すると、(4.41) と補題2・11 から

$$\begin{aligned} &R_2(-K[f(\cdot) - \alpha]^{-1}(K^{tr} \cdot + U) + S; \dot{x}, \dot{x}) \\ &= R_2(-K[f(\cdot) - \alpha]^{-1}(K^{tr} \cdot + U); \dot{x}, \dot{x}) *** \\ &= -\frac{\langle [f(\cdot) - \alpha]^{-1}(K^{tr} \dot{x} + U) - [f(\cdot) - \alpha]^{-1}(K^{tr} \dot{x} + U), K^{tr}(\dot{x} - \dot{x}) \rangle}{\langle \dot{x} - \dot{x}, \dot{x} - \dot{x} \rangle} \end{aligned}$$

* (4.39) より $\alpha = -\alpha^{tr}$

** $f(\cdot)$ はリニアラジカル定数

*** (4.37) より $S = -S^{tr}$

$$\begin{aligned} &\leq -m \quad \left\langle \xi - \hat{\xi}, K K^T (\xi - \hat{\xi}) \right\rangle \\ &\quad (l + \|d\|_2)^2 \quad \left\langle \xi - \hat{\xi}, \xi - \hat{\xi} \right\rangle \\ &\leq -m \left\{ -\mu_2 (-K K^T) \right\}, \quad \forall \xi, \hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_c}, \xi \neq \hat{\xi} \quad (4.43) \end{aligned}$$

を得る。ここで、(4.42)から

$$-\mu_2 (-K K^T) > 0 \quad (4.44)$$

となることに注意する。

一方、(4.34), (4.36), (4.38)と仮定 C から、P.V.U(丁周期Wの周期関数)となる。

従って、(4.43), (4.44)と定理4.8から、系(4.40)は、大域指數安定な唯一の周期解を有することがわかる。よって、(4.35), (4.33)から、与えられたRLMC回路が大域指數安定な周期解を有することがわかる。

[例2] 非線形トランジスタ・ダイオードを含む電気回路網

p 個の非線形トランジスタ、 q 個の非線形ダイオード、 r 個の線形時間不变キャパシタ、 s 個の非線形時間不变インダクタ、線形時間不变抵抗および独立電圧源、電流源からなる電気回路を考える。今、テブナン・ノートンの定理によつて、図4-1に示す等価回路が得られるとする。

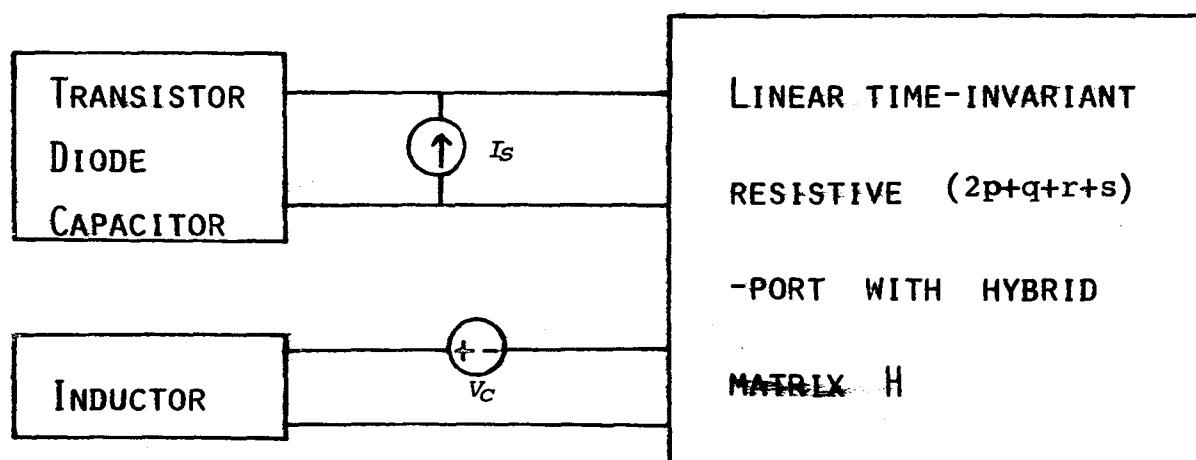


図4-1 半導体を含む一般的な電気回路

$$\xi \triangleq [v_{ti}^{tr}, \dots, v_{tp}^{tr}, v_{di}, \dots, v_{dq}, v_{ci}, \dots, v_{cr}, i_{li}, \dots, i_{ls}]^{tr} \in \mathbb{R}^{2p+2q+r+s}$$

$$\eta \triangleq [i_{ti}^{tr}, \dots, i_{tp}^{tr}, i_{di}, \dots, i_{dq}, i_{ci}, \dots, i_{cr}, i_{li}, \dots, i_{ls}]^{tr} \in \mathbb{R}^{-p+2q+r+s}$$

$$v_{tr_k} \triangleq \begin{bmatrix} v_{ter_k} \\ v_{rc_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, i_{tr_k} \triangleq \begin{bmatrix} i_{ter_k} \\ i_{rc_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, k \in \bar{P}$$

とすると、図4-1のとおり。

$$\eta = -H\xi + u, u \triangleq \begin{bmatrix} i_s \\ v_c \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

が得られる。又、図4-2にてGummel-Koehler型のモデルを用いると、

$$i_{tr_k} = T_k \begin{bmatrix} f_{ter_k}(v_{ter_k}) \\ f_{rc_k}(v_{rc_k}) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_{ter_k} v_{ter_k} + T_{ter_k} f_{ter_k}(v_{ter_k}) \\ C_{rc_k} v_{rc_k} + T_{rc_k} f_{rc_k}(v_{rc_k}) \end{bmatrix}, \quad k \in \bar{P} \quad (4.46)$$

おどり、

$$i_{dj} = f_{dj}(v_{dj}) + \frac{d}{dt} [C_{dj} v_{dj} + T_{dj} f_{dj}(v_{dj})], \quad j \in \bar{r} \quad (4.47)$$

を得る。但し、

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & -d_f^{(k)} \\ -d_f^{(k)} & 1 \end{bmatrix}, \quad d_f^{(k)}, d_f^{(k)} \in (0, 1), \quad k \in \bar{P} \quad (4.48)$$

そして線形コヒーレンスがあり線形化が可能となる。

$$f_j = f_{c_j}(v_{c_j}), \quad i_{cj} = \dot{f}_j, \quad j \in \bar{r} \quad (4.49)$$

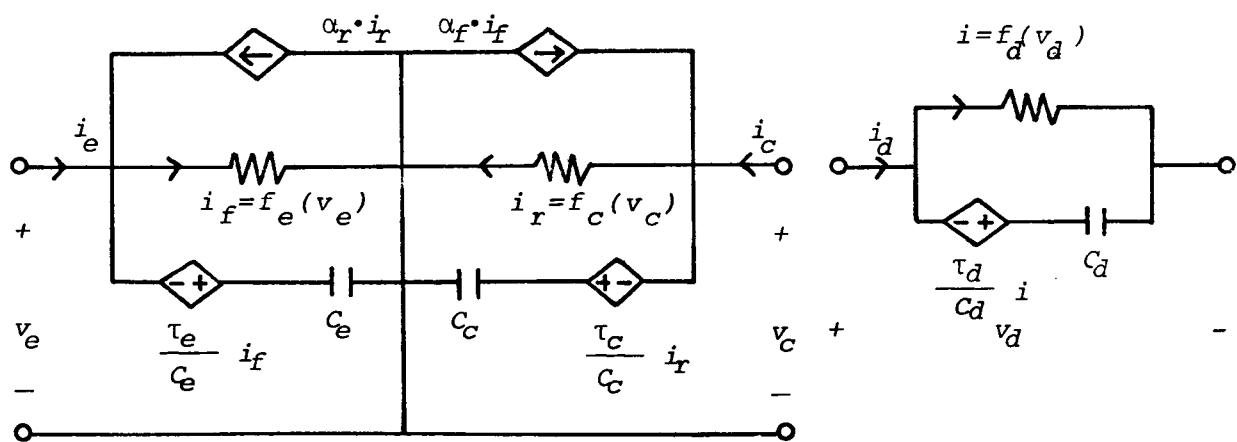


図4-2 Gummel-Koehler型トランジスタ・ダブルオードモデル

ある.

$$\phi_j = f_{Lj}(t_{Lj}), \quad v_{Lj} = \dot{\phi}_j, \quad j \in \overline{s} \quad (4.50)$$

で与えられるとする。また、

$$x_j \triangleq \begin{cases} C_{ter} V_{ter} + T_{ter} f_{ter}(V_{ter}), & j = 2k-1, k \in \bar{p} \\ C_{ter} V_{ter} + T_{ter} f_{ter}(V_{ter}), & j = 2k, k \in \bar{p} \\ C_{dk} V_{dk} + T_{dk} f_{dk}(V_{dk}), & j = 2p+k, k \in \bar{q} \\ f_{cr}(V_{cr}), & j = 2p+q+k, k \in \bar{r} \\ f_{Lk}(t_{Lk}), & j = 2p+q+r+k, k \in \bar{s} \end{cases} \quad (4.51)$$

とし、これが写像 $q: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = 2p+q+r+s$ で定められる。

$$x = q(\xi), \quad x_j = q_j(\xi_j), \quad j \in \bar{a} \quad (4.52)$$

で定めると、

$$T \triangleq \text{diag}(T_1, \dots, T_p, I_q, O_{r+s}) \quad (4.53)$$

I_q : $q \times q$ 単位行列, O_{r+s} : $(r+s) \times (r+s)$ 零行列

とし、写像 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を、

$$F = [f_1(\cdot), \dots, f_d(\cdot)]^{tr}$$

$$f_j(\xi) \triangleq \begin{cases} f_{ter}(V_{ter}), & j = 2k-1, k \in \bar{p} \\ f_{ter}(V_{ter}), & j = 2k, k \in \bar{p} \\ f_{dk}(V_{dk}), & j = 2p+k, k \in \bar{q} \\ 0, & j = 2p+q+k, k \in \bar{r+s} \end{cases} \quad (4.54)$$

で定めると、(4.46)~(4.54) 通り

$$\eta = TF(\xi) + \dot{x} \quad (4.55)$$

$$x = q(\xi)$$

を得る。さて今、次の条件 (D-1) ~ (D-4) が満足されるとする。

$$D-1: \quad C_{ter}, C_{ter}, T_{ter}, T_{ter} > 0, \quad \forall k \in \bar{p},$$

$$\lambda(f_{ter}; \alpha, \beta) > 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta, k \in \bar{p},$$

$$\lambda(f_{ter}; \alpha, \beta) > 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta, k \in \bar{p};$$

D-2: $c_{ij} > 0$, $j \in \bar{g}$,

$\lambda(f_{d_j}; d, \beta) > 0$, $\forall d, \beta \in \mathbb{R}$, $d \neq \beta$, $j \in \bar{g}$;

D-3: $\exists m_{c1}, m_{c2} > 0$, $\forall j \in \bar{r}$,

$0 < m_{c1} \leq \lambda(f_{c_j}; d, \beta) \leq m_{c2}$, $\forall d, \beta \in \mathbb{R}$, $d \neq \beta$;

D-4: $\exists m_{L1}, m_{L2} > 0$, $\forall j \in \bar{s}$

$0 < m_{L1} \leq \lambda(f_{Lj}; d, \beta) \leq m_{L2}$, $\forall d, \beta \in \mathbb{R}$, $d \neq \beta$.

このとき,

$$C_t \triangleq \min\{C_{t_{cp}}, C_{t_{dp}}, R \in \bar{p}\} > 0$$

$$C_d \triangleq \min\{C_{dj}, j \in \bar{g}\} > 0$$

$$m \triangleq \min\{C_t, C_d, m_{c1}, m_{L1}\} > 0$$

とすると,

$$\chi_i(q; \hat{x}, \hat{\dot{x}}) \geq m > 0, \quad \forall \hat{x}, \hat{\dot{x}} \in \mathbb{R}^d, \hat{x} \neq \hat{\dot{x}} \quad (4.56)$$

となり. 定理3・3から $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は同相写像となる. 今, $\hat{g} \triangleq g^{-1}$ とすると, (4.45), 及び (4.55) カテ

$$\dot{x} = -TF[\hat{g}(x)] - H\hat{g}(x) + u \quad (4.57)$$

が得られる.

系 (4.57) に対し次の結果が得られる.

条件 (D-1) ~ (D-4) に加えて, 次の条件 (D-5) が満足される.

D-5: $\exists D = \text{diag}(D_1, D_2) \in \mathcal{D}_+$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$,

$$n \triangleq 2p+q, \quad m \triangleq r+s,$$

$$\mu_1(-D, \tilde{T}) < 0$$

$$\mu_1(-DH) < 0$$

但し, $\tilde{T} \triangleq \text{diag}(T_1, \dots, T_p, I_q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

このとき, 入力 u が周期 w の周期関数ならば, 系 (4.57) は唯一の大域指數安定な周期 w の周期解を有する.

これを証明しよう。

$$\hat{T} = (\hat{T}_{ij}) \triangleq D, \tilde{T} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.58)$$

$$\hat{H} = (\hat{h}_{ij}) \triangleq DH \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (4.59)$$

とおく。このとき、条件 (D-5) が成り立つ。

$$\exists \delta_1 > 0, -\hat{t}_{ii} + \sum_{j \neq i} |\hat{t}_{ij}| \leq -\delta_1 < 0, \quad j \in \bar{n} \quad (4.60)$$

$$\exists \delta_2 > 0, -\hat{h}_{ii} + \sum_{j \neq i} |\hat{h}_{ij}| \leq -\delta_2 < 0, \quad j \in \bar{d} \quad (4.61)$$

が成り立つ。又、

$$(\hat{c}_j, \hat{\tau}_j) \triangleq \begin{cases} (c_{ter}, \tau_{ter}), & j = 2k-1, k \in \bar{p} \\ (c_{ter}, \tau_{ter}), & j = 2k, k \in \bar{p} \\ (c_{dr}, \tau_{dr}), & j = 2p+k, k \in \bar{q} \end{cases}$$

とおく。このとき、条件 (D-1), (D-2) が成り立つ。

$$\hat{c}_j > 0, \quad \hat{\tau}_j > 0, \quad j \in \bar{n} \quad (4.62)$$

が成り立つ。とて3で、

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_d)$$

を用いて、 $\tilde{F}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を、

$$\tilde{F}(x) \triangleq [\tilde{f}_1(x_1), \dots, \tilde{f}_d(x_d)]^T,$$

$$\tilde{f}_j(x_j) \triangleq f_j[\hat{q}_j(d_j^{-1}x_j)], \quad j \in \bar{n} \quad (4.63)$$

で定めろ。任意の $j \in \bar{n}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \neq \beta_2$ とする。

$$d_j^i \triangleq \hat{q}_j(\beta_i) = q_j^{-1}(\beta_i), \quad i \in \bar{2} \quad (4.64)$$

とすると、(4.63), (4.64), (4.54), (4.51) と (4.52) が成り立つ。

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{f}_j; d_j \beta_1, d_j \beta_2) &= \frac{\tilde{f}_j(d_j \beta_1) - \tilde{f}_j(d_j \beta_2)}{d_j \beta_1 - d_j \beta_2} \\ &= \frac{f_j(d_j^1) - f_j(d_j^2)}{d_j \{q_j(d_j^1) - q_j(d_j^2)\}} \\ &= \frac{1}{d_j} \cdot \frac{\pi(f_j; d_j^1, d_j^2)}{\pi(q_j; d_j^1, d_j^2)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{d_j} \cdot \frac{\pi(f_j; d_j^1, d_j^2)}{\tilde{c}_j + \tilde{\tau}_j \pi(f_j; d_j^1, d_j^2)}, & j \in \bar{n} \\ 0, & j \in \bar{d}, \quad j \geq n+1 \end{cases} \quad (4.65) \end{aligned}$$

を得る。同様に、

$$\begin{aligned} & \lambda(\hat{g}_j[d_j^{-1}\cdot]; d_j\beta_1, d_j\beta_2) \\ &= \begin{cases} \hat{c}_j + \hat{t}_j \lambda(f_j; d_i^i, d_s^i) & , j \in \bar{n} \\ \lambda(g_j; d_i^i, d_s^i) & , j \in \bar{d}, j \geq n+1 \end{cases} \quad (4.66) \end{aligned}$$

を得る。このとき、(4.62). (4.65). (4.66). と条件 (D-1). (D-2) の
 $\exists \gamma > 0, \min\{\lambda(\tilde{f}_j; d_j\beta_1, d_j\beta_2), \lambda(\hat{g}_j; d_j\beta_1, d_j\beta_2)\} \geq \gamma > 0,$
 $\forall j \in \bar{n}, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_1 \neq \beta_2 \quad (4.67)$

が成り立つ。又、(4.66) と条件 (D-3). (D-4) の S.

$$\exists \hat{\gamma} > 0, \lambda(\hat{g}_j[d_j^{-1}\cdot]; d_j\beta_1, d_j\beta_2) \geq \hat{\gamma} \triangleq \min\{1/m_{c2}, 1/m_{s2}\},$$

$$\forall i \in \bar{d}, i \geq n+1, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_1 \neq \beta_2 \quad (4.68)$$

が成り立つ。従って、 $a_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i, j \in \bar{d}$ を、

$$a_{ij}(x_i) \triangleq \begin{cases} -\hat{t}_{ij} \tilde{f}_j(x_j) - \hat{h}_{ij} \hat{g}_i[d_j^{-1}x_j], & i \in \bar{n}, j \in \bar{n} \\ -\hat{h}_{ij} \hat{g}_i[d_j^{-1}x_j], & i \in \bar{d}, j \in \bar{n} \end{cases} \quad (4.69)$$

とすると、(4.60). (4.61). (4.67)~(4.69) の S.

$$\lambda(a_{ij}; d_i \alpha, d_j \beta) + \sum_{i \neq j} |\lambda(a_{ij}; d_i \alpha, d_j \beta)| \leq -m_0 < 0,$$

$$\forall i \in \bar{d}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta \quad (4.70)$$

が成り立つ。但し、

$$m_0 \triangleq \min\{\delta_1 \gamma, \delta_2 \gamma, \delta_2 \hat{\gamma}\}$$

一方、 $\Psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$\Psi(x) \triangleq -TF[\hat{g}(x)] - H\hat{g}(x) \quad (4.71)$$

で定め、 $\tilde{\Psi}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(x) &= [\tilde{\Psi}_1(x), \dots, \tilde{\Psi}_d(x)]^T \\ &= -D\Psi[D^T x] \end{aligned} \quad (4.72)$$

で定めると、(4.69). (4.71) と (4.72) の S.

$$\tilde{\Psi}_i(x) = \sum_{j=1}^d a_{ij}(x_j) \quad (4.73)$$

となる。又、 $|x|_D \triangleq |Dx|_1$ とすると、定理 2.2.(ii) (4.71)~(4.73)

と(4.70)から補題2・6と同様にして.

$$\begin{aligned}\lambda_0(\psi; x, y) &= \lambda_1(D\psi D^{-1}; Dx, Dy) \\ &= \lambda_1(\tilde{\psi}; Dx, Dy) \\ &\leq -M_0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad x \neq y\end{aligned}\quad (4.74)$$

を得る. 従って, (4.71), (4.74)と定理8・8から, 系(4.57)の大域指數安定な周期解を有することがわかる.

(注4・4) この例題は, Sandberg⁽⁸⁷⁾が, 集積回路とそれに抵抗, 1ンダクタ, キャパシタ, 電源などの外部要素を加えた電気回路において, 入力が直流の場合に大域指數安定な直流解が存在するための十分条件として示したものである.

以上2つの電気回路の例を示したが, これらはいずれも大域的な条件の下に周期解の存在が保証されている. 最後に, 局所的な条件を満たす例を示そう.

[例3] Duffing方程式.

鉄共振現象などにおけるあらわれる次の系を考える.

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + k^2y + a y^3 = v(t) \quad (4.75)$$

但し, $a > 0, b > 0, k > 0$; $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{P}_c$.

系(4.75)において次の変換:

$$y = x_1, \quad \dot{y} = -bx_1 + cx_2, \quad c = b+k-\epsilon > 0$$

を行ふと

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -bx_1 + cx_2 \\ (b^2 - k^2)x_1 - ax_1^3 + /c - bx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v(t)/c \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

が得られる. 上式を改めて.

$$\dot{x} = f(x) + u \quad (4.77)$$

と示すと,

$$f'(x) = \begin{bmatrix} -b & c \\ (b^2 - k^2 - 3ax_1^2)/c & -b \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

を得る. 今,

$$\mu_a[f'(x)] = \max_{i \in \Sigma} \lambda_i \left(\frac{f'(x) + [f'(x)]^{tr}}{2} \right) \leq -m < 0 \quad (4.89)$$

なる領域を求める事を考へる。(4.89)が成り立つためにには、

$$(b-c)^2 + 2cm - k^2 \leq 3ax_i^2 \leq (b+c)^2 - k^2 - 2cm \quad (4.90)$$

が満足されねばよ。.

$$(b-c)^2 + 2cm - k^2 = 0 \quad (4.91)$$

の下で、

$$g(c, m) \triangleq (b+c)^2 - k^2 - 2cm \quad (4.92)$$

を最大にすることを考へると、(4.91), (4.92)が

$$g(c, m) = 2(b^2 + c^2 - k^2) \quad (4.93)$$

となり、 g は $c (> 0)$ の増加関数である。 $(c > 0, m > 0)$ とすると

$$2cm = k^2 - (b-c)^2 > 0$$

$$\therefore b-k < c < b+k$$

$$\varepsilon > 0 \text{ と } \varepsilon,$$

$$c \triangleq b+k-\varepsilon > 0 \quad (4.94)$$

とすると、(4.91)が

$$m = \frac{\varepsilon(2k-\varepsilon)}{2(b+k-\varepsilon)} \quad (4.95)$$

(4.94) を (4.93) へ代入して、

$$\begin{aligned} g(c, m) &= 2 \{ b^2 + (b+k-\varepsilon)^2 - k^2 \} \\ &= 2 \{ \varepsilon^2 + 2(b+k)(b-\varepsilon) \} \end{aligned} \quad (4.96)$$

$g(c, m) > 0$ であるためにには、

$$0 < \varepsilon < b+k - \sqrt{k^2 - b^2}, \quad b < k \quad (4.97)$$

$$0 < \varepsilon < b+k, \quad b \geq k$$

となるけれども、さて今、定理4.9を適用するために、 $x^* = \theta$ とし (4.90), (4.92), (4.96) が

$$r^* \triangleq \left\{ \frac{2 \{ \varepsilon^2 + 2(b+k)(b-\varepsilon) \}}{3a} \right\}^{1/2}$$

とする。そして、任意に $\delta \in (0, r^*)$ を与えて、

$$\sup \{ |U(t)| / c, t \in [0, w] \} \leq m \hat{r}, \hat{r} \leq r^* - \delta$$

すなはち、

$$\begin{aligned} \sup \{ |U(t)|, t \in [0, w] \} &\leq cm\hat{r} \\ &= \frac{\epsilon(2k-\epsilon)}{2} \times \hat{r} \end{aligned}$$

であり、 U が周期 w の周期解であれば、 $\hat{B} \triangleq \bar{B}[0; \hat{r}]$ 内の任意の点から出発した解軌道は、 \hat{B} 内に留まる周期 w の周期解軌道へ指数的に近づくことがわかる。(補題 2.8 参照)

(注 4.5) $\epsilon > 0$ は (4.97) をみたす範囲で、場合に応じて適当に定めればよい。

4.5 結論

この章では、非線形常微分方程式の可解性について考察し、2つのタブの結果を得た。1つは、岡村の結果に沿って得られるものであるが、より実用的な結果を得ることができた。又、もう1つの結果は、安定性を考慮するためには、前者のように大域的な条件を必要としないものである。又、安定性については、指數安定性および零入力零出力について若干の結果を得た。そして、それらを周期系へ応用し、周期解の存在と安定性について実用的な結果を得ることができた。得られた結果は、いずれの場合も一定入力の下における平衡点の存在と唯一性、およびその安定性をも保証している。

第5章. 平衡点方程式に対する反復法の適用 およびその収束性 (64) (65), (70) (88)

5.1 緒 言

平衡点方程式(直流方程式)は、非線形抵抗回路網における直流解析の他に、陰的積分公式による常微分方程式の数値解析、差分近似による偏微分方程式の数値解析、そして前章で述べた周期系における周期解を求めるに際して、それを常微分方程式の境界値問題としてとらえて、それを差分近似して数値解析を行う場合などに現われる。

まず5.2では、非線形ヤコビ法および非線形SOR法について考察する。そのために、5.2.1では、基礎となる線形方程式に対する収束性を検討し、従来知られている結果を整理、拡張する。そして、5.2.2では、その結果が非線形方程式に対してもほぼそのまま成立することを示す。

又、5.3では、Sandbergの反復法⁽⁴³⁾を、もう少し使い易い形に変形して反復法を提案し、その収束性について検討する。

そして5.4では、それらの結果の応用例を示す。まず5.4.1では非線形抵抗回路の直流解析においてよく見られる2つのタイプの直流方程式へ応用し、5.4.2では、周期系に対応用する。

5.2 非線形ヤコビ法、非線形SOR法.

5.2.1 線形方程式に対する収束性

対象とする方程式は次式で与えられる。

$$Ax = b \quad (5.1)$$

但し、 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$.

ここで、次の2つの反復法について考えよう。

(a) ヤコビ法:

$$x^{k+1} = D^{-1} [L + U] x^k + D^{-1} b, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

(b) SOR法:

$$x^{k+1} = (D - \omega L)^{-1} (\omega U + (1-\omega) D) x^k + \omega (D - \omega L)^{-1} b, k=0, 1, \dots \quad (5.3)$$

但し, D, L, U は, $A = D - L - U$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & A_{1N} \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & A_{NN} \\ A_{N1} & & & & \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & A_{NN} \\ 0 & & & & \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ A_{21} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & A_{NN-1} \\ A_{N1} & & & & \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & & & -A_{1N} \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & -A_{NN} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

で与えられる。ここに $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $\sum_{i=1}^N n_i = d$ である。

(注5.1) ヤコビ法, SOR法において, $n_i = 1$ ($i \in \overline{N}$, $N = d$) であるとき, 点ヤコビ法, 点SOR法と呼ぶ。そうでないときブロックヤコビ法, ブロックSOR法という。又, SOR法では加速パラメータ ω は通常 [0, 1], 又は, (0, 2) の範囲にえらばれるが, 特に $\omega = 1$ である場合に, ガウス・ザイデル法と呼ばれることがある。

さてヤコビ法では,

$$G = D^{-1}[L + U], \hat{b} = D^{-1}b \quad (5.5)$$

とし, SOR法では,

$$G = (D - \omega L)^{-1} [\omega U + (1-\omega) D], \hat{b} = \omega (D - \omega L)^{-1} b \quad (5.6)$$

とすると, 各反復法II.

$$x^{k+1} = G x^k + \hat{b}, k=0, 1, \dots \quad (5.7)$$

と表わされる。もし、 A および D の正則性を仮定するならば、(5.1)の唯一解 x^* は、(5.7)で示される反復法の唯一の不動点であることは容易にわかる。そして、反復法(5.7)が収束するための十分条件は、行列 G のノルムがより小であることであるが、ここでは行列 A がどのような性質を有するとき、 G がどのような性質を有するかということについて考察する。

まず G が(5.5)で与えられる場合について考える。

[補題5・1] 行列 A が強優行和($A \in SRS D$)とする。このとき、

- i) $\det(D) \neq 0$;
- ii) $\|D^{-1}(L+U)\|_\infty < 1$

である。但し、 $\|\cdot\|_\infty$ は、 L のノルムによって誘導される行列ノルムを示す。

(証明) 定理2・4, 3), 7)から、 $A_{RR}, R \in \bar{N}$ および D の正則性は明らか。次に任意の $k \in \bar{N}$ に対して、

$$B = (b_{ij}) \triangleq A_{RR} \in \mathbb{R}^{r \times r}, r \triangleq n_R$$

$$B^{-1} = (\hat{b}_{ij}) \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

$$C = (c_{ij}) \triangleq [A_{R1}, \dots, A_{R,R-1}, A_{R,R+1}, \dots, A_{RN}] \in \mathbb{R}^{r \times q}, q \triangleq d-r$$

とすると、

$$\sum_{j=1}^q \left| \sum_{s=1}^r \hat{b}_{is} c_{sj} \right| < 1, \quad \forall i \in \bar{r} \quad (5.8)$$

を示せば、ii)が得られる。

$A \in SRS D$ であるから、

$$\exists m > 0, b_{ss} - \sum_{j \neq s} |b_{sj}| - \sum_{j=1}^s |c_{sj}| \geq m > 0, \quad \forall s \in \bar{r} \quad (5.9)$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \left| \sum_{s=1}^r \hat{b}_{is} c_{sj} \right| &\leq \sum_{s=1}^r (|\hat{b}_{is}| \sum_{j=1}^q |c_{sj}|) \\ &\leq \sum_{s=1}^r \{ |\hat{b}_{is}| (b_{ss} - \sum_{j \neq s} |b_{sj}|) \} - m \sum_{j=1}^r |\hat{b}_{ij}| \end{aligned} \quad (5.10)$$

を得る。一方、 $B^{-1} \cdot B = I$ であるから、

$$I = \sum_{j=1}^r \left| \sum_{s=1}^r \hat{b}_{is} b_{sj} \right| \geq \sum_{s=1}^r \{ |\hat{b}_{is}| (b_{ss} - \sum_{j \neq s} |b_{sj}|) \} \quad (5.11)$$

が成り立つ。 (5.10), (5.11) より。

$$\sum_{j=1}^d \left| \sum_{s=1}^r \hat{b}_{is} c_{sj} \right| \leq 1 - m \hat{b}_{ii} \quad (5.12)$$

を得る。一方、 $A \in S R S D$ であるから、定理2・4, 3), 7) より。

$$\hat{b}_{ii} = (\det \tilde{B}_{ii} / \det B) > 0 \quad (5.13)$$

となる。但し、 \tilde{B}_{ii} は b_{ii} の余因子行列を示す。

従って、(5.12), (5.13) から、(5.8) を得る。 (証明終)

次に G が(5.6)で与えられる場合について考える。

[補題5・2] $A \in S R S D$ とする。このとき、

i) $\det [D - \omega L] \neq 0$;

ii) $\| (D - \omega L)^{-1} [\omega U + (1-\omega)D] \|_\infty < 1$, $\forall \omega \in (0, 1]$

となる。

(証明) 定理2・4, 3), 7) より, $A_{kk}, k \in \bar{N}$ および D の正則性は明らか。 $D - \omega L$ の正則性は D の正則性から明らか。

次に、任意に $\omega \in (0, 1]$ を与え。

$$\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij}) \triangleq D^{-1} L$$

$$\tilde{U} = (\tilde{u}_{ij}) \triangleq D^{-1} U$$

$$B = (b_{ij}) \triangleq I - \omega \tilde{L}$$

$$B^{-1} = (\hat{b}_{ij})$$

$$C = (c_{ij}) \triangleq \omega \tilde{U} + (1-\omega)I$$

とする。

$$\begin{aligned} & (D - \omega L)^{-1} [\omega U + (1-\omega)D] \\ &= (I - \omega D^{-1} L)^{-1} [\omega D^{-1} U + (1-\omega)I] \end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{j=1}^d \left| \sum_{s=1}^r \hat{b}_{is} c_{sj} \right| < 1, \quad \forall i \in \bar{d} \quad (5.14)$$

を示せば、ii) が得られる。

[補題5・1] より、

$$\| D^{-1} (L + U) \|_\infty = \| \tilde{L} + \tilde{U} \|_\infty < 1 - m \beta \quad (5.15)$$

$$\beta \triangleq \min \{ [A_{kk}^{-1}]_{ii}, i \in \bar{n}_R, k \in \bar{N} \} > 0 \quad (5.16)$$

が成り立つ。但し、 $[A_{RR}^{-1}]_{ii}$ は、 A_{RR} の左行列 A_{RR}^{-1} の (i,i) 成分を示す。
 (5.15) よりかき直すと、

$$\sum_{j=1}^d |\tilde{u}_{sj}| \leq 1 - \sum_{j \neq s} |\tilde{\ell}_{sj}| - m\beta, \quad * \quad s \in \bar{d} \quad (5.17)$$

となり。従って、 $w \in (0, 1]$ と (5.17) の式。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \left| \sum_{s=1}^d \hat{b}_{is} c_{sj} \right| \\ & \leq \sum_{s=1}^d (\hat{b}_{is} \sum_{j=1}^d |c_{sj}|) \\ & = \sum_{s=1}^d (\hat{b}_{is} \cdot \{ w \sum_{j \neq s} |\tilde{u}_{sj}| + 1 - w \}) \\ & \leq \sum_{s=1}^d (\hat{b}_{is} \cdot \{ 1 - w \sum_{j \neq s} |\tilde{\ell}_{sj}| \}) - w m \beta \quad * \end{aligned} \quad (5.18)$$

を得る。一方、 $B^{-1} \cdot B = I$ から、

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^d \left| \sum_{s=1}^d \hat{b}_{is} b_{sj} \right| \\ &\geq \sum_{j=1}^d \left\{ |\hat{b}_{is}| (b_{ss} - \sum_{j \neq s} |b_{sj}|) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^d \left\{ |\hat{b}_{is}| (1 - w \sum_{j \neq s} |\tilde{\ell}_{sj}|) \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

が成り立つ。従って、(5.18), (5.19) の式。

$$\sum_{j=1}^d \left| \sum_{s=1}^d \hat{b}_{is} c_{sj} \right| \leq 1 - w m \beta \quad (5.20)$$

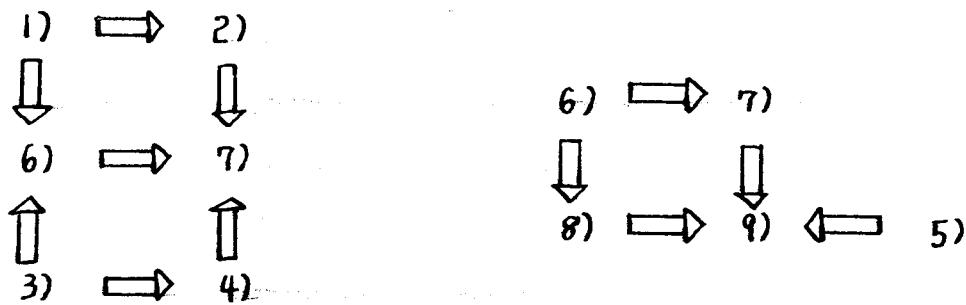
となり、(5.14) を得る。

補題 5・1, 5・2 から次の定理を得る。

[定理 5・1] 次の諸条件のうちいすれか一つが満足されれば、ヤコビ法およびSOR法 ($0 < w \leq 1$) は、 $Ax=b$ の唯一解 x^* へ収束する。

- 1) $A \in SRSPD$;
- 2) $A_s \in SRSD$, $A_s \triangleq SA$, $S = \text{diag}[\text{sgn}(a_{11}), \dots, \text{sgn}(a_{dd})]$;
- 3) $A \in SCSD$;
- 4) $A_s \in SCSD$;
- 5) $A \in IrDD$;
- 6) $A \in M$;
- 7) $A_s \in M$;
- 8) $A \in D$;
- 9) $A_s \in D$.

これらに各条件の関係は次のようになる。



(証明) 各条件の関係は、定理2・4から明らか。従って、9)が満足されるとする。このとき、定理2・4、1)から、

$\exists Q \in \mathcal{D}_+$, $\tilde{A} = Q^{-1}SAQ \in SRS\mathcal{D}$ となる。今、 $y = Q^{-1}x$ とすると、(5.7) から、
(5.21)

$$y^{k+1} = \hat{G}y^k + \tilde{b}, \quad \hat{G} = Q^{-1}GQ, \quad \tilde{b} = Q^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

を得る。ところで、

$$\hat{D} \triangleq Q^{-1}DQ, \quad \hat{L} \triangleq Q^{-1}LQ, \quad \hat{U} \triangleq Q^{-1}UQ$$

$$\tilde{D} \triangleq Q^{-1}SDQ, \quad \tilde{L} \triangleq Q^{-1}SLQ, \quad \tilde{U} \triangleq Q^{-1}SUQ$$

とすると、

$$\hat{D}^{-1}(\hat{L} + \hat{U}) = \tilde{D}^{-1}(\tilde{L} + \tilde{U})$$

$$(\hat{D} - \omega \hat{L})^{-1}[\omega \hat{U} + (1-\omega) \tilde{D}] = (\tilde{D} - \omega \tilde{L})^{-1}[\omega \tilde{U} + (1-\omega) \tilde{D}]$$

であることに注意すると、 $\tilde{A} \in SRS\mathcal{D}$ であるから、(5.5), (5.6),
(5.21), 補題5・1および5・2から、 $\|\hat{G}\|_{\infty} < 1$ となる。従って、 $\hat{G}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($\hat{G}x \triangleq \hat{G}x + \tilde{b}$) は、縮小写像と分つている。又、写像 $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($Tx \triangleq Q^{-1}x$) は同相写像であるから、補題2・14によつて結論を得る。
(証明終)

(注5・2) 定理5・1, 2) 及び 5) が満足されるとき、点やコビ法および点ガウス・ゲイデル法が収束することは、Collatz, Gringer らによつて示されている⁽⁹⁰⁾。又、6) が満足されるときについては、従来正則分離 (regular-splitting) を用いて同じ結果が得られて⁽⁹¹⁾いる⁽⁹²⁾。

5・2・2 非線形方程式における収束性。

対象とする非線形方程式は次式で与えられる。

$$F(x) = [f_1^{tr}(x), \dots, f_N^{tr}(x)]^{tr} = \theta \quad (5.22)$$

但し, $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, $f_i \in \mathcal{P}_{\text{cl}}$, $i \in \bar{N}$; $\sum_{i=1}^N n_i = d$.

次の2つの反復法を考える。

(a) 非線形ヤコビ法:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega (x_i - x_i^k), \quad i \in \bar{N}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.23)$$

但し, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ は,

$$f_i(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, \dots, x_N^k) = \theta \quad (5.24)$$

の解である。

(b) 非線形SOR法:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega (x_i - x_i^k), \quad i \in \bar{N}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.25)$$

但し, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ は,

$$f_i(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i, x_{i+1}^k, \dots, x_N^k) = \theta \quad (5.26)$$

の解である。

(注5.3) ここで、(5.22)のように F を定めたが、各 n_i の大きさは任意である。又、各 $f_i \in \mathcal{P}_{\text{cl}}$ であるから $F \in \mathcal{P}_{\text{cl}}$ となる。

さて非線形ヤコビ法、非線形SOR法の収束については、補題5.1, 5.2 から直ちに次の結果が得られる。

[定理5.2] 方程式 (5.22) に対して、次の条件: (5.27)

$$\exists m > 0, -\mu_{\infty} [-F'(x)] \geq m > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つならば、次のことが成り立つ。

- i) $F(x) = \theta$ は唯一解 x^* を有する;
- ii) 方程式 (5.24), (5.26) は唯一解 x^* を有する;
- iii) 非線形ヤコビ法、非線形SOR法 ($0 < \omega \leq 1$) は、 x^* に大域収束する。

(証明) i). (5.27) と系3.3 から明らか。

ii) (5.27) と補題2.4 から

$$-\mu_{\infty} [-\partial_i f_i(x)] \geq m > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つから、上式と系3.3より明らか。

iii) まず非線形ヤコビ法について考える。

$$x^{k,i} \triangleq [(x_i^k)^{tr}, \dots, (x_{i-1}^k)^{tr}, [x_i^k + (1/\omega)(x_{i+1}^{k+1} - x_i^k)]^{tr}, (x_{i+1}^k)^{tr}, \dots, (x_N^k)^{tr}]^{tr}$$

とすると、(5.26), (5.27) より

$$f_i(x^{k,i}) = 0, i \in \bar{N}, k = 0, 1, \dots$$

となる。一方、ii) より

$$f_i(x^*) = 0, i \in \bar{N}$$

であるから、補題2.1によって。

$$\theta = f_i(x^{k,i}) - f_i(x^*)$$

$$= \left[\int_0^1 f'_i(\tau x^{k,i} + (1-\tau)x^*) d\tau \right] [x^{k,i} - x^*], i \in \bar{N}$$

を得る。従って、

$$x^k \triangleq [(x_1^k)^{tr}, \dots, (x_N^k)^{tr}]^{tr}, k \in \mathbb{Z}_+$$

$$A_{ij}^k \triangleq \int_0^1 \partial_j f_i(\tau x^{k,i} + (1-\tau)x^*) d\tau, j, i \in \bar{N}, k \in \mathbb{Z}_+$$

とすると、

$$\begin{aligned} \theta &= [A_{11}^k, \dots, A_{i-1,1}^k, (1-1/\omega)A_{ii}^k, A_{i+1,1}^k, \dots, A_{iN}^k] [x^k - x^*] \\ &\quad + (1/\omega) [\odot, \dots, \odot, A_{ii}^k, \odot, \dots, \odot] [x^{k+1} - x^*], \\ &\quad \forall i \in \bar{N}, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 $A_k \triangleq (A_{ij}^k)$ に対して、 D_k, L_k, U_k を(5.4)のように定めると、

$$D_k [x^{k+1} - x^*] = [\omega(L_k + U_k) + (1-\omega)D_k] [x^k - x^*], k \in \mathbb{Z}_+, \quad (5.28)$$

を得る。一方、(5.27) と補題2.4に注意すると、

$$-\mu_\infty(-D_k) \geq -\mu_\infty(-A_k) \geq m > 0, k \in \mathbb{N}$$

となり、補題5.1によつて、

$$\|D_k^{-1}(L_k + U_k)\|_\infty \leq 1 - m\beta_k, k \in \mathbb{N}$$

$$\beta_k = \min \{ [A_{ii}^{-1}]_{ii}, i \in \eta_i, i \in \bar{N} \}$$

が成り立つ。従つて、

$$\|D_k^{-1}[\omega(L_k + U_k) + (1-\omega)D_k]\|_\infty$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega (1 - m\beta_R) + (1-\omega) \\ &= 1 - \omega m\beta_R, R \in N \end{aligned} \quad (5.29)$$

を得る。 (5.28) と (5.29) より、

$$|x^{k+1} - x^*|_\infty \leq (1 - \omega m\beta_R) |x^k - x^*|_\infty, R \in N \quad (5.30)$$

が成り立つ。今、(5.23), (5.24) によって定まる x^k と x^{k+1} の対応によつて写像 $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($x^{k+1} = G[x^k]$) を定めると、任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$ に対して開球 $B_0 \triangleq \overline{B}[x^*; |x^0 - x^*|_\infty]$ を定めるとき、(5.30) から、 G は \overline{B}_0 からそれ自身の中への写像となることがわかる。一方 はコンパクトであるから、

$$\exists \beta^* > 0, \beta_R \geq \beta^* > 0, \forall x^0 \in \overline{B}_0, R \in N$$

となる。従つて、(5.30) より、

$$|G(x) - G(x^*)| \leq \alpha |x - x^*|, \forall x \in \overline{B}_0. \quad (5.31)$$

$$\alpha \triangleq 1 - \omega m\beta^* < 1$$

を得る。一方、(5.30) と同様にして、ある $\hat{\alpha} \in (0, 1)$ に対して

$$|G(x) - G(y)|_\infty \leq \hat{\alpha} |x - y|_\infty, \forall x, y \in \overline{B}_0.$$

を得るから、 G は連続である。従つて、非線形ヤコビ法は、 x^* へ大域収束することがわかる。

非線形SOR法についても、補題5.2を用いて同様に証明できる。

(証明終)

(注5.4) さてここでは、非線形ヤコビ法および非線形SOR法の収束性を考えるためにあたつて、(5.24) および (5.26) が完全に解かれることを仮定してきた。しかし、これらは原理的には無限回の操作を必要としている。一方実際的には有限回で計算を打ち切つて次の反復を行う必要がある。このように有限回で打ち切つて反復計算を行う場合の“収束性”については、系2・3によつて*、各ステップにおける打ち切り誤差が十分小さければ、それぞれの反復法によつて得られる数値解と真の解との誤差もまた十分小ささいことが保証される。

* この場合は、 $T = I$ である。

さて次に、方程式 (5.22) において、 $F'(x)$ が対称である場合について考えよう。 F がアファイン写像、すなわち、 $F(x) = Ax + b$ の場合には、オストロフスキーライクの定理⁽⁹⁰⁾⁽⁹¹⁾ が知られているが、ここでけでそれがある程度非線形方程式に対して拡張できることを示す。

まず次の補題を示す。

[補題 5・3] (対称性原理⁽¹²⁾) 写像 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F \in P_C$ を与えよ。このとき、任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し、 $F'(x)$ が対称ならば、 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1$ が存在して、 $[g'(x)]^{\text{tr}} \equiv F'(x)$ となる。さらに g は、

$$g(x) = \int_0^1 \langle x - x^0, F[x^0 + t(x - x^0)] \rangle dt$$

で与えられる。但し、 $x^0 \in \mathbb{R}^d$ は任意に固定された点である。

さて $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ が補題 5・3 の条件を満足し、さらに次の条件：

$$\exists m > 0, -M_2[-F'(x)] \geq m > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (5.32)$$

が成り立つとする。このとき、系 3・3 より、 $F(x) = 0$ は唯一解 x^* を有するが、この x^* を用いて、 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を、

$$g(x) \triangleq \int_0^1 \langle x - x^*, F[x^* + t(x - x^*)] \rangle dt \quad (5.33)$$

で定める。補題 2・1 を用いると、(5.32) より、

$$\begin{aligned} g(x) &= \langle x - x^*, \left[\int_0^1 \int_0^1 F'[x^* + ts(x - x^*)] ds dt \right] [x - x^*] \rangle \\ &\geq m \|x - x^*\|_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

となり、

$$g(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$g(x) = 0 \iff x = x^*$$

であること、および g が一様凸関数 (uniformly convex function) となることがわかる⁽¹²⁾。一方、(5.25), (5.26) で定義された非線形SOR法は、一般に加速度パラメータ α を各ステップにおいて変化させるとき、

$$y^{NR+i} \triangleq [(x_i^{k+1})^{\text{tr}}, \dots, (x_i^{k+1})^{\text{tr}}, (x_{i+1}^k)^{\text{tr}}, \dots, (x_N^k)^{\text{tr}}]^{\text{tr}} \quad i \in \overline{N}, R \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.34)$$

とすると、

$$y^{NR+i} = y^{NR+i-1} - \omega_{R,i} P_i \xi_{R,i}, i \in \overline{N}, R \in N \quad (5.35)$$

$$f_i(y^{NR+i-1} - P_i \xi_{R,i}) = 0, i \in \overline{N}, R \in N \quad (5.36)$$

のように表わせる。但し, $P_i \in \mathbb{R}^{d \times n_i}$, $\xi_{R,i} \in \mathbb{R}^{n_i}$ は。

$$P_i^{\text{tr}} \triangleq [\theta_{ri}, e^1, \dots, e^{n_i}, \theta_{qi}]$$

ここに, $\theta_{ri} \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i}$, $r_i \triangleq n_1 + \dots + n_{i-1}$, $\theta_{qi} \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$, $q_i = n_{i+1} + \dots + n_N$ は零行列を示し, $e^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ は座標ベクトルを示す。

以上のことから次の結果を得る。

[定理 5.3] 方程式 (5.22) に対して, 次の条件:

i) 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $F'(x)$ は対称;

ii) $\exists m > 0, -M_2[-F'(x)] \geq m > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (5.32)$

が満足されるとする。このとき, 各ステップにおいて $\omega_{R,i}$ を区間 $(0, \delta_{R,i})$ 内にえらぶならば, 非線形SOR法は, (5.22) の唯一解 x^* へ大域収束する。ここに $\delta_{R,i}$ は,

$$\delta_{R,i} \triangleq 1 + \sqrt{m_{R,i} / M_{R,i}} \quad (5.37)$$

$$M_{R,i} \triangleq \sup_{t \in [0, 2]} \| \partial_i f_i(y^{NR+i-1} - t P_i \xi_{R,i}) \|_2 \quad (5.38)$$

$$m_{R,i} \triangleq \inf_{t \in [0, 1]} -M_2[-\partial_i f_i(y^{NR+i-1} - t P_i \xi_{R,i})] \quad (5.39)$$

で与えられる。

(証明) (5.22) が唯一解 x^* を有することは, (5.32) と系 3.3 から明らかである。 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を (5.33) で定める。 (5.35), (5.36) から,

$$\begin{aligned} & g(y^{NR+i}) - g(y^{NR+i-1}) \\ &= \left[\int_0^1 g'(t y^{NR+i} + (1-t) y^{NR+i-1}) dt \right] [y^{NR+i} - y^{NR+i-1}]^* \\ &= \left\langle \int_0^1 F(y^{NR+i-1} - \omega_{R,i} P_i \xi_{R,i}) dt, -\omega_{R,i} P_i \xi_{R,i} \right\rangle^{**} \\ &= -\omega_{R,i} \left\langle \int_0^1 f_i(y^{NR+i-1} - \omega_{R,i} P_i \xi_{R,i}) dt, \xi_{R,i} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.40)$$

を得る。一方, 補題 2.1 から

* 補題 5.3 から, $g \in C^1 \subset P_{C^1}$ となり補題 2.1 を用いる。

** 補題 5.3 から, $[g'(x)]^{\text{tr}} \equiv F(x)$.

$$\begin{aligned}
& f_i(y^{NR+i-1} - \tau w_{R,i} p_i \bar{x}_{R,i}) \\
&= f_i(y^{NR+i-1} - \tau w_{R,i} p_i \bar{x}_{R,i}) - f_i(y^{NR+i-1} - p_i \bar{x}_{R,i}) \\
&= \left[\int_0^1 \partial_i f_i(y^{NR+i-1} - (1-s+\tau w_{R,i}) p_i \bar{x}_{R,i}) ds \right] (1-\tau w_{R,i}) \bar{x}_{R,i}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

となる。又、(5.32) より。

$$-\mu_2 [-\partial_i f_i(x)] \geq m > 0, \quad \forall x \in R^d, \quad \forall i \in \overline{N} \tag{5.42}$$

が成り立つ。従って、 $w_{R,i} \in (0, 1]$ のとき、(5.40)～(5.42) より

$$\begin{aligned}
& q(y^{NR+i}) - q(y^{NR+i-1}) \\
&\leq -w_{R,i} \cdot m \int_0^1 \int_0^1 (1-\tau w_{R,i}) ds d\tau \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \\
&= -(m/2) w_{R,i} (2-w_{R,i}) \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \\
&\leq -(m/2) \|y^{NR+i} - y^{NR+i-1}\|_2^2
\end{aligned} \tag{5.43}$$

を得る。一方、 $w_{R,i} \in (1, \delta_{R,i})$ のとき、 $M_{R,i}, M_{R,i}$ を (5.38), (5.39) で定め。

$$\beta_{R,i} \triangleq \delta_{R,i} - 1 = \sqrt{M_{R,i}/M_{R,i}} > 0$$

$$\gamma_{R,i} \triangleq w_{R,i} - 1 > 0$$

$$\epsilon_{R,i} \triangleq \beta_{R,i} - \gamma_{R,i} = \delta_{R,i} - w_{R,i} > 0$$

とすると、(5.40)～(5.42) より

$$\begin{aligned}
& q(y^{NR+i}) - q(y^{NR+i-1}) \\
&\leq -w_{R,i} \cdot M_{R,i} \int_0^1 \int_0^{1/w_{R,i}} (1-\tau w_{R,i}) d\tau ds \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \\
&\quad + w_{R,i} M_{R,i} \int_0^1 \int_1^{1/\gamma_{R,i}} (1-\tau w_{R,i}) d\tau ds \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \\
&= -(1/2) \{ M_{R,i} - M_{R,i} (w_{R,i} - 1)^2 + \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \} \\
&= -(M_{R,i}/2) \{ 1 - (\gamma_{R,i}/\beta_{R,i})^2 + \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \} \\
&= -(M_{R,i}/2) \{ (\beta_{R,i} + \gamma_{R,i})(\beta_{R,i} - \gamma_{R,i})/\beta_{R,i}^2 + \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \} \\
&= -(M_{R,i}/2) (\epsilon_{R,i}/\beta_{R,i}) \{ 2 - (\epsilon_{R,i}/\beta_{R,i}) + \|\bar{x}_{R,i}\|_2^2 \} \\
&\leq -(m/2) \gamma_{R,i} \|y^{NR+i} - y^{NR+i-1}\|_2^2
\end{aligned} \tag{5.44}$$

を得る。但し、

* $w_{R,i} \in (1, \delta_{R,i}) \subset (1, 2) \Leftrightarrow w_{R,i}^2 < 4, m \leq M_{R,i}$.

$$\eta_{R,i} \triangleq (\varepsilon_{R,i} / \beta_{R,i}) \{2 - (\varepsilon_{R,i} / \beta_{R,i})\} / 4 \quad (5.45)$$

一方、レベルセット $L(x^0)$ を、

$$L(x^0) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) \leq g(x^0)\}$$

で定めると、 g は一様凸関数であるから、 $L(x^0)$ はコンパクトである⁽¹²⁾。従って、

$$\beta \triangleq \min_{x \in L(x^0)} \min_{i \in \bar{N}} \left[\frac{m}{\|\partial_i f_i(x)\|_2} \right]^{1/2} > 0$$

であるから、

$$\beta_{R,i} \geq \beta, \forall i \in \bar{N}, R \in N$$

$$\delta_{R,i} \geq 1 + \beta > 0, \forall i \in \bar{N}, R \in N$$

となり、 $\varepsilon_{R,i}$ は、常にある $\varepsilon > 0$ より大きくなることができる。このとき、

$$\eta_{R,i} \geq \varepsilon(2 - \varepsilon)/4 \quad * \quad (5.46)$$

となる。従って、 $w_{R,i} = \delta_{R,i} - \varepsilon \in (0, \delta_{R,i})$ にとるならば、(5.43)～(5.46) から、ある $\hat{m} > 0$ が存在して、

$$g(y^{NR+i}) - g(y^{NR+i-1}) \leq -\hat{m} \|y^{NR+i} - y^{NR+i-1}\|_2^2, \quad \forall i \in \bar{N}, \forall R \in \mathbb{Z}^+ \quad (5.47)$$

が成り立つ。一方、(5.34) から、

$$x^k = y^{NR}, k \in \mathbb{Z}^+$$

となり、このとき、 $\{x^k\}$ は、加速パラメータ $w_{R,i}$ を $(0, \delta_{R,i})$ の範囲内で選んだ場合に非線形SOR法によって生成される数列であり、(5.47) から、

$$0 = g(x^*) \leq g(x^k) \leq -\hat{m} \sum_{i=0}^{k-1} \|x^{i+1} - x^i\|_2^2 + g(x^0) \quad \forall k \in N \quad (5.48)$$

を満足する**。従って、 $\{x^i\}$ はコーシー列となり、ある x^* に収束する。そして、 $x^* = x^*$ であることは、(5.22) の解が一意であることから明らかである。
(証明終)

* $\varepsilon \leq [\varepsilon_{R,i} / \beta_{R,i}] < 1$.

** ℓ_2 ノルムであるから、 $\|x^{i+1} - x^i\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \|y^{NR+i} - y^{NR+i-1}\|_2^2$.

(注 5・5) $F(x) = Ax + b$ の場合は、(5.40), (5.41) カ'ら

$$g(y^{NR+c}) - g(y^{NR+c-1}) \\ = -\omega_{R,i} \int_0^1 \int_0^1 (1-\omega_{R,i}) d\tau ds \langle \tilde{z}_{R,i}, A_{ii} \tilde{z}_{R,i} \rangle$$

となり、 $\omega_{R,i} \in (0, 2)$ ならば、

$$g(y^{NR+c}) - g(y^{NR+c-1}) \\ \leq - (m/2) \omega_{R,i} (2 - \omega_{R,i}) / \tilde{z}_{R,i}^2 \\ \leq - (m/2) / |y^{NR+c} - y^{NR+c-1}|^2$$

が得られる。但し、

$$m = \min \{ -\mu_2(-A_{ii}) \mid i \in \bar{N} \} > 0.$$

従って、(5.48)が得られ、オストロフスキイ・ライフの定理の十分性が示される。

(注 5・6) 加速パラメータ W を $(0, \delta_{R,i})$ の範囲にとれるということは、(5.26)が完全に解かれなくても、各ステップにおいて(5.26)の真の解との誤差が十分小さければ、収束性には影響がないことを意味している。

5・3 Sandberg の反復法

前節で、非線形方程式(5.22)の \rightarrow の解法として非線形ヤコビ法と非線形SOR法を取り上げその収束性を検討したが、この節ではSandbergの反復法を取り上げ、それについて考察する。さて対象とする方程式は、

$$F(x) = \theta \quad (5.49)$$

で与えられる。ここで $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は準リプシツ連続(方程式(5.22)の場合と異なり F は区分的に連続微分可能でなくともよい)とする。

Sandberg の反復法は次式で与えられる。

$$x^{i+1} = Gx^i, \quad i \in \mathbb{Z}_+; \quad Gx = x + d_0(U - Fx) \quad (5.50)$$

もし、 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ が \mathbb{R}^d 上でリプシツ連続でかつ、

$$-\mu[-F; \theta, r] \geq m > 0, \quad \forall r > 0$$

なる条件が満足されるならば、(2.12) で定められる $a \mapsto \tilde{\pi}(a; -F, \theta, r)$

の連続性から、

$$\exists d_0, m_0 > 0, \forall (d_0; -F, \theta, r) \geq m_0 > 0, \forall r > 0 \quad (5.51)$$

が成り立つ。そして上式は、

$| (I-d_0 F)x - (I-d_0 F)y | \leq (1-d_0 m_0) |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

と等価である。従って、(5.49)で与えられる $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は \mathbb{R}^d 上で縮小写像となる。これが Sandberg の反復法の本質であり、Sandberg⁽⁴³⁾は、 ℓ_0 / ℓ_1 ルムの場合には、 $d_0 = m / \ell_0$, $m_0 = m / (1 + \sqrt{1 - (m / \ell_0)^2})$ となることを示した。但し、 ℓ_0 は F のリップシット定数である。

ところで、一般のノルムに対しては、(5.51) を満足するようなを見出することは容易でない。そこでこの節では、Sandberg の反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を考える。

さて、補題3・4の証明に示したように、もし、

$$\exists m > 0, \lambda(F; x, y) \geq m, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \quad (5.52)$$

が満足されるならば、任意の $r > 0$ に対し、写像 $H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$Hx \triangleq (R I + F)^{-1}(u + R x) \quad (5.53)$$

で定めると、 H は \mathbb{R}^d 上で縮小写像となり、唯一の不動点 x^* を有する。そして、この x^* は、(5.49) の唯一解であることも容易にわかる。一方、方程式: $(R I + F) y = u$ は、 $R = \ell_0 + \beta$, $\beta > 0$ とすると、 $d_0 = 1/R$, $m_0 = \beta$ にすると、(5.51) を満足することになり、Sandberg の反復法によって解くことができる。以上がこの節で考える反復法の概要であるが、以下においては、これをもう少し詳しく検討する。

上述したことから、次の反復法を考える。

$$x^{i+1} = Hx^i, i \in \mathbb{Z}_+; x^0 = z^0 \quad (5.54)$$

$$y_i^{i+1} = G_i y_i^i, i \in \mathbb{Z}_+; y_i^0 = x^i, i \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.55)$$

但し、 H および G_i , $i \in \mathbb{Z}_+$ は次式で定められる。

$$Hx \triangleq T^{-1}(u + Rx), T x \triangleq (R I + F)x, \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} G_i y_i &\triangleq y_i + (1/R)(u + Rx^i - Ty_i) \\ &= (1/R)(u + Rx^i - Fy_i) \end{aligned} \quad (5.57)$$

以下の議論に於いては、次の仮定Aが満足されるものとする。

A: $F \in \mathcal{F}_{q,L}$ のとき、(5.52)が満足される。

まず反復法(5.54)について考える。

[補題5・4] 仮定Aが満足されるとする。このとき、任意の $R > 0$ に対して、(5.56)で定義される $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は同相写像となる。そして、任意の $z^* \in \mathbb{R}^d$ に対して、(5.54)によつて生成される数列 $\{x^i\}$ は、方程式(5.49)の唯一解 x^* に収束する。

(証明) 定理2・2、(d)と(5.52)から、

$$\lambda(T; x, y) = R + \lambda(F; x, y) \geq R + m > 0,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \quad (5.58)$$

が成り立つ。従つて、定理3・3から、 $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は同相写像となる。又(5.58)と定理2・2、(h)から

$$|Hx - Hy| = |T^{-1}(u + Rx) - T^{-1}(u + Ry)|$$

$$\leq [1/(R+m)] |Rx - Ry|$$

$$\leq [R/(R+m)] |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad (5.59)$$

が成り立つ。従つて、縮小写像原理(補題2・13)から H は唯一の不動点 x^* を有し、 $\{x^i\}$ は x^* へ収束する。又、

$$Hx^* = x^* \iff F(x^*) = u$$

であるから結論を得る。 (証明終)

次に反復法(5.55)について考える。

[補題5・5] 仮定Aが満足されるとする。

$$r^* \triangleq |u - F(z^*)| / m \quad (5.60)$$

$$l_0 \triangleq \|F(z^*, z^{i+1})\|, \quad (5.61)$$

$$k \triangleq l_0 + \beta, \beta > 0 \quad (5.62)$$

とし、 $\{x^i\}$ を(5.54)によつて生成される数列とする。このとき、 $\forall i \in \mathbb{Z}_+$ に対し、(5.55)によつて生成される数列を $\{y^i\}$ とすると、 $\{y^i\}$ は、 G_i の唯一の不動点 z^{i+1} に収束する。さらに、

$$\{y^i_j, j \in \mathbb{Z}_+\} \subset \overline{B_i} \triangleq \overline{B}[x^{i+1}; \alpha \delta^i r^*] \subset \overline{B}^* \triangleq \overline{B}[z^*; z^{i+1}]$$

となる。但し、

$$\alpha \triangleq m / (k+m) \quad (5.63)$$

$$\delta \triangleq R / (R+m) \quad (5.64)$$

(証明) 補題5・4に示したように、 $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は同相写像となるから、各 $i \in \mathbb{Z}_+$ に対し、 x^{i+1} は G_i の唯一の不動点となる。 (5.59) から、

$$\begin{aligned} |x^{i+1} - x^i| &\leq \delta |x^i - x^{i-1}| \\ &\leq \delta^i |x^1 - x^0|, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (5.65)$$

を得る。一方 (5.54) , (5.56) から

$$\begin{aligned} T x^1 - T x^0 &= T T^{-1} (U + R z^0) - (R I + F)(z^0) \\ &= U - F z^0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

となる。定理2・2, (9). $\therefore (5.58)$, (5.66) , (5.60) , (5.63) から

$$(k+m) |x^1 - x^0| \leq |U - F z^0|$$

$$\therefore |x^1 - x^0| \leq \alpha r^* \quad (5.67)$$

を得る。従って (5.65) と (5.67) から

$$|x^{i+1} - x^i| \leq \alpha \delta^i r^*, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.68)$$

である。

$$\begin{aligned} |x^{i+1} - z^0| &\leq |x^{i+1} - x^i| + |x^i - x^{i-1}| + \dots + |x^1 - x^0| \\ &\leq \alpha (\delta^i + \delta^{i-1} + \dots + 1) r^* \\ &\leq r^*, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (5.69)$$

を得る。 (5.69) から、各 $i \in \mathbb{Z}_+$ に対し、 $\overline{B_i} \subset \overline{B}^*$ となることがわかるから

$$\begin{aligned} |G_i y - x^{i+1}| &= |G_i y - G_i x^{i+1}| \\ &= (1/k) |F y - F x^{i+1}| \\ &\leq (l_0/k) |y - x^{i+1}| \\ &= [l_0 / (l_0 + \beta)] |y - x^{i+1}|, \\ &\quad \forall y \in \overline{B_i} \subset \overline{B}^* \end{aligned} \quad (5.70)$$

となる。従って、 (5.55) , (5.68) , (5.70) から結論を得る。(証明終)

上に示した補題5・4, 5・5によって、仮定Aが満足されるとき、反復法 (5.54) , (5.55) は、 (5.49) の唯一解 x^* へ収束することがわかった

が、実際にには、ステップにおいて反復法(5.55)は有限回で打ち切る必要がある。今、 i ステップを $N(i)$ 回で打ち切ることにすると、

$$\tilde{x}^{i+1} = \tilde{y}_i^{N(i)} ; \tilde{y}_i^{j+1} = \tilde{G}_i \tilde{y}_i^j, j = 0, 1, \dots, N(i); \tilde{y}_i^0 = \tilde{x}^i, \\ i = 0, 1, \dots; \tilde{x}^0 = \bar{x}^0 \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_i y &\triangleq y + (1/k)(u + k\tilde{x}^i - Ty) \\ &= (1/k)(u + k\tilde{x}^i - Ty) \end{aligned} \quad (5.72)$$

なる反復法が得られる。これについて考えよう。

[定理5.4] 假定Aが満足されるとする。 r^* , λ_0 , k , α および δ を(5.60)～(5.64)で定める。 $\varepsilon > 0$ を

$$\varepsilon \leq m r^* / (3k + m) \quad (5.73)$$

をみたすようにえらぶ。各 $i \in \mathbb{Z}_+$ に対し、 $N(i)$ を

$$y^{N(i)} (|u - Ty^i|/m) \leq \varepsilon \quad (5.74)$$

となるように十分大きく選ぶ。ここで $\gamma \in (0, 1)$ は、

$$\gamma \triangleq \lambda_0/k = \lambda_0 / (\lambda_0 + \beta), \beta > 0 \quad (5.75)$$

で与えられる。このとき、 $\{\tilde{x}^i\}$ を(5.71)によつて生成される数列とすると、

$$|\tilde{x}^i - x^*| \leq (\varepsilon/\alpha) + \gamma^i \cdot r^*, \quad i \in \mathbb{N} \quad (5.76)$$

が成り立つ。ここでだけ、(5.49)の唯一解を示す。

(証明) 補題5.4に示したように、 $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は同相写像となるから方程式

$$Ty = u + k\tilde{x}^i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.77)$$

は唯一解 y^* を有する。従つて、(5.72)で定められた唯一の不動点 \tilde{x}^* を有する。 $\{\tilde{x}^i\}$, $\{\tilde{x}^*\}$ および $\{y^i\}$ を、それぞれ、(5.54), (5.71)および(5.77)によつて生成される数列とする。(5.58)と定理2.2.(g)から、次式を得る。

$$\begin{aligned} |x^{i+1} - y^*| &= |T^{-1}(u + k\tilde{x}^i) - T^{-1}(u + k\tilde{x}^*)| \\ &\leq [k / (k + m)] |\tilde{x}^i - \tilde{x}^*| \\ &= \gamma |\tilde{x}^i - \tilde{x}^*|, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \quad (5.78)$$

さて次に、数学的帰納法によつて、

$$\overline{B}[\tilde{q}_i^*; r_i] \subset \overline{B}^* \triangleq \overline{B}[z^0; \alpha r^*], r_i \triangleq |\tilde{q}_i^* - z^i|, i \in \mathbb{Z}^+ \quad (5.79)$$

が成り立つことを示す。

- 1) $i = 0$. $z^0 = x^0 = z^0$ から, $\tilde{q}_0^* = z^1$ となることに注意すると、補題5・5 から, $\overline{B}[q_0^*; r_0] = \overline{B}[z^1; |z^1 - z^0|] \subset \overline{B}[z^1; \alpha r^*] \subset \overline{B}^*$ となる*.
- 2) $i \leq n$ に対して, $\overline{B}[\tilde{q}_i^*; r_i] \subset \overline{B}^*$ となるとする。

$i = n+1$, 任意に $l \leq n$ を与えろと, 假定から, $\tilde{x}^l \in \overline{B}^*$ であるから,

$$\begin{aligned} |\tilde{q}_l^1 - \tilde{q}_l^*| &= |\tilde{G}_l \tilde{x}^l - \tilde{G}_l \tilde{q}_l^*| \\ &\leq (1/R) |\mathcal{F} \tilde{x}^l - \mathcal{F} \tilde{q}_l^*| \\ &\leq \gamma |\tilde{x}^l - \tilde{q}_l^*| \end{aligned}$$

となり, $\tilde{q}_l^1 \in \overline{B}[\tilde{q}_l^*; r_l] \subset \overline{B}^*$ であるから。

$$\begin{aligned} |\tilde{q}_l^2 - \tilde{q}_l^*| &\leq \gamma |\tilde{q}_l^1 - \tilde{q}_l^*| \\ &\leq \gamma^2 |\tilde{x}^l - \tilde{q}_l^*| \end{aligned}$$

を得る。以下これをくり返して, (5.71), (5.73) から次式を得る。

$$\begin{aligned} |\tilde{x}^{l+1} - \tilde{q}_l^*| &= |\tilde{q}_{l+1}^{N(l)} - \tilde{q}_l^*| \\ &\leq \gamma^{N(l)} |\tilde{x}^l - \tilde{q}_l^*| \\ &\leq \gamma^{N(l)} |u - \mathcal{F} \tilde{x}^l| / m \\ &\leq \varepsilon, \quad * l \leq n \end{aligned} \quad *** \quad (5.80)$$

(5.78) と (5.80) から,

$$\begin{aligned} |x^{l+1} - \tilde{x}^{l+1}| &\leq |x^{l+1} - \tilde{q}_l^*| + |\tilde{q}_l^* - \tilde{x}^{l+1}| \\ &\leq \delta |\tilde{x}^l - \tilde{q}_l^*| + \varepsilon, \quad * l \leq n \end{aligned} \quad (5.81)$$

となり, (5.81), (5.80), (5.63) と (5.64) から

$$\begin{aligned} |x^{l+1} - \tilde{x}^{l+1}| &\leq (1 + \delta + \dots + \delta^{l-1}) \cdot \varepsilon + \delta^l |z^l - \tilde{z}^l| \\ &= (1 + \delta + \dots + \delta^{l-1}) \varepsilon + \delta^l \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

* (5.67) から $|x^l - z^l| \leq \alpha r^*$

** (5.72), (5.77) から, $\tilde{q}_i^* = \tilde{G}_i q_i^*$, $i \in \mathbb{Z}^+$ (5.82)

*** (5.58) と定理2・2 (f) から。

$$|\tilde{x}^l - \tilde{q}_l^*| = |\mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{T} \tilde{x}^l - \mathcal{T}^{-1} (u + R \tilde{x}^l)| \leq |R \tilde{x}^l + \mathcal{F} \tilde{x}^l - u - R \tilde{x}^l| / (R+m)$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon / (1 - \delta) \\ &= \varepsilon / \alpha, \quad \forall l \leq n \end{aligned} \tag{5.82}$$

を得る。 (5.78), (5.68), (5.82) から,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= |\tilde{y}_{n+1}^k - \tilde{x}^{n+1}| \\ &\leq |\tilde{y}_{n+1}^k - x^{n+2}| + |x^{n+2} - x^{n+1}| + |x^{n+1} - \tilde{x}^{n+1}| \\ &\leq \delta |x^{n+1} - x^{n+1}| + \alpha \delta^{n+1} p^k + |x^{n+1} - \tilde{x}^{n+1}| \\ &\leq (1 + \delta) (\varepsilon / \alpha) + \alpha \delta^{n+1} p^k \end{aligned} \tag{5.83}$$

および、

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_{n+1}^k - z^0| &\leq |\tilde{y}_{n+1}^k - x^{n+2}| + |x^{n+2} - x^{n+1}| + \dots + |x^1 - x^0| \\ &\leq \delta |x^{n+1} - \tilde{x}^{n+1}| + \alpha p^k (\delta^{n+1} + \delta^n + \dots + 1) \\ &\leq \delta (\varepsilon / \alpha) + \alpha p^k (1 - \delta^{n+2}) / (1 - \delta) \end{aligned} \tag{5.84}$$

を得る。従って、(5.83), (5.84), (5.63), (5.64), (5.73) から

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_{n+1}^k - z^0| + r_{n+1} &\leq (1 + 2\delta) (\varepsilon / \alpha) + [\alpha p^k / (1 - \delta)] (1 - \delta^{n+2}) \\ &\quad + \alpha \delta^{n+1} p^k \\ &\leq (1 + 2\delta) (\varepsilon / \alpha) + p^k [1 - (k-m) \delta^{n+1} / (k+m)] \\ &\leq p^k + (1 + 2\delta) \varepsilon / \alpha \\ &\leq 2 p^k \end{aligned} \tag{5.85}$$

が成り立つことがわかる。 (5.85) から $\bar{B}[\tilde{y}_{n+1}^k; r_{n+1}] \subset \bar{B}^*$ となることがわかる。従って、帰納法によつて、(5.79) が示された。このとき、(5.82) と同様にして、

$$|x^i - \tilde{x}^i| \leq \varepsilon / \alpha, \quad \forall i \in N \tag{5.86}$$

を得る。一方、(5.54), (5.59) 及び (5.75) から

$$|x^i - x^*| \leq \gamma^i |z^0 - x^*|, \quad \forall i \in N \tag{5.87}$$

が成り立つ。ところで、 x^* は、H の不動点であり、従つて、(5.49) の唯一解であるから、

$$F x^* - F z^0 = u - F z^0$$

となり、定理2・2・(g) 及び (5.52) から、

$$|x^0 - x^*| \leq |u - F z^0| / m = p^k \tag{5.88}$$

が成り立つ。従って、(5.86)～(5.88)から、

$$\begin{aligned} |x^i - x^*| &\leq |x^i - \bar{x}^i| + |\bar{x}^i - x^*| \\ &\leq (\varepsilon/\alpha) + \gamma^i \cdot \gamma^* \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(注5.7) この定理5.4は、そのまま一般のバナッハ空間においても成り立つ⁽⁷⁰⁾⁽⁷¹⁾

5.4 応用例

5.4.1 直流解析への応用

ここでは、非線形抵抗回路の直流解析においてあらわれる典型的な2つのタイプの方程式に対して上の結果を応用する。

[例1] 直流方程式: $f(x) + Ax = \tilde{u}$

3.4.2. 例2において、非線形トランジスタ・ダイオード、線形時間不変抵抗、および独立電圧源、電流源からなる電気回路の直流方程式と(2).

$$Af(x) + Bx = u \quad (5.89)$$

が得られる*. 但し、 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f \in C$; $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$; $u \in \mathbb{R}^d$.

今、Aが正則とすると、

$$f(x) + A^{-1}Bx = A^{-1}u$$

なる方程式が得られる。

$$\hat{A} \triangleq A^{-1}B, \quad \tilde{u} \triangleq A^{-1}u \quad (5.90)$$

とすると

$$f(x) + \hat{A}x = \tilde{u} \quad (5.91)$$

が得られる。(5.91)に対し、定理5.2を適用すると次の結果を得る。

[系5.1] 方程式(5.91)において、 $f \in P_{C^1}$ が

$$f(x) = [f_1(x_1), \dots, f_d(x_d)]^{\text{tr}}$$

で与えられ、

* (3.67)参照。

$$\forall i \in \overline{d}, \exists \varepsilon_i > 0, f'_i(d) \geq \varepsilon_i > 0, \forall d \in \mathbb{R} \quad (5.92)$$

する条件が満足されるとする。このとき。

$$D = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$$

として、 $D + \tilde{A}$ が次の諸条件のうちのいずれか一つを満足するならば、非線形ヤコビ法および非線形SOR法 ($0 < \omega \leq 1$) は、(5.92) の唯一解に大域収束する。

- i) $(D + A) \in SRSD$;
- ii) $(D + A) \in SCSD$;
- iii) $(D + A) \in M$;
- iv) $(D + A) \in D$.

(証明) 定理2・4から、i) \Rightarrow iii), ii) \Rightarrow iii), iii) \Rightarrow iv) が成り立つから、iv) が満足されるとする。このとき、定理2・4から、

$$\exists \hat{D} \in D_+, \hat{D}^{-1}(D + A)\hat{D} \in SRSD$$

が成り立つ。従って、

$$T(x) \triangleq \hat{D}x$$

$$F(x) \triangleq f(x) + \tilde{A}x - \tilde{a}$$

$$\hat{F}(x) \triangleq (T^{-1} \circ F \circ T)(x)$$

}

(5.93)

とすると、

$$\exists m > 0, -\mu_m [-\hat{F}'(x)] \geq m > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (5.94)$$

が成り立つ。一方、方程式： $F(x) = \theta$ を非線形ヤコビ(SOR)法で解くことによって得られる数列 $\{x^k\}$ が、

$$x^{k+1} = Gx^k, k \in \mathbb{Z}_+; x^0: \text{既知}$$

によつて生成されるとし、方程式： $\hat{F}(x) = \theta$ を非線形ヤコビ(SOR)法で解くことによつて生成される数列 $\{\hat{x}^k\}$ が、

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{G}\hat{x}^k, k \in \mathbb{Z}_+; \hat{x}^0 = T^{-1}(x^0) = \hat{D}^{-1}x^0$$

によつて生成されるとすると、 $x^k = T^{-1}\hat{x}^k, k \in \mathbb{Z}_+$, $\hat{G} = T^{-1}GT$ となることに注意すると、定理5・2補題2・14から論述が得られる。(証明終)。

(注5・8) SandbergとWillson,Jr⁽³¹⁾は、 $W=1$ に限る場合について条件i)が成り立てば、非線形ヤコビ法が \mathbb{X}^* へ大域収束することを示している。又、OrtegaとReinhold⁽⁴²⁾は、P-contractionという概念を用いて条件iii)の下に同じ結果を得ている。

(注5・7) ここでは、定理5・2を適用するために、 $f \in P_{C^1}$ ということを仮定したが、(5.91)に限っていえば、この条件は本質でなく、条件(5.92)を次の条件：

$\forall i \in \bar{d}, \exists \varepsilon_i > 0, \lambda(f_i; \alpha, \beta) \geq \varepsilon_i, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$
に置き換えても系5・1の結果はそのまま成り立つ。

[例2] 方程式： $f(x) + Ag(A^{tr}x + y) + Sx = u$

3・4・2. 例1において、電圧制御形非線形抵抗、電流制御形非線形抵抗、線形抵抗および直流電圧源、電流源からなる電気回路において抵抗の特性に結合がない場合には、その直流方程式として、

$$f(x) + Ag(A^{tr}x + y) + Sx = u \quad (5.95)$$

が得られた^{*}。但し、 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; A \in \mathbb{R}^{d \times n}, S \in \mathbb{R}^{d \times d}, y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^d$ 。

さて今、(5.95)を次のようなアルゴリズムで解くことを考える。

第1段階：ピースマン・ラッティフォード法（以下P-R法と略す）

$$\begin{cases} x^{k+\frac{1}{2}} = [\lambda I + F_H]^{-1} [\lambda I - F_V] x^k \\ x^{k+1} = [\lambda I + F_V]^{-1} [\lambda I - F_H] x^{k+\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (5.96)$$

但し、 λ は正の定数である。

$$\begin{cases} F_H(x) \triangleq f(x) + Ag(A^{tr}x + y), \\ F_V(x) \triangleq Sx - u \end{cases} \quad (5.97)$$

第2段階、非線形方程式：

$$[\lambda I + F_H] x^{k+\frac{1}{2}} = [\lambda I - F_V] x^k \quad (5.98)$$

は、非線形SOR法を用いて解く。又、線形方程式：

* (3.65) 参照

$$[\lambda I + F_V] x^{k+1} = [\lambda I - F_H] x^{k+\frac{1}{2}}$$

は、直接計算して

$$x^{k+1} = [\lambda I + S]^{-1} \{ u + [\lambda I - F_H] x^{k+\frac{1}{2}} \} \quad (5.99)$$

で与えろ。

以下においては、(5.96)～(5.99)によって定められる反復法を、P-R-SOR法と呼ぶことにする。

[補題5.6] (Kellogg⁽¹²⁾). 対称 $F_H, F_V \in \mathcal{F}_{q,L}$ に対して、

$$\exists m > 0, \lambda_2(F_H; z, \tilde{z}) \geq m > 0, \forall z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^d, z \neq \tilde{z};$$

$$\lambda_2(F_V; z, \tilde{z}) \geq 0, \forall z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^d, z \neq \tilde{z}$$

が満足されるとすれば、P-R法(5.96)は、 $(F_H + F_V)(z) = \theta$ の唯一解へ大域収束する。

この補題5.6と定理5.3から次の結果が得られる。

[系5.2] 方程式(5.95)において、 $f, g \in P_{d1}$ が

$$f(x) = [f_1(x_1), \dots, f_d(x_d)]^{\text{tr}}$$

$$g(\tilde{x}) = [g_1(\tilde{x}_1), \dots, g_n(\tilde{x}_n)]^{\text{tr}}$$

で与えられるとする。もし

$$\begin{aligned} \exists m > 0, -\mu_2(-[f'(x) + Ag'(A^{\text{tr}}x + y)A^{\text{tr}}]) \geq m > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d \\ -\mu_2(-S) \geq 0 \end{aligned}$$

が満足されるとする。このとき、任意に $\epsilon > 0$ を与え、加速度パラメータ w を定理5.3のようにとるならば、R-R-SOR法は、(5.95)の唯一解 x^* へ大域収束する。

(証明) 仮定より、 $F_V, F_H \in P_{d1} \subset \mathcal{F}_{q,L}$ となり、又

$$-\mu_2(-F'_V(x)) \geq m > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

$$-\mu_2(-F'_H(x)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つ。従って、補題2.8と、 $F'_V(\cdot)$ が対称となることに注意すると定理5.3と補題5.6によつて結論を得る。 (証明終)

(注5.9) P-R法(5.96)によつて定まる x^{k+1} と x^k の対応は、写像

$$Gx = [\lambda I + F_V]^{-1} [\lambda I - F_H] [\lambda I + F_H]^{-1} [\lambda I - F_V] x$$

によつて

$$x^{k+1} = G x^k$$

とおける。一方、 $\hat{T}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$\hat{T}x \triangleq [\lambda I + F_v]x$$

で定めると補題 5・6 の条件が満足されると $\hat{T}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は同相写像となる。さらに、 $\hat{G} = \hat{T}G\hat{T}^{-1}$ とすると、

$$\forall r > 0, \exists \delta(r) \in (0, 1)$$

$$|\hat{G}\zeta - \hat{G}\eta| \leq \delta |\zeta - \eta|, \forall \zeta, \eta \in \overline{B}[\hat{T}x^*; r]$$

が成ることが知られている⁽⁴²⁾。このことと系 2・3 から、第 2 段階において方程式 (5.98) を非線形SOR法を用いて解く場合に、真の解 $x^{k+\frac{1}{2}}$ が求まらなくとも、それに十分近い近似値 $x^{k+\frac{1}{2}}$ (これは有限回の反復によって求まる) を計算しておけば、それによって得られる数列 $\{x^k\}$ は、(5.95) の真の解 x^* に十分近い点へ収束することがわかる。

(注 5.10) 直流方程式 (5.95) において、行列 S は要素が 1, -1, 0 で構成される歪対称行列である*。従って、 S は準正定値となり、系 5・2 の条件を満足する。

以上ここでは、非線形ヤコビ法、非線形SOR法の応用についてのみ示す。たゞ、反復法 (5.71) については、系 5・1, 5・2 のような条件が成り立てばその収束性はもうろん保証されている。

5・4・2 周期系への応用

4・4で考えた周期系：

$$\dot{x} = f(x, u, t) + u(t) \quad (5.100)$$

を考える。但し、 $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f \in C^1$, $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$, $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, $v, u \in C$.

$f(x, u, \cdot)$, $u(\cdot)$, $u(\cdot)$ は同じ周期 W を有するとする。

* (3.63) 参照

さらに、

$$\exists m > 0, \mu[\partial_1 f(x, s, t)] \leq -m < 0, \\ \forall (x, s, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}_+ \quad (5.101)$$

なる条件が成り立つとすると、補題2・8、定理4・8によつて、周期系(5.100)は大域指数安定な周期 ω の周期解を有することがわかつ。

さて今(5.100)を後退オイラー法：

$$y_n = y_{n-1} + h f(y_n, v_n, t_n) + h u_n, n \in \mathbb{N} \quad (5.102)$$

$$v_n \triangleq v(t_n), u_n \triangleq u(t_n), t_n \triangleq n \cdot h, h > 0$$

によつて数値積分することを考える。適当に N を与えて、 $\alpha = \omega/N$ とすると、周期解を求めるためには、

$$\begin{cases} y_1 = y_N + h f(y_1, v_1, t_1) + h u_1 \\ y_n = y_{n-1} + h f(y_n, v_n, t_n) + h u_n, n = 2, \dots, N \end{cases} \quad (5.103)$$

なる方程式の解 $y^* \in \mathbb{R}^{Nd}$ を求めねばよい。上式は $F: \mathbb{R}^{Nd} \rightarrow \mathbb{R}^{Nd}$ および $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{Nd}$ を、

$$F(y) \triangleq \begin{bmatrix} y_1 - h q_1(y_1) - y_N \\ y_2 - h q_2(y_2) - y_1 \\ \vdots \\ y_N - h q_N(y_N) - y_{N-1} \end{bmatrix}, y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, u \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

$$q_n(y_n) \triangleq f(y_n, v_n, t_n), n \in \overline{\mathbb{N}}$$

で定めると、

$$F(y) = \tilde{u}$$

でわかる。今、 \mathbb{R}^{Nd} におけるノルムを、

$$\|y\|_0 = \sum_{n=1}^N \|y_n\|$$

で定める。但し、 $1: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ は(5.101)が成り立つている元を指定されていゝるルムを示す。

このとき、補題2・9と(5.101)と補題2・3、(d'), (c'), (d')'。

$$-\mu_0[-F'(y)] \geq km > 0, \forall y \in \mathbb{R}^{Nd} \quad (5.106)$$

が成り立つ。従つて、補題2・8と定理5・4から次の結果を得る。

[系 5・3] 周期系 (5.106) において条件 (5.101) が成り立つとする。このとき、(5.106) の大域指数安定な周期解の差分近似解 $y^* = (y_1^*, \dots, y_N^*)$ すなわち (5.105) の解は、反復法 (5.71) によって解くことができる。

(証明)

(省略)

5・5 結 言.

この章では、平衡点方程式に対する反復法とその収束性について考察した。また 5・2 では非線形ヤコビ法、および非線形SOR 法を取り挙げ、収束性に関する 2 つの定理を示した。このうち定理 5・3 は、線形方程式に対する SOR 法についてよく知られているオストロフスキーライフの定理をある程度非線形 SOR 法に対しても拡張できることを示している。又、5・4・1 では、抵抗回路の直流解析においてよくみられる 2 つのタイプの直流方程式に応用した。そして、例 1 においては、定理 5・2 の直接的な応用を示し、従来知られている条件よりも緩い条件の下で非線形ヤコビ法および非線形 SOR 法が大域収束性を有していることを示した。又例 2 においては、定理 5・3 の応用を示し、ピースマン・ラッチフォード法と非線形 SOR 法とを組み合せて新しい反復法を提案し、それが実用的な条件の下に大域収束性を有することを示した。

又、5・3 では、Sandberg の反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を提案し、それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを示した。そして、5・4・1 においては、周期系における周期解を求める問題への応用を示した。

これらの反復法は、いずれも比較的緩い条件の下に大域収束性を有するが、ニュートン法のように真の解の近傍では非常に速い収束を示す反復法の初期近似値を与えるのに用いれば、非常に有効である。

第6章 フィードバック系の入出力安定解析^{(70) (92), (93)}

6・1 緒言

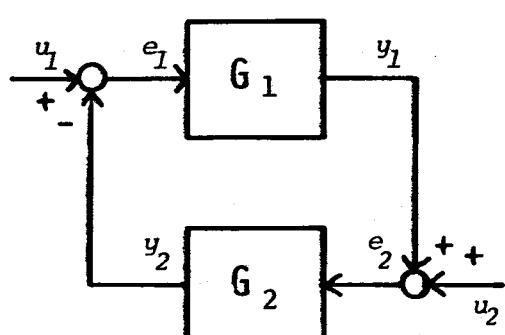
この章では、関数解析的アプローチによってフィードバック系の入出力安定解析を行う。まず6・2において対象とするフィードバック系を明らかにし、ここでいう入出力安定性、すなむち、有界性と連続性について説明する。これらの安定性については、Sandberg^{(43), (51), (52)}, Zames⁽⁵⁰⁾, Willems⁽⁵³⁾、そしてDesoer & Wu⁽⁵⁴⁾らの結果が知られているが、これらは基本的な2つの定理、すなむち、スモールゲイン定理と受動定理に基づいている。ところで前者は一般のノルム空間において適用できるのに對し後者は内積空間においてのみ適用できるものである。

この章の目的は、第2章において一般のノルム空間にまで拡張した受動性、単調性の概念を用いて、受動定理を一般のバナッハ空間へ拡張することである。これについては、6・3および6・4で詳しく検討する。

そして、6・5では、ここで得られた安定定理を数値積分法の安定解析に応用する。

6・2 システムの記述、有界性、連続性

ここでは、図6-1に示されるフィードバック系Sの入出力安定解析を行う。図6-1からシステム方程式は次のように与えられる。



$$\left. \begin{array}{l} e_1 = u_1 - y_2, y_2 = G_2 e_2 \\ e_2 = y_2 + y_1, y_1 = G_1 e_1 \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

今、

$$\left. \begin{array}{l} e \triangleq (e_1, e_2) \\ u \triangleq (u_1, u_2) \\ Ge \triangleq (G_2 e_2, -G_1 e_1) \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

とすると、(6.1), (6.2)から

$$\text{図6-1 フィードバック系 } S \quad (I + G)e = u \quad (6.3)$$

が得られる。

この章を通じて、次の仮定が満足されるものとする。

[仮定 6-1] $\mathbb{X}_{1e}, \mathbb{X}_{2e}$ をノルム空間 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ の拡張空間とする*。

i) 作用素 $G_1: \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}_2, G_2: \mathbb{X}_2 \rightarrow \mathbb{X}_1$ は因果的であり**；

ii) $G_1\theta = \theta, G_2\theta = \theta$ ($G\theta = \theta$)；

iii) $\forall u \in \mathbb{X}_e = (\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)_e, \exists e \in \mathbb{X}_e, (I + G)e = u$ ；

iv) $(I + G)^{-1}: \mathbb{X}_e \rightarrow \mathbb{X}_e$ は因果的である。

但し、積空間 $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ のノルム // は、 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ のノルム //₁, //₂ によつて

$$|x| = |x_1|_1 + |x_2|_2, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{X} \quad (6.4)$$

で与えられる。

(注 6-1) iii) の $G\theta = \theta$ という仮定は、 $G\theta \neq \theta$ であれば、 $\hat{G}e \triangleq G e - G\theta, \hat{u} \triangleq u - G\theta$ とすると、 $\hat{G}\theta = \theta, \hat{G}e = \hat{u}$ となるから、何ら一般性を失うものではない。

(注 6-2) iii) は、 $(I + G)^{-1}: \mathbb{X}_e \rightarrow \mathbb{X}_e$ が存在することを示している。

さてここでいう入出力安定性を定義しよう。

[定義 6-1] 系 S は有界である***。

\Leftrightarrow i) $\forall u \in \mathbb{X}, \exists e(u) \in \mathbb{X}, (I + G)e = u$ ；

ii) $\exists \gamma \geq 0, |e| \leq \gamma |u|, \forall u \in \mathbb{X}$

(注 6-3) 仮定 6-1, 定義 6-1 から、直ちに次の関係：

系 S は有界 $\Leftrightarrow \exists (I + G)^{-1}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}, (I + G)^{-1}$ 有界かつ因果的なる関係が成り立つことがわかる。

[定義 6-2] 系 S は連続である。

\Leftrightarrow i) 系 S は有界であり；

* 定義 2-8 参照。

** 作用素と写像は同じ意味で使つていい。

*** 文献(70), (93) では、有界入力有界出力 (BIBO) という語を用ひつつある。又、文献(92) では安定という語を用ひつつある。

$$ii) \exists \tilde{\epsilon} \geq 0, |e - e'| \leq \tilde{\epsilon} |u - u'|, \forall u, u' \in X.$$

但し, e, e' はそれぞれ u, u' に対する (6.3) の解を示す。

(注 6.3) 通常系 S が連続といふことは、因果的効用素 $(I+G)^{-1}$ が有界かつ連続であることを定義されるが、ここでは、 $(I+G)^{-1}$ が有界かつリップシツツ連続であるときに、系 S が連続と定義している。

6.3 有界性についての結果

まず次の補題を示す。

[補題 6.1]⁽⁵³⁾ 系 S において、 $G_1 \in \mathcal{F}_B$, $G_2 \in \mathcal{F}_L$ とする*. 次の条件:

$$\exists \epsilon > 0, |(I+G_2 G_1)x|_T \geq \epsilon |x|_T, \forall x \in X_{le}, \forall T \in \mathcal{T} \quad (6.5)$$

が成り立つならば、 S は有界である。但し、 $|x|_T \equiv |P_T x|$ とする*。

これから次の定理を得る。

[定理 6.1] 系 S において、 $G_1 \in \mathcal{F}_B$, $G_2 \in \mathcal{F}_L$ とする。次の条件:

$$\exists \epsilon > 0, \lambda(G_2 G_1; x, \theta) \geq -1 + \epsilon > -1, \forall x \in X, x \neq 0 \quad (6.6)$$

が成り立てば、 S は有界である。

(証明) 定理 2.2, (d), (g) と補助定理 2.2 から。

$$\begin{aligned} |(I+G_2 G_1)x|_T &\geq \lambda_T(I+G_2 G_1; x, \theta) |x|_T \\ &= \{1 + \lambda_T(G_2 G_1; x, \theta)\} |x|_T \\ &\geq \{1 + (\epsilon - 1)\} |x|_T \\ &= \epsilon |x|_T, \forall x \in X_{le}, x \neq 0, \forall T \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

を得る。従って、補題 6.1 によつて結論を得る。 (証明終)

(注 6.4). (6.6) は、 $[(1-\epsilon)I+G_2 G_1]$ が効動的であることを示していふ (定義 2.16 参照)。

* G : 有界, G_2 : リップシツツ連続を示す (定義 2.4, 2.5 参照)。

** 定義 2.8 参照。

[系 6・1] (スモールゲイン定理⁽⁵³⁾) 系 S において, $G_1 \in \mathcal{F}_B$, $G_2 \in \mathcal{F}_L$ とする。もし, 次の条件:

$$\gamma(G_2 G_1) \leq \delta < 1 \quad (6.7)$$

が成り立てば, S は有界である。但し, $\gamma(\cdot)$ は, 次式で与えられる。

$$\gamma(G) = \inf \{ a \in \mathbb{R}_+ \mid |Gx| \leq a|x|, x \in \mathbb{X} \}. \quad (6.8)$$

(証明) 定理 2・2, (b) を用いると, (6.7) から (6.6) が得られる ($\varepsilon = 1 - \delta$)。従って, 定理 6・1 によって結論を得る。(証明終)

[系 6・2] (スモールゲイン定理⁽⁵¹⁾) 系 S において, $G_1, G_2 \in \mathcal{F}_B$ とする。もし, 次の条件:

$$\gamma(G_1) \cdot \gamma(G_2) \leq \delta < 1 \quad (6.9)$$

が成り立てば, S は有界である。

(証明) 系 S は等価な系 \hat{S} (図 6-2) を考える。正の数 α を,

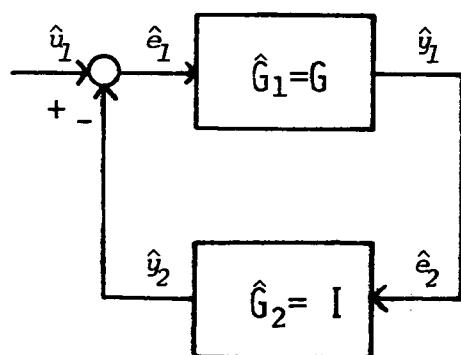
$$\max \{ \alpha^2 \gamma(G_2), \gamma(G_1)/\alpha^2 \} \leq \delta < 1$$

をみたすようにとり, ノルム空間 $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ のノルム $|\cdot|'$ を

$$|x|' \triangleq \alpha |x_1|_1 + (1/\alpha) |x_2|_2, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{X} \quad (6.10)$$

で定める。このとき

$$\begin{aligned} |\hat{G}_2 \hat{G}_1 x|' &= |(G_2 x_2, -G_1 x_1)|' \\ &= \alpha |G_2 x_2|_1 + (1/\alpha) |G_1 x_1|_2 \\ &\leq \alpha \gamma(G_2) |x_2|_2 + [\gamma(G_1)/\alpha] |x_1|_1 \\ &\leq \delta |x|', \quad \forall x \in \mathbb{X} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u = (u_1, u_2) \\ \hat{e}_1 &= e = (e_1, e_2) \\ \hat{e}_2 &= \hat{g}_1 = \hat{g}_2 = (-g_1, g_2) \\ \hat{g}_1 \hat{e}_1 &= Ge = (G_2 e_2, -G_1 e_1) \end{aligned}$$

図 6-2 図 6-1 の系 S と等価な系 \hat{S}

を得る。系 8 によって、 \hat{S} はノルム $||\cdot||'$ の意味で有界となる。一方 (6.4) で定めたノルムと (6.10) で定めたノルムは等価であるから、 \hat{S} 繼って S はノルム $||\cdot||$ の意味で有界となる。
 (証明終)

上に示したことから分かるように、定理 6・1 の条件は、系 6・1 (系 6・2) の条件を直接的に (間接的に) 含むから、比較的緩い条件といえる。(しかし、 $(G_2 G_1)$ の性質を調べる必要がある。一方、システムによつては、 $G_1 G_2$ の性質を別々に調べる方が便利な場合もある。

以下の議論においては、仮定 6・1 に加えて、次の仮定 6・2 が満足されるものとする。

[仮定 6・2] X_1 と X_2 は同じノルム空間である。

[定理 6・2] 系 S において、 G_2 が因果的かつリラクシッテ連続な逆作用素 G_2^{-1} を有するとする。このとき、次の条件：

$$\begin{aligned} \exists m > 0, \forall T (-G_2^{-1}(-T) + G_1; x, \theta) \geq m > 0, \\ \forall x \in X_1, x \neq 0, T \in J \end{aligned} \quad (6.11)$$

が成り立つならば、 S は有界である。

(証明) (6.3) と、 G_1, G_2^{-1} の因果性から、

$$\begin{aligned} & P_T [G_1 - G_2^{-1}(-T)] P_T e_1 \\ &= -P_T U_2 + P_T G_2^{-1}(P_T U_1 - P_T e_1) - P_T G_2^{-1}(-P_T e_1) \end{aligned}$$

を得る。 (6.11) と定理 2・2. (g) から、

$$\begin{aligned} m |e_1|_T &\leq |U_2|_T + \tilde{\gamma}(G_2^{-1}) |U_1|_T, \quad \forall T \in J \quad * \\ \therefore |e_1| &\leq [\tilde{\gamma}(G_2^{-1}) / m] |U_1| + (1/m) |U_2| \end{aligned} \quad (6.12)$$

を得る。 (6.1) と (6.12) から、

$$|e_2| \leq [1 + \tilde{\gamma}(G_2^{-1}) / m] \tilde{\gamma}(G_2^{-1}) |U_1| + [\tilde{\gamma}(G_2^{-1}) / m] |U_2|$$

となる。従って、 S は有界である。
 (証明終)

[系 6・3] $X_1 = X_2$ は内積空間とする。 G_2^{-1} が存在して、因果的かつリラクシッテ連続とする。このとき、次の条件：

* $\tilde{\gamma}(G) \triangleq \inf_{a \in \mathbb{R}^+} \{ a \in \mathbb{R}^+ \mid |Gx - Gy| \leq a|x - y|, \forall x, y \in X_1 \}$.

$$\langle G_1 x, x \rangle_T \geq \epsilon \langle x, x \rangle_T, \forall x \in X_1, T \in \mathcal{T} \quad (6.13)$$

$$\langle G_2 x, x \rangle_T \geq \delta \langle G_2 x, G_2 x \rangle_T, \forall x \in X_1, T \in \mathcal{T} \quad (6.14)$$

$$\epsilon + \delta > 0 \quad (6.15)$$

が成り立つならば、 S は有界である。

(証明) (6.14) カら

$$-\langle G_2^*(-I)y, y \rangle_T \geq \delta \langle y, y \rangle_T, \forall y \in X_1, T \in \mathcal{T} \quad (6.16)$$

を得る。従って、(6.13), (6.16), (6.15) と定理2・2, (f) カら、(6.11) を得る。従って、定理6・2によつて結論を得る。(証明終)

(注6・5) 系6・3の条件のうち、「 G_2^* が存在して因果的かつリフ・シッツ連續である」という部分を「 G_2 が有界」という条件に置き換えても受動定理⁽⁵⁴⁾⁽⁵⁵⁾によつて、 S は有界となる。この系6・3と受動定理の間には直接的な包含関係はない。ところで、Anderson・スモールデイニ定理と受動定理が、その有界性を判別できるクラスが理論的には同じであるという意味において、等価であることを示した⁽⁴⁴⁾。そして、そのような意味では、定理6・1, 6・2, 系6・1, 6・2は等価となる⁽⁹²⁾。

従つてその意味では、系6・3と受動定理は等価である。

6・4 連續性についての結果

連續性については、定理6・2によく似た次の結果が成り立つ。

[定理6・3] 系Sにおいて、 G_2^* が存在して因果的かつリフ・シッツ連續とする。もし、次の条件：

$$\alpha_T(G_1; x, y) \geq \epsilon, \forall x, y \in X_1, x \neq y, T \in \mathcal{T} \quad (6.17)$$

$$\alpha_T(-G_2^*(-I); x, y) \geq \delta, \forall x, y \in X_1, x \neq y, T \in \mathcal{T} \quad (6.18)$$

$$\epsilon + \delta \leq m > 0 \quad (6.19)$$

が成り立てば、 S は連續である。

(証明) S が有界であることは、仮定と、定理2・2, (f) および定理6・2から明らかである。今、 $(e_1, e_2), (e'_1, e'_2)$ をそれぞれ $(u_1, u_2), (u'_1, u'_2)$ に対する (6・3) の解とすると

$$G_1 e_i - G_2^{-1}(-I) (e_i - u_i) = -u_2 \quad (6.20)$$

$$G_1 e'_i - G_2^{-1}(-I) (e'_i - u_i) = -u'_2 + G_2^{-1}(u_i - e'_i) - G_2^{-1}(u'_i - e'_i) \quad (6.21)$$

が成り立つ。今任意に与えられた $u_i \in X_1$ に対して, $\hat{G}_2 : X_1 \rightarrow X_2$ を,

$$\hat{G}_2 x \equiv -G_2^{-1}(-I) (x - u_i) + G_2^{-1}(u_i) \quad (6.22)$$

で定めると, (6.20) ~ (6.22) から,

$$\begin{aligned} P_T(G_1 + \hat{G}_2) P_T e_i - P_T(G_1 + \hat{G}_2) P_T e'_i \\ = P_T(u'_2 - u_i) + P_T[G_2^{-1}(P_T u_i - P_T e'_i) - G_2^{-1}(P_T u'_i - P_T e'_i)] \end{aligned} \quad (6.23)$$

を得る。一方, (6.22) から,

$$\begin{aligned} R_T(\hat{G}_2; x, y) &= R_T(-G_2^{-1}(-I); x - u_i, y - u_i) \geq \delta, \\ &\forall x, y \in X_1, x \neq y, T \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (6.24)$$

であるから, (6.23), (6.24), (6.17) ~ (6.19), 定理2・2, (f) (g) から,

$$\begin{aligned} m | e_i - e'_i |_T &\leq |u_2 - u'_2|_T + \tilde{\gamma}(G_2^{-1}) |u_i - u'_i|_T, \forall T \in \mathcal{T} \\ \therefore |e_i - e'_i| &\leq [\tilde{\gamma}(G_2^{-1})/m] |u_i - u'_i| + (1/m) |u_2 - u'_2| \end{aligned} \quad (6.25)$$

を得る。そして, (6.3) と (6.25) から

$$\begin{aligned} |e_2 - e'_2| &\leq [1 + \tilde{\gamma}(G_2^{-1})/m] \tilde{\gamma}(G_2^{-1}) |u_i - u'_i| \\ &\quad + [\tilde{\gamma}(G_2^{-1})/m] |u_2 - u'_2| \end{aligned}$$

が得られる。従って, S は連続である。

(証明終)

[系6・4] (受動定理⁽⁵⁵⁾) $X_1 = X_2 \sqcup$ ハーベルト空間 H とする。系5において G_2 はリフシツ連続とする。次の条件:

$$\exists m > 0, R_2(G_2; x, y) \geq m, \forall x, y \in H, x \neq y \quad (6.26)$$

$$R_2(G_1; x, y) \geq 0, \forall x, y \in H, x \neq y \quad (6.27)$$

が成り立つならば, S は連続である。

(証明) (6.26), 補助定理2・2, 系3・1 から, G_2 は因果的逆作用素 G_2^* を有する。さらに, (6.26) 定理2・2, (f) から, G_2^{-1} はリフシツ連続となる。一方, 補題2・11 から, $y^i = G_2 x^i, i \in \overline{2}$ とすると,

任意の $y^1, y^2 \in H$, $y^1 \neq y^2$ に対して.

$$\begin{aligned} \alpha_2(-G_2^{-1}(-I); -y^1, -y^2) &= \frac{\langle -G_2^{-1}y^1 + G_2^{-1}y^2, -y^1 + y^2 \rangle}{\langle -y^1 + y^2, -y^1 + y^2 \rangle} \\ &= \frac{\langle x^1 - x^2, G_2x^1 - G_2x^2 \rangle}{\langle G_2x^1 - G_2x^2, G_2x^1 - G_2x^2 \rangle} \end{aligned}$$

となり, $\tilde{\delta}(G_2) < \infty$ (6.26) より.

$\alpha_2(-G_2^{-1}(-I); x, y) \geq m / [\tilde{\delta}(G_2)]^2 > 0$, $\forall x, y \in H, x \neq y$ を得る. 従って, 定理 6・3 によつて, 系 S は連続となる. (証明終)

(注 6・6) 補題 2・11 よりわからようすに. (6.26), (6.27) は.

$$\begin{aligned} \exists m > 0, \quad &\langle P_T[G_2x - G_2y], P_T(x - y) \rangle \geq m / P_T(x - y)_h^2 \\ &\forall x, y \in H, T \in \mathcal{T}, \end{aligned}$$

$\langle P_T[G_1x - G_1y], P_T(x - y) \rangle \geq 0$, $\forall x, y \in H, \forall T \in \mathcal{T}$ と等価である.

[系 6・5] (スモールゲイン定理⁽⁵⁵⁾) 系 S において, $G_1, G_2 \in \mathcal{F}_L$ とする. 次の条件:

$\tilde{\delta}(G_1) \cdot \tilde{\delta}(G_2) \leq \delta < 1$
が成り立てば. 系 S は連続である.

(証明) 系 6・2 の証明と同様にして示されよ.

(証明終)

6・5 応用例

ここでは. 常微分方程式の数値積分法の安定解析に上で得られた結果を応用することを考える.

対象とする微分方程式は. 次式で与えられる.

$$\dot{x} = f(x, t) + \hat{a}, \quad x(0) = x^0 \quad (6.28)$$

但し, $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f \in C^k$; $\hat{a}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\hat{a} \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$.

通常数値積分法の安定解析は. 特性 $f(\cdot, \cdot)$ が安定である場合について行われるが. 以下では次の仮定 6-3 が満足されるものとする.

[仮定 6-3] 系 (6.28) において.

$$i) \quad f(t, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (6.29)$$

$$ii) \quad \exists m > 0, \mu [\partial_1 f(x, t)] \leq -m, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \quad (6.30)$$

が成り立つ。

さてここで、線形n段階公式 (linear n-step method) を例にとって。
線形n段階公式は、

$$y_{k+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y_{k+i} + h \sum_{i=0}^n \beta_i [f(y_{k+i}, t_{k+i}) + u_{k+i}], \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

で与えられる。ここで、 h は刻み幅を示し、 $t_k \triangleq k \cdot h$ 、 $u_k \triangleq \hat{u}(t_k)$ とする。
又、初期値 $y_0 = x^0$ の他に、出発値 y_1, \dots, y_{n-1} はあらかじめ何らかの方法で計算しなければならぬ。

一方 (6.28) の解を $\tilde{x}(\cdot)$ とし、 $x_k \triangleq \tilde{x}(t_k), k \in \mathbb{Z}_+$ とすると、

$$x_{k+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_{k+i} + h \sum_{i=0}^n \beta_i [f(x_{k+i}, t_{k+i}) + u_{k+i}] + \xi_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (6.31)$$

が成り立つ。ここで、 ξ_k は切り捨て誤差 (Truncation error) を示す。

又、実際の計算では丸めの誤差 (round off error) γ_k が生ずるから
実際得られる数値解 \tilde{x}_{k+n} は、

$$\tilde{x}_{k+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_{k+i} + h \sum_{i=0}^n \beta_i [f(\tilde{x}_{k+i}, t_{k+i}) + u_{k+i}] + \gamma_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (6.32)$$

によって与えられる。

$$x \triangleq (x_0, x_1, \dots), \quad \tilde{x} \triangleq (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots)$$

$$u \triangleq (u_0, u_1, \dots), \quad \xi \triangleq (\xi_0, \xi_1, \dots)$$

$$\gamma \triangleq (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$$

$$(\tilde{x}, x)_k \triangleq \gamma x_k + h f(x_k, t_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots) \triangleq \tilde{x}, x$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots) \triangleq \tilde{x}, \tilde{x}$$

とし、それらの多変換を $\hat{x}(z), \hat{\varphi}(z), \hat{u}(z), \hat{\xi}(z), \hat{\gamma}(z), \hat{f}(z), \hat{\psi}(z), \hat{\psi}(z)$ で示し、

$$\hat{x}(z) \triangleq z^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i z^i, \quad \hat{\varphi}(z) \triangleq \sum_{i=0}^n \beta_i z^i$$

$$\hat{\gamma}(z) \triangleq \hat{\alpha}(z) + \gamma \hat{\beta}(z)$$

とすると、(6.31), (6.32) より

$$\hat{\gamma}(z) \hat{\alpha}(z) = \hat{\beta}(z) [\hat{\gamma}(z) + \hat{u}(z)] + \hat{\gamma}(z) + \hat{r}(z) \quad (6.33)$$

$$\hat{\gamma}(z) \hat{u}(z) = \hat{\beta}(z) [\hat{\gamma}(z) + \hat{u}(z)] + \hat{r}(z) + \hat{\gamma}(z) \quad (6.34)$$

を得る。但し、

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(z) &\triangleq \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{n-\ell} [(1+\gamma\beta_n)x_\ell - \beta_n(\psi_\ell + u_\ell)] \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} z^{j-\ell} [(\alpha_j + \gamma\beta_j)x_\ell - \beta_j(\psi_\ell + u_\ell)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(z) &\triangleq \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{n-\ell} [(1+\gamma\beta_n)\hat{x}_\ell - \beta_n(\psi_\ell + u_\ell)] \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} z^{j-\ell} [(\alpha_j + \gamma\beta_j)\hat{x}_\ell - \beta_j(\psi_\ell + u_\ell)] \end{aligned}$$

今、もつとも $\hat{\gamma}(z) = 0$ の根が全て単位円の内部にあるように選び*、線形作用素を、その各変換 $\hat{G}_2(z)$ が、

$$\hat{G}_2(z) = \hat{\beta}(z) / \hat{\gamma}(z) \quad (6.35)$$

で与えられよう。又、 $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, \hat{u} , \hat{r} , \hat{x} をそれぞれ、

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &\triangleq \hat{G}_2^{-1} [\hat{\alpha}(z) / \hat{\gamma}(z)], \quad \tilde{r} \triangleq \hat{G}_2^{-1} [\hat{r}(z) / \hat{\gamma}(z)] \\ \tilde{x} &\triangleq \hat{G}_2^{-1} [\hat{x}(z) / \hat{\gamma}(z)], \quad \tilde{u} \triangleq \hat{G}_2^{-1} [\hat{u}(z) / \hat{\gamma}(z)] \end{aligned} \quad (6.36)$$

で定める。但し、 $\hat{G}_2^{-1}[\cdot]$ は逆各変換を示す。

このとき、(6.33)～(6.36) より、

$$x = G_2 \hat{G}_1 x + G_2 u + \tilde{x} + \tilde{r} \quad (6.37)$$

$$\tilde{x} = G_2 \hat{G}_1 \tilde{x} + G_2 u + \tilde{r} + \tilde{u} \quad (6.38)$$

を得る。

ところで、数値積分法の安定解析とは、「いかなる条件の下に $\{\tilde{x}_n\}$ は有界となるか」、そして $\{\tilde{x}_n\}$ と $\{x_n\}$ との差はどの程度か」という問題である。従って、(6.37), (6.38) で記述されるフーリエバッフル系の連続性について調べる問題である。又、一般に $\{\tilde{x}_n\}$, $\{x_n\}$ は、常に値を有する (0 ではない) ので対象とする空間は L^2 。又はそれと等価な Hilbert 空間である。

* このような $\hat{\gamma}(z) = 0$ は、与えられた公式の絶対安定領域^[95]の中に必ず存在するようになるとねばよい。

今、 $\tilde{G}_1 = -\tilde{G}_1$ とすると、図6-3に示すフードバックモデルSが得られる。従って、定理6-3から次の結果を得る。

[系6-6] 図6-4に示すような適当なマルチプライヤMが存在して、次の4条件を満足するとする。

- i) $\exists (G_2 M^{-1})^\top : l_\infty \rightarrow l_\infty, (G_2 M)^\top$: 因果的かつリップシツツ連續；
- ii) M : リップシツツ連續；
- iii) MG_1 : 因果的。

さらに、

$$\lambda_{\max}(MG_1; x, y) \geq \varepsilon, \quad \forall x, y \in l_\infty, x \neq y,$$

$$\lambda_{\max}(-(G_2 M^{-1})^\top(-I); x, y) \geq \delta, \quad \forall x, y \in l_\infty, x \neq y,$$

$$\varepsilon + \delta \leq m > 0$$

以下の条件が成り立つとする。このとき、 $u, \tilde{u}, r \in l_\infty$ ならば、

- 1) $\tilde{y} \in l_\infty$ ；
- 2) $\exists \tilde{y} > 0, |\tilde{y} - x|_\infty \leq \tilde{y} [|\tilde{x}|_\infty + |r|_\infty + |\tilde{u} - u|_\infty]$

となる。

(証明) $\tilde{y}(z) = 0$ の根が全て単位円の内部にあることと、 $r \in l_\infty$ であることを、 $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{y}, \tilde{r}, \tilde{z} \in l_\infty$ となること ii) と $u \in l_\infty$ から $M(-hu) \in l_\infty$ となることに注意すれば、補助定理2・2と定理6-3から結果を得る。

(証明終)

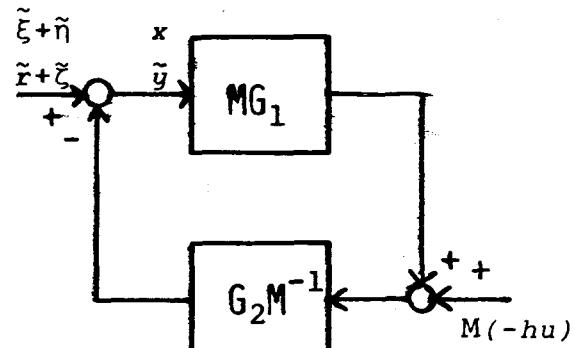
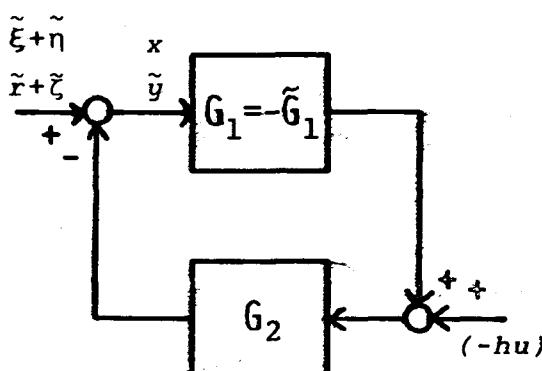


図6-3 フードバックモデルS 図6-4 Sに等価な系SM

系 6.6 の適用例を示そう

[例 1] 前進オイラー法

$$y_{k+1} = y_k + h [f(y_k, t_k) + u_k], \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (6.39)$$

切り捨て誤差 ε が l_∞ に属することを保証するのに次の条件 6-4 を設ける。

[条件 6-4] 系 (6.28) において次の 4 条件が満足される。

- i) $\exists a_1 \geq 0, |u(t)| \leq a_1, \forall t \in \mathbb{R}_+$;
- ii) $\exists a_2 \geq 0, |\dot{u}(t)| \leq a_2, \forall t \in \mathbb{R}_+$;
- iii) $\exists a_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, a_3 \in C, \| \partial_1 f(x, t) \| \leq a_3(|x|), \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$;
- iv) $\exists a_4: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, a_4 \in C, |\partial_2 f(x, t)| \leq a_4(|x|), \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

このとき、仮定 6-3、補題 2-8、条件 6-4、i) と定理 4.6 から
 $\exists K \geq 0, \exists B(|x_0|) \geq 0,$

$$|x(t)| \leq K|x_0| + B \cdot a_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (6.40)$$

が成り立つ。但し、 $x(\cdot)$ は (6.28) の解を示す。

一方テーラーの公式^{(40), (162)}によつて、

$$x(t+h) = x(t) + h \dot{x}(t) + (h^2/2) \int_0^1 \ddot{x}(t+th) dt \quad \forall t, t+h \geq 0 \quad (6.41)$$

を得る。そして、条件 6-4 と (6.40) から

$$\exists M > 0$$

$$|\ddot{x}(s)| \leq \|\partial_1 f[x(s), s]\| \{ |f[x(s), s]| + |u(s)| + |\partial_2 f[x(s), s]| \\ + |\dot{u}(s)| \} \leq M, \quad \forall s \geq 0 \quad (6.42)$$

が成り立つ。 (6.41) と (6.42) から、

$$x_{k+1} = x_k + h f(x_k, t_k) + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| \leq (M/2) h^2$$

を得る。従つて、 $\varepsilon \in l_\infty$ となる。

さて、(6.39) から、

$$\hat{\alpha}(z) = z - 1, \hat{\beta}(z) = 1$$

$$\hat{\gamma}(z) = z - (1-\gamma), \gamma \in (0, 1)$$

とし、マルチプライヤ M を

$$(Mx)_k = x_{k-1}, k \in \mathbb{Z}_+$$

とすると、 $M \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$, $G_2 \triangleq \mathbb{E}[\hat{\beta}(z)/\hat{\gamma}(z)]$ に成り立つ。

$$(G_2 M^{-1})^{-1} = I + (\gamma - 1)M$$

となる。従って、 $(G_2 M^{-1})^{-1}$ は因果的かつリニアリティを保つ。

定理 2-2. (d), (e), (b) の如き。

$$\begin{aligned} \lambda_\infty[-(G_2 M^{-1})^{-1}(-I); x, y] &= 1 + (1-\gamma)\lambda(-M; x, y) \\ &\geq 1 - 1 + \gamma \\ &= \gamma, \quad \forall x, y \in \ell_\infty, x \neq y \end{aligned} \quad (6.43)$$

を得る。一方

$$(M G_i x)_k = -\gamma x_{k-1} + h f(x_{k-1}, t_{k-1})$$

から

$$\lambda(M G_i; x, y) \geq - \left\{ \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \|\gamma I + h \partial_t f(x, t)\| \right\} \quad (6.44)$$

を得る。 $(6.43), (6.44)$ から

$$\gamma - \|\gamma I + h \partial_t f(x, t)\| \geq \tilde{m} > 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \quad (6.45)$$

が成り立てば、系 6-6 の条件が満足される。仮定 6-3 における 1 と 2 が成り立つ場合は、 λ を

$$0 < h \leq \gamma / \|[\partial_t f(x, t)]_{ii}\|, \quad i \in \overline{A}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

にとねば、 (6.45) も、 $\tilde{m} = m h$ に対成り立つ。

又、 $f(x, t) = Kx$, ($K \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\Re \lambda(K) < 0$) である場合に成り立つ。任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\varepsilon > 0$ に成り立つ、ある正則行列 $Q_\varepsilon \in \mathbb{R}^{d \times d}$ が存在し、 $|x| \leq |Q_\varepsilon x|$ とすると、

$$\|\gamma I + h K\| \leq \max_i |\gamma + h \lambda_i(K)| + \varepsilon, \quad i \in \overline{A}$$

が成り立つ⁽⁸⁾。従って、

$$\gamma > \max_i |\gamma + h \lambda_i(K)|, \quad i \in \overline{A} \quad (6.46)$$

であれば、 (6.45) が成り立つ。そしてこのとき、 (6.46) から $\lambda(K)$ が

図6-5に示す円の内部にあれば
よいことがわかる。この(6.46)
は、前進オイラー法が安定である
ための必要条件ともなっていふ。

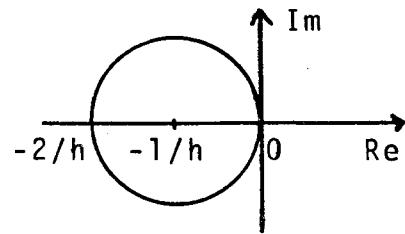


図6-5 前進オイラー法の
絶対安定領域

[例2] 後退オイラー法

$$y_{k+1} = y_k + h f(y_{k+1}, t_{k+1}) + u_{k+1} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (6.47)$$

仮定6-3、条件6-4が満足されれば、例1と同様にして、 $\gamma \in \ell_\infty$ とする。 (6.47) より

$$\lambda(z) = z - 1, \quad \hat{\lambda}(z) = z$$

$$\hat{\gamma}(z) = (1+\gamma)z - 1, \quad \gamma > 0$$

従つて、 $M = I$ とすると、 $G_2 = z^{-1} [\hat{\lambda}(z) / \hat{\gamma}(z)]$ より、

$$(G_2^{-1} x)_k = (1+\gamma)x_0 - x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

となり

$$\pi(-G_2^{-1}(-I); x, y) \geq 1 + \gamma - 1 = \gamma > 0, \quad \forall x, y \in \ell_\infty, \quad z \neq y \quad (6.48)$$

を得る。一方

$$\begin{aligned} \pi(G_1; x, y) &= \pi(-\gamma I - h f(-t), x, y) \\ &\geq -\gamma + hm, \quad \forall x, y \in \ell_\infty, \quad x \neq y \end{aligned} \quad (6.49)$$

となる。 $(6.48), (6.49)$ より

$$\gamma + (-\gamma + hm) = hm > 0$$

となり、系6-6の条件が満足されることがわかる。

又、 $f(x, t) = Kx$ の場合には、 $h > 0$, $\operatorname{Re} \pi_i(K) < 0$ と等価であり、後退オイラー法が A-stable⁽⁹⁵⁾ であるということを示していふ。

6.6 結 言

本章では、関数解析的アプローチによってフーリエバック系の出入力

定解析を行った。そして、有界性については、入閾数を用いた2つの安定定理を得た。この2つの定理は、スモールゲイン定理よりもシャープな結果となつてゐる。又、連続性についても、入閾数を用いた安定定理を得た。この結果は、スモールゲイン定理よりもシャープな結果となつてゐるとともに、ヒルベルト空間においては、従来知られてゐる受動定理と一致している。そして、その意味において、受動定理を一般のバナッハ空間へまで拡張することができた。

第7章 ある種の物理的制約条件を有する系の安定解析⁽⁹⁶⁾

7.1 緒 言

物理系、化学系、生体系などの広範な物理的、生理的現象を表わすダイナミカルシステムにおいては、物理学的、化学的保存法則によつて、その状態方程式が、 $\dot{x}_i = -q_i(x) + f_i(x) + u_i$, $i \in \bar{d}$ で与えられる。これは状態*i*の状態量*x_i*の変化割合が、系外からの流入割合(入力)*u_i*と他の状態から状態*i*への流入割合 a_{ij} との和から、状態*i*から他の状態および系外への流出割合 a_{ii} を差し引いたもので与えられることを示してあり、一般に“流れの連続性”と呼ばれる性質が成り立つていることを示している。さらに、熱交換系、化学反応系やある種のRC回路などにおいてみられるように、i) $q_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ji}(x_j) + a_{0i}(x_0)$, $f_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ej}(x_j)$ 、ii) $a_{ji}(x_j) \geq 0$, $a_{0i}(x_0) \geq 0$, $x_j \geq 0$ なる条件が満足される場合も少なくない。

この章では、上に示した物理的制約条件を有する特殊な非線形ダイナミカルシステムについて、i)解の非負性(初期状態および入力が非負であれば、解軌道も非負であるか)、ii)安定性(漸近安定性、指數安定性、有界入力有界状態安定性)、およびiii)定常解の存在とその安定性の3点について考察している。

又、7.5では、7.2～7.5で得られた結果を化学プロセスおよびある種のRC回路に応用していく。

7.2 解の非負性

対象とするダイナミカルシステムは、次式で与えられる。

$$\dot{x}_i = f_i(x) + u_i, x_i(0) = x_i^0 \geq 0, i \in \bar{d} \quad (7.1)$$

但し、

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^d a_{ej}(x_j), x \in \mathbb{R}^d \quad (7.2)$$

ここで、 $a_{ei}(\cdot)$ は、

$$-a_{ii}(\alpha) = \sum_{j \neq i} a_{ji}(\alpha) + a_{0i}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (7.3)$$

で与えられ, $a_{ij}, a_{0j}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \overline{d}$ は連続で,

$$a_{ij}(0) = a_{0j}(0) = 0, \quad i, j \in \overline{d} \quad (7.4)$$

とし, $u_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ は区分的に連続とする。

この章を通じて, 次の仮定 7-1 が満足されるものとする。

[仮定 7-1] : 系(7.1) の解 $x(\cdot; x^0, u)$ は, 区間 $[0, \infty)$ において唯一存在し, 入力 u および初期値 x^0 に関して連続である。

ベクトルの不等号を次のように定める。

[定義 7-1] $x, y \in \mathbb{R}^d$, $u, v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ を与えろ。

- II) $x \geq (\geq) y \iff x_i \geq (\geq) y_i, \forall i \in \overline{d};$
- III) $x \geq (\geq) y \iff x - y \geq (\geq) 0;$
- IV) $u(\cdot) \geq (\geq) v(\cdot) \iff u(t) \geq (\geq) v(t), \forall t \in \mathbb{R}_+;$
- V) $u(\cdot) \geq (\geq) v(\cdot) \iff (u - v)(\cdot) \geq (\geq) 0.$

[補題 7-1] 系(7.1)において, 次の条件:

$$\forall i, j \in \overline{d}, i \neq j, \forall (a_{ij}; \alpha, 0) \geq 0, \forall \alpha > 0$$

が満足されるとする。このとき,

$$\begin{aligned} &\exists x^0 > 0, \exists \hat{u}(\cdot) \geq 0, \exists \varepsilon > 0, u(\cdot) = \hat{u}(\cdot) + \varepsilon e, \\ &x(\cdot; x^0, u) > 0. \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明) 背理法によって証明する。今、

$$\exists x^0 > 0, \exists \hat{u}(\cdot) \geq 0, \exists \varepsilon > 0, \exists t^* \in \mathbb{R}_+, \exists j \in \overline{d}$$

$$x_j(t^*; x^0, u) \leq 0, \quad u(\cdot) = \hat{u}(\cdot) + \varepsilon e \quad (7.5)$$

が成り立つとする。 $x^0 > 0$ と $x(\cdot; x^0, u)$ の連続性から、

$$\exists h > 0, \quad x(t; x^0, u) > 0, \quad \forall t \in [0, h]$$

となることに注意すると、(7.5) が成り立つためには、ある $t_1 > 0$ と $J_1 \subset \overline{d}$ が存在して、

$$x_j(t_1; x^0, u) = 0, \quad \forall j \in J_1 \quad (7.6)$$

$$x_j(t; x^0, u) > 0, \forall j \in J_1, t \in [0, t_1] \quad (7.7)$$

$$x_i(t; x^0, u) > 0, \forall i \in J_1, t \in [0, t_1] \quad (7.8)$$

が成り立たなければならぬ。このとき (7.6) ~ (7.8) と仮定から

$$f_j[x(t_1; x^0, u)] \geq 0, \forall j \in J,$$

を得る。上式と $f_j(\cdot), x(\cdot; x^0, u)$ の連続性と $\alpha(\cdot) \geq 0, \varepsilon > 0$ であるこ^トから、

$$\exists h' > 0, \forall j \in J_1, \forall t \in (t_1 - h', t_1]$$

$$f_j[x(t; x^0, u)] + u(t+t_0) > 0 \quad (7.9)$$

を得る。一方、十分小さな $h'' > 0$ に対して、

$$x_j(t_1; x^0, u) - x_j(t; x^0, u)$$

$$= (t_1 - t) \{ f_j[x(t; x^0, u)] + u(t+t_0) \} + o(t_1 - t),$$

$$\forall j \in J_1, t \in [t_1 - h'', t_1]$$

が成り立つから、上式と (7.9) から、

$$\exists j \in J_1, \exists t \in [0, t_1], x_j(t; x^0, u) < 0$$

となる。上式は (7.7) に矛盾する。

(証明終)

この補題 7.1 を用いて次の定理を得る。

[定理 7.1] 系 (7.1) を考える。次の 5 条件は等価である。

- i) $\forall i, j \in I, i \neq j, \alpha(A_{ij}; \alpha, 0) \geq 0, \forall \alpha > 0;$
- ii) $\forall x^0 \geq 0, \forall u(\cdot) \geq 0, x(\cdot; x^0, u) \geq 0;$
- iii) $\forall u(\cdot) \geq 0, x(\cdot; 0, u) \geq 0;$
- iv) $\forall x^0 \geq 0, x(\cdot; x^0, 0) \geq 0;$
- v) $\forall x^0 \geq 0, x(\cdot; x^0, 0) \geq 0.$

(証明) i) \Rightarrow ii) 補題 7.1 と仮定 7.1 から明らか。

ii) \Rightarrow iii) 明らか

iii) \Rightarrow iv) 任意に $x^0 \geq 0$ を与える。 $\hat{x} > 0$ を

$$x_i^0 - \hat{x} f_i(\alpha x^0) \geq 0, \forall i \in I, \alpha \in [0, 1]$$

とするように選ぶ*。そして

* このような \hat{x} の存在は、 $f(\alpha) = \alpha$ と $f(\cdot)$ の連続性から明らか。

$$U(t) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} (1/\hat{x})x^0 - f[(t/\hat{x})x^0] \geq \theta, & t \in [0, \hat{x}] \\ \theta, & t \geq \hat{x} \end{cases}$$

とすると、(7.1)の解の一意性から

$$x(\hat{x}; \theta, u) = x^0$$

となる。そこで、iii)から

$$x(\cdot; \theta, u) \geq \theta$$

となる。従って、(7.1)が時間不変系であることを考慮すると vi)を得る。
iv) \Rightarrow v). 明らか。

v) \Rightarrow i). 背理法によつて証明する。今

$$\exists k, l \in \bar{I}, k \neq l, \exists \alpha > 0, Q_{kl}(\alpha) < 0$$

とする。 $x^0 = \alpha e^l$ とすとと、十分小さな $t > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} x_k(t; x^0, \theta) &= x_k^0 + t f_k(\alpha e^l) + o(t) \\ &= t \cdot Q_{kl}(\alpha) + o(t) < 0 \end{aligned}$$

となる。これは、v)に矛盾する。

(注 7.1) $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^{d \times d}$ の場合について、Bellman⁽⁵⁸⁾によつて、定理 7.1 は既に証明されてゐる。

定理 7.1 から、解の単調性に関する次の結果が直ちに得られる。

[系 7.1] 系 (7.1) を考えよ。次の 4 条件は等価である。

i) $\forall i, j \in \bar{I}, i \neq j, \pi(A_{ij}; \alpha, \beta) \geq 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d, \alpha \neq \beta;$

ii) $\forall x^0, \tilde{x}^0 \geq \theta : x^0 \geq \tilde{x}^0, \forall u(\cdot), \bar{u}(\cdot) \geq \theta ; u(\cdot) \geq \bar{u}(\cdot),$
 $x(\cdot; x^0, u) \geq x(\cdot; \tilde{x}^0, \bar{u});$

iii) $\forall x^0, \tilde{x}^0 \geq \theta : x^0 \geq \tilde{x}^0, \forall u(\cdot) \geq \theta, x(\cdot; x^0, u) \geq x(\cdot; \tilde{x}^0, u);$

iv) $\forall x^0 \geq \theta, \forall u(\cdot), \bar{u}(\cdot) \geq \theta ; u(\cdot) \geq \bar{u}(\cdot),$
 $x(\cdot; x^0, u) \geq x(\cdot; x^0, \bar{u}).$

(証明)

(省略)

7.3 安定性

ここでは、系(7.1)の漸近安定性、指數安定性、および有界入力有界状態安定性について考察する。

まず次の定義から示す。

[定義7.2] 行列 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ が分解可能

$\Leftrightarrow \exists \tilde{\mathcal{J}} \subset \bar{d}, \forall i \in \mathcal{J}, \forall j \in \tilde{\mathcal{J}}, \forall k \notin \tilde{\mathcal{J}}, a_{jk} = 0$,
すなはち、適当な順列行列 P が存在して、

$$PAP^{\text{tr}} = \begin{bmatrix} A_{11} & \odot \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

となる。但し、 $A_{11}, \tilde{\mathcal{J}} \subset \bar{d}$ は正方行列である。

A が分解不能 $\Leftrightarrow A$ が分解可能でない。すなはち、

$$\forall J \subset \bar{d}, \exists i \in J, \exists k \notin J, a_{ik} \neq 0$$

(注7.2) 普通 A が分解可能であることを A が可約 (reducible) であるといい、 A が分解不能であることを A が既約 (irreducible) であるといふが、ここでは、分解可能、分解不能という語の方が内容がらして適切と思われる所以この語を用ひている。

以下においては、仮定7-1と共に、次の仮定7-2が満足されるものとする。

[仮定7-2] 系(7.1)において、

$$\forall i, j \in \bar{d}, i \neq j, \lambda(a_{ij}; \alpha, 0) \geq 0, \forall \alpha > 0;$$

$$\forall i \in \bar{d}, \lambda(a_{ii}; \alpha, 0) \geq 0, \forall \alpha > 0.$$

が成り立つ。

仮定7-2が満足されるように系においては、主に興味があるのは、

$\chi(\cdot; z^*, u) \geq \theta$ の場合である。従って、ここでは、 $z^* \geq \theta, u(\cdot) \geq \theta$ の場合のみについて考察する。

まず漸近安定性について考える。

[定義 7・3] 系 (7.1) において, $u(\cdot) \equiv 0$ とする。

M が系 (7.1) の不变集合である。

$$\Leftrightarrow \forall x^0 \in M, x(t; x^0, \theta) \in M, \forall t \geq 0.$$

[補題 7・2] (Lasall^{(38), (47)}) 系 (7.1) において, $u(\cdot) \equiv 0$ とする。ある連続な偏微分を有するリアプノフ関数 $V: \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ が存在して,

i) $V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^d$;

ii) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

iii) $V'_{(7.1)}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^d$

を満足するとする。今, $E \triangleq \{x \geq \theta \mid V'_{(7.1)}(x) = \theta\}$ とし, M を E 内の最大不变集合とする。このとき, 系 (7.1) の有界な解は M へ漸近する。

(注 7・3) 通常 Lasall^o の定理として知られているものは, $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ が, 条件 i)~iii) (\mathbb{R}_+^d を \mathbb{R}^d にガベにもの) をみたす場合について示されているが, 全く同様な証明によつて, 補題 7・1 を得ることができ。

[定理 7・2] 系 (7.1) において $u(\cdot) \equiv 0$ とする。次の 2 条件:

i) $\exists j_1 \in \bar{A}, a_{0j_1} \in CP$

但し, $CP \triangleq \{\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \varphi \in C, \varphi(a) > 0, a > 0, \varphi(0) = 0\}$;

ii) $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$: 分解不能

恒し,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 1 & i \neq j, a_{ij} \in CP \\ 0 & i \neq j, a_{ij} \notin CP \end{cases}$$

が満足されるならば, 系 (7.1) の零解は大域漸近安定である。

(証明) $V(x) \triangleq e^{\alpha t} x$

とする。このとき, (7.3) と仮定 7-2 もう。

$$\begin{aligned} V'_{(7.1)}(x) &= \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x_i) \\ &= - \sum_{j=1}^d a_{0j}(x_j) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^d \end{aligned} \quad (7.10)$$

となり、仮定 7-2, 定理 2・1 もう

$$|x(t; x^0, \theta)|_1 = V[x(t; x^0, \theta)] \leq V(x^0) = |x^0|_1, \quad \forall t \geq 0$$

が成り立つ。従って、任意の $x^* \geq \theta$ に対し、解 $x(\cdot; x^*, \theta)$ は有界となる。今、 $E \triangleq \{x \geq \theta \mid V_{(A, b)}(x) = 0\}$ とし、 M を E 内の最大不変集合とする。もし、 $M = \{\theta\}$ ならば、補題 7-2 によって結論が得られる。従って $M = \{\theta\}$ を示す。(7.10) と仮定から $E \subset \{x \geq \theta \mid x_{ii} = 0\}$ となる。任意に $x^* \in M \subset E$ を固定する。このとき、 $x(\cdot; x^*, \theta) \geq \theta$ であることに注意すると、 M が E 内の不変集合だから、

$$0 = \dot{x}_{ii}(0) = \sum_{j=1}^d a_{iji}(x_i)$$

となる*。一方、 B が分解不能だから、ある $j_1 \neq j_2$ に対し、 $a_{ij_1}, a_{ij_2} \in CP$ である。従って、仮定 7-2、(7.4) と $x_{j_1}^* = 0$ とに注意すると $x_{j_2}^* = 0$ でなければならぬ。よって、 $M \subset \{x \geq \theta \mid x_j = 0, j \in J_2\}$ で、 $J_2 \triangleq \{j_1\} + \{j_2\}$ となる。同様に、

$$0 = \dot{x}_j(0) = \sum_{k=1}^d a_{jk}(x_k^*), j \in J_2$$

だから、ある $j_3 \notin J_2$ に対し、 $x_{j_3}^* = 0$ となる。従って、 $M \subset \{x \geq \theta \mid x_j = 0, j \in J_3\}$ で、 $J_3 \triangleq J_2 + \{j_3\}$ となる。以下これを繰り返して、 $M \subset \{x \geq \theta \mid x_j = 0, j \in J_d = \bar{J}\} = \{\theta\}$ となる。
(証明終)

次に指數安定性について考える。

[定理 7-3] 系 (7.1) において、 $u(\cdot) \equiv \theta$ とする。次の 4 条件：

- i) $\exists c > 0, \forall j \in \bar{J}, \alpha(-a_{ij}; \alpha, 0) \leq c, \forall \alpha > 0;$
- ii) $\forall i, j \in \bar{J}, i \neq j, \exists b_{ij} \geq 0, \alpha(a_{ij}; \alpha, 0) \geq b_{ij}, \forall \alpha > 0;$
- iii) $B = (b_{ij})$ は分解不能
- iv) $\exists j_1 \in \bar{J}, \exists \varepsilon_1 > 0, \alpha(a_{0j_1}; \alpha, 0) \geq \varepsilon_1, \forall \alpha > 0$

が満足されれば、系 (7.1) の零解は大域指數安定である。

(証明) もし、

$$\begin{aligned} &\exists \{x_j > 0, j \in \bar{J}\}, \exists \varepsilon > 0 \\ &x_j \alpha(a_{ij}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} x_i \alpha(a_{ij}; \alpha, 0) \leq -\varepsilon, \\ &\forall j \in \bar{J}, \forall \alpha > 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

* $x(\cdot) \triangleq x(\cdot; x^*, \theta)$ (以下同様に略す)。

が成り立つならば、

$$V(x) \equiv \sum_{j=1}^d \gamma_j x_j, \quad x \in \mathbb{R}_+^d$$

とすると、

$$V(x) \geq \hat{\delta} \|x\|_1, \quad x \in \mathbb{R}_+^d, \quad \hat{\delta} \equiv \min_{j \in \bar{J}} \gamma_j$$

および

$$\begin{aligned} V_{(7.11)}(x) &= \sum_{i,j=1}^d \gamma_i Q_{ij}(x_j) \\ &\leq -\hat{\varepsilon} \sum_{j=1}^d x_j \\ &\leq -(\hat{\varepsilon}/\hat{\delta}) V(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^d \end{aligned}$$

を得る。従って、 $x(\cdot; z^*, \theta) \geq 0$ であることに注意すると、上式から、(7.1) の零解は大域指数安定となることがわかる。

以下 (7.11) を示す。

仮定 7-2, (7.3) と条件 iv) から、

$$\begin{aligned} \alpha(Q_{ii}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \alpha(Q_{ij}; \alpha, 0) &\leq -\varepsilon_1, \\ \text{if } \alpha > 0, \quad i \in J_1 &\equiv f_{ji}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

および、

$$\begin{aligned} \alpha(Q_{ii}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \alpha(Q_{ij}; \alpha, 0) &\leq 0, \\ \text{if } \alpha > 0, \quad i \in \bar{J} - J_1 & \end{aligned} \quad (7.13)$$

が成り立つ。今、 $\gamma'_i > 0, j \in \bar{J}$ を、

$$\gamma'_i \equiv \begin{cases} 1 - \varepsilon_1/2c, & j \in J_1 \\ 1, & j \notin J_1 \end{cases}$$

とすると、条件 i), ii), (7.12) と (7.13) も

$$\begin{aligned} \gamma'_i \alpha(Q_{ii}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \gamma'_i \alpha(Q_{ij}; \alpha, 0) & \\ \leq -\varepsilon_1 - (1 - \gamma'_i) \alpha(Q_{ii}; \alpha, 0) & \\ \leq -\varepsilon_1/2, \quad \text{if } \alpha > 0, \quad i \in J_1 & \end{aligned} \quad (7.14)$$

および

$$\begin{aligned} \gamma'_i \alpha(Q_{ii}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \gamma'_i \alpha(Q_{ij}; \alpha, 0) & \\ \leq -\sum_{i \neq j} (1 - \gamma'_i) \alpha(Q_{ij}; \alpha, 0) & \\ \leq -\sum_{i \in J_1} (1 - \gamma'_i) b_{ij}, \quad \text{if } \alpha > 0, \quad i \in \bar{J} - J_1 & \end{aligned} \quad (7.15)$$

を得る。一方、条件iii)から、ある $k_1 \in \bar{J}$, $k_1 \cap J_1 = \emptyset$ が存在して、任意の $j \in k_1$ に対して適当な $i \in J_1$ が存在して、 $b_{ij} > 0$ となる。従って、

$$J_2 = J_1 + k_1$$

$$\varepsilon_2 \triangleq \varepsilon_1 b / 2c \leq \varepsilon_1 / 2, b \triangleq \min \{ b_{ij} > 0, i, j \in \bar{J}, i \neq j \},$$

$$a_{ij}'(\alpha) \triangleq \gamma_i' a_{ij}(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}, i, j \in \bar{J}$$

とすると、(7.14), (7.15) やう。

$$\pi(a_{ij}'; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \pi(a_{ij}'; \alpha, 0) \leq -\varepsilon_2, \quad \alpha > 0, \quad j \in J_2$$

$$\pi(a_{ij}'; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \pi(a_{ij}'; \alpha, 0) \leq 0, \quad \alpha > 0, \quad j \in \bar{J} - J_2$$

を得る。以上上の操作をくり返すと、ある $m < d$ に対して、 $J_m = \bar{J}$ となり

$$\pi(a_{ij}^{m-1}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \pi(a_{ij}^{m-1}; \alpha, 0) \leq -\varepsilon_m, \quad \alpha > 0, \quad j \in \bar{J}$$

を得る。従って、

$$\gamma_j \triangleq \prod_{k=1}^{m-1} \gamma_j^k, \quad j \in \bar{J}$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_m$$

とおくと、(7.11) が成り立つことがわかる。

(証明終)

(注7.4) もし、仮定7-2、および定理7・3の条件i)~iv)が、任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ に対して成り立つならば、全く同様に(7.11)が任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ に対して成り立つことが示される。そして、この場合、 $V(x) \triangleq \sum_{j=1}^d \gamma_j |x_j|$ をおくことによって、(7.1)の零解が通常の意味で大域指數安定となることが示される。

最後に有界入力有界状態安定について示す。

[定理7・4] 系(7.1)において、定理7・3の条件i)~iv)が全て満足されならば、(7.1)は有界入力有界状態安定である。

(証明) 任意に $x^0 \geq 0$, $u(\cdot) \geq 0$ を与えよ。 (7.11) に注意して、

$$\psi(t) \triangleq \sum_{j=1}^d \gamma_j x_j(t; x^0, u), \quad t \geq 0$$

とおくと、

$$\psi(0) = \sum_{j=1}^d \gamma_j x_j^0$$

$$\dot{\psi}(t) \leq -(\hat{\varepsilon}/\delta) \psi(t) + \delta \|u\|_\infty, \quad \delta = \max \{ \gamma_j, j \in \bar{J} \}.$$

を得る。従つて、比較定理(補題4-4)によつて、

$$|\varphi(t)| \leq \exp(-mt) |\varphi(0)| + (\delta/m) \|u\|_\infty, \quad \forall t \geq 0$$

が成り立つ。但し、 $m = \hat{\epsilon}/\delta$

上式から、 $x(\cdot; x^0, u) \geq 0$ に注意すると、

$$|x(t; x^0, u)|_1 \leq (\hat{\delta}/\delta) |x^0|_1 + \hat{\epsilon} \delta \|u\|_\infty$$

を得る。

(証明終)

7.4 定常解の存在と安定性

この節では、入力および系外への流出がない場合、すなはち、次の仮定7-3が満足される場合について、定常解の存在およびその安定性について考える。

[仮定7-3] 系(7.1)において、次の2条件が成り立つ。

- i) $u(\cdot) \equiv 0$;
- ii) $a_{ij}(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \geq 0, \quad i \in \bar{d}$.

仮定7-3, ii), (7.3) と (7.4) の

$$-a_{ij}(\alpha) = \sum_{l \neq j} a_{lj}(\alpha), \quad \forall \alpha \geq 0, \quad j \in \bar{d} \quad (7.16)$$

が成り立つ。今、系(7.1)において、

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ e^{tr} & 1 \end{bmatrix} \chi, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^s, \quad s \leq d-1 \quad (7.17)$$

なる変換を行うと、(7.16) らう。

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d a_{ij}(x_j) \right) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

となり。

$$\gamma(t) \equiv \gamma(0) = \sum_{i=1}^d x_i^0$$

となる。従つて、

$$\dot{\gamma} \equiv \sum_{i=1}^d \dot{x}_i^0 \quad (7.18)$$

$$q_i(\bar{s}) \triangleq \sum_{j=1}^s a_{ij}(\bar{s}_j) + a_{in}(k - e^{tr}\bar{s}), \quad \bar{s} \in \mathbb{R}^s, i \in \bar{s} \quad (7.19)$$

とすると、(7.1)～(7.19)から、

$$\dot{s}_i = q_i(\bar{s}), \quad s_i(0) = \bar{s}_i^0 = x_i^0, \quad i \in \bar{s} \quad (7.20)$$

を得る。さて議論の都合上、ある $\tilde{m} > 0$ を与えて、 $\tilde{a}_{ij}: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \bar{s}$, $i \neq j$ を、

$$\tilde{a}_{ij}(\alpha) \triangleq \begin{cases} a_{ij}(\alpha), & \alpha \geq 0, \\ \tilde{m}\alpha, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

で定め、 $\tilde{a}_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \bar{s}$ を

$$\tilde{a}_{ij}(\alpha) \triangleq \sum_{l=1, l \neq j}^d \tilde{a}_{lj}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

で定める。そして、 $\tilde{q}_i: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \bar{s}$ を、

$$\tilde{q}_i(s) \triangleq \sum_{j=1}^s \tilde{a}_{ij}(s_j) + \tilde{a}_{in}(k - e^{tr}s), \quad s \in \mathbb{R}^s \quad (7.22)$$

で与える。このとき次のことが成り立つ。

[補助定理 7-1] 今、 $\tilde{q}(s^*) = \theta$ なる $s^* \in \mathbb{R}^s$ が存在し、次の系：

$$\dot{s} = \tilde{q}_i(s), \quad s(0) = s^* \triangleq \bar{s}^* \quad (7.$$

の解が区間 $[0, \infty)$ で唯一存在するとする。さらには、

$$\exists m > 0, \quad |s(t; s^*) - s^*| \leq \exp(-mt) |s^* - s^*|, \quad t \geq 0 \quad (7.23)$$

が満足されれば、

$$i) \quad s^* \geq \theta;$$

$$ii) \quad f(x^*) = \theta, \quad x^* \triangleq [(s^*)^{tr}, k - e^{tr}s^*]^{tr} \geq \theta;$$

$$iii) \quad \exists K > 0, \quad |x(t; x^*, \theta) - x^*| \leq K \exp(-mt) |x^* - x^*|, \quad t \geq 0$$

が成り立つ。

(証明) \tilde{q} の定め方と、仮定 7-1, 7-2, および定理 7-1 から、

$$\begin{aligned} s_i(t; s^*) &= \dot{s}_i(t; \bar{s}^*) \\ &= \tilde{a}_{ii}(t; x^*, \theta) \\ &\geq 0, \quad \forall i \in \bar{s}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

を得る。従って、(7.23) と (7.24) から i) を得る。そして、仮定 7-3

と(7.17)から $f(x^*) = \theta$ となることがわかる。さらに、 \mathbb{R}^d におけるルムの等価性、(7.23)、(7.24)から、ある $K_1, K_2 > 0$ に対し、

$$\begin{aligned} & |x(t; x^*, \theta) - x^*| \\ & \leq K_1 \sum_{i=1}^d |x_i(t; x^*, \theta) - x_i^*| \\ & = K_1 \left\{ \sum_{i=1}^d |\zeta_i(t; s^*) - \zeta_i^*| + |e^{ts^*} \zeta_i(t; s^*) - e^{ts^*} \zeta_i^*| \right\} \\ & \leq 2K_1 \sum_{i=1}^d |\zeta_i(t; s^*) - \zeta_i^*| \\ & \leq 2K_1 \cdot K_2 |\zeta(t; s^*) - \zeta^*| \\ & \leq 2K_1 \cdot K_2 \exp(-mt) |\zeta^* - \zeta^*|, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{7.25}$$

を得る。同様に、 $K_3, K_4 > 0$ に対し、

$$\begin{aligned} |\zeta^* - \zeta^*| & \leq K_3 \sum_{i=1}^d |\zeta_i^* - \zeta_i^*| \\ & = K_3 \sum_{i=1}^d |x_i^* - x_i^*| \\ & \leq K_3 \sum_{i=1}^d |x_i^* - x_i^*| \\ & \leq K_3 \cdot K_4 |x^* - x^*| \end{aligned} \tag{7.26}$$

が成り立つ。(7.25)と(7.26)より、iii)を得る。そして、ii)と $x(\cdot; x^*, \theta) \geq \theta$ や $x^* \geq \theta$ から、 $x^* \geq \theta$ となる。

(証明終)

[定理7.5] 系(7.1)において、次の条件：

- i) $\forall i, j \in \bar{d}, i \neq j, \pi(a_{ij}; \alpha, \beta) \geq 0, \forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha \neq \beta;$
- ii) $\exists m > 0, \forall j \in \bar{s}, s = d-1,$

$$\pi(a_{nj}; \alpha, \beta) \geq m > 0, \forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha \neq \beta$$

が満足されるとする。このとき、任意の $x^* \geq \theta$ に対し、

i) $f(x^*) = \theta$;

ii) $\sum_{i=1}^d x_i^* = \sum_{i=1}^d x_i^* ;$

iii) $|x(t; x^*, \theta) - x^*| \leq K \cdot \exp(-mt) |x^* - x^*|, K > 0, \forall t \geq 0$
が成り立つようなら $x^*(x^*)$ が一意に定まる。

(証明) $a_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を(7.21)、(7.22)のように定める ($\tilde{m} = m$) と、

$$\pi(\tilde{a}_{ij}; \alpha, \beta) \geq 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta, i, j \in \bar{d}, i \neq j \tag{7.27}$$

とする。

$$\begin{aligned} & \lambda(\tilde{a}_{ij}; \alpha, \beta) + \sum_{j=1}^s n_j \lambda(\tilde{a}_{ij}; \alpha, \beta) \\ & = \lambda(\tilde{a}_{nj}; \alpha, \beta) \\ & \leq -m < 0, \quad \forall \alpha, \beta \in R, \quad \alpha \neq \beta, \quad j \in \overline{s} \end{aligned} \quad (7.28)$$

が成り立つ。今 $\mu_1, \mu_2: R^d \rightarrow R_+$ を (2.28) で定めると、定理 2・2・(e), (f), (7.27), (7.28) の、補題 2・5 と同様にして、

$$\lambda(-\hat{g}; x, y) \geq m, \quad \forall x, y \in R^d, \quad x \neq y \quad (7.29)$$

および

$$\lambda(\hat{g}; x, y) \leq -m, \quad \forall x, y \in R^d, \quad x \neq y \quad (7.30)$$

を得る。 (7.29) と定理 3・2 の、 $\hat{g}(s) = 0$ なる $s \in R^d$ が唯一存在する。又、 (7.30) と定理 4・7 より、系： $s = g(s)$, $g'(s) = s^*$ の一意解が区間 $[0, \infty)$ で存在することがわかる。さらに、 (7.30) と定理 4・4 より、 (7.23) が成り立つことがわかる。従って、補助定理 7・1 りより結論を得る。
(証明終)

7・5 応用例

ここでは、上で得られた結果に対する 2 つの応用例を示す。

[例 1] 化学プロセスにおける応用例

図 7-1 に示す凝縮器、蒸気空間（塔）、およびリボイラーハウス構

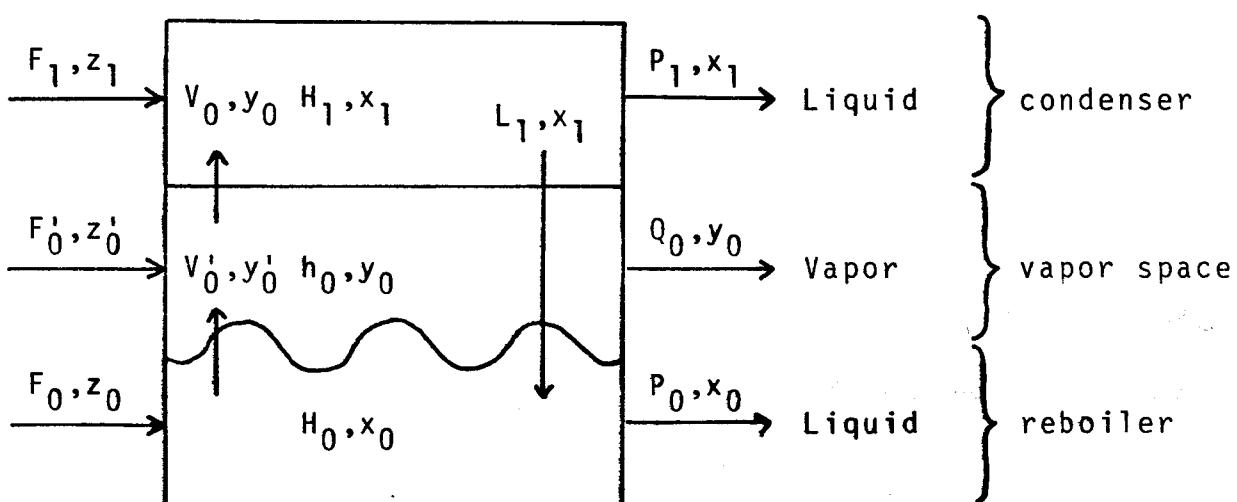


図 7-1 構段式蒸留塔のモデル

段式蒸留塔を考える。図中, $F_i (F'_i)$, $i = 0, 1$ は成分 $x_i (x'_i)$ の液体(気体)供給率を, $V_0 (V'_0)$ は、成分 $y_0 (y'_0)$ の蒸気流量率を, $H_i (h_i)$ $i = 0, 1$ は、 i 段における液体(気体)のホールドアップ割合を, P_i , $i = 0, 1$ は、 i 段における成分 x_i の回収率を, $Q_{0,1}$ は、成分 y_0 の蒸気回収率を, L_i は、成分 x_i の 1 段目からの液体流量率を示している。

このとき、各段における質量の平衡から。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (H_0 x_0) &= -V'_0 y'_0 - P_0 x_0 + L_1 x_1 + F_0 z_0 \\ \frac{d}{dt} (h_0 y_0) &= V'_0 y'_0 - (V_0 + Q_0) y_0 + F_0' z_0' \\ \frac{d}{dt} (H_1 x_1) &= V_0 y_0 - (L_1 + P_1) x_1 + F_1 z_1\end{aligned}\tag{7.31}$$

が成り立つ⁽²⁾⁽³⁾。

一方、気相-液相平衡特性を $y'_0 = f_0 (x^0, p_0)$ で与えろ。但し、 p_0 は段上の圧力を示している。今

$$[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3]^{\text{tr}} \triangleq [H_0 x_0, h_0 y_0, H_1 x_1]^{\text{tr}}$$

とすると、(7.31) は、

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -V'_0 f_0 (H_0^{-1} \dot{x}_1, p_0) - P_0 H_0^{-1} \dot{x}_1 + L_1 H_1^{-1} \dot{x}_3 + F_0 z_0 \\ \dot{x}_2 &= V'_0 f_0 (H_0^{-1} \dot{x}_1, p_0) - (V_0 + Q_0) h_0^{-1} \dot{x}_2 + F_0' z_0' \\ \dot{x}_3 &= V_0 h_0^{-1} \dot{x}_2 - (L_1 + P_1) H_1^{-1} \dot{x}_3 + F_1 z_1\end{aligned}\tag{7.32}$$

を得る。従って、 p_0 を固定して、

$$\begin{aligned}Q_{21} (\dot{x}_1) &\triangleq V'_0 f_0 (H_0^{-1} \dot{x}_1, p_0) - V'_0 f_0 (0, p_0), Q_{31} (\dot{x}_1) \equiv 0, Q_{01} (\dot{x}_1) \triangleq P_0 H_1^{-1} \dot{x}_3 \\ Q_{12} (\dot{x}_2) &\equiv 0, Q_{32} (\dot{x}_2) \triangleq V_0 h_0^{-1} \dot{x}_2, Q_{02} (\dot{x}_2) \triangleq Q_0 h_0^{-1} \dot{x}_2 \\ Q_{13} (\dot{x}_3) &\triangleq L_1 H_1^{-1} \dot{x}_3, Q_{23} (\dot{x}_3) \equiv 0, Q_{03} (\dot{x}_3) \triangleq P_1 H_1^{-1} \dot{x}_3 \\ -Q_{ii} (\dot{x}_i) &\triangleq \sum_{j=1, j \neq i}^3 Q_{ji} (\dot{x}_i) + Q_{0i} (\dot{x}_i), i \in \overline{3}\end{aligned}$$

$$f_i (\dot{x}) \triangleq \sum_{j=1}^3 Q_{ij} (\dot{x}_j), i \in \overline{3}$$

$$U \triangleq [F_0 z_0, F_0' z_0', F_1 z_1]^{\text{tr}} + [-V'_0 f_0 (0, p_0), V'_0 f_0 (0, p_0), 0]^{\text{tr}}$$

とすると、(7.32) は。

$$\dot{x}_i = f_i (\dot{x}) + U, \dot{x}_i (0) = \dot{x}_i^0 \geq 0\tag{7.33}$$

とがける。このとき、次の結果が成り立つ。

[系 7.2] 系 (7.33) において次の 3 条件が成り立つとする。

- i) $V_0, V_0', L_1, f_0, H_0, H_1 > 0$;
- ii) $P_0, Q_0, P_1 > 0$;
- iii) $\forall p_0 \geq 0, \exists (f_0(\cdot, p_0); \alpha, 0) \geq 0, \forall \alpha > 0$.

このとき、次のことが成り立つ。

- 1) $U = \theta$ ならば、系 (7.33) は大域指数安定である；
- 2) $U \neq \theta$ ならば、系 (7.33) は有界入力有界状態安定である。

(証明) 定理 7.3, 7.4 から明らか。 (証明終)

[例 2] ある種の RC 回路網。

図 7-2 に示す RC 回路網を考える。図から、

$$I = [I_1, \dots, I_d]^T \in \mathbb{R}^d$$

$$V = [V_1, \dots, V_d]^T \in \mathbb{R}^d$$

とすると、

$$I = GV \quad (7.34)$$

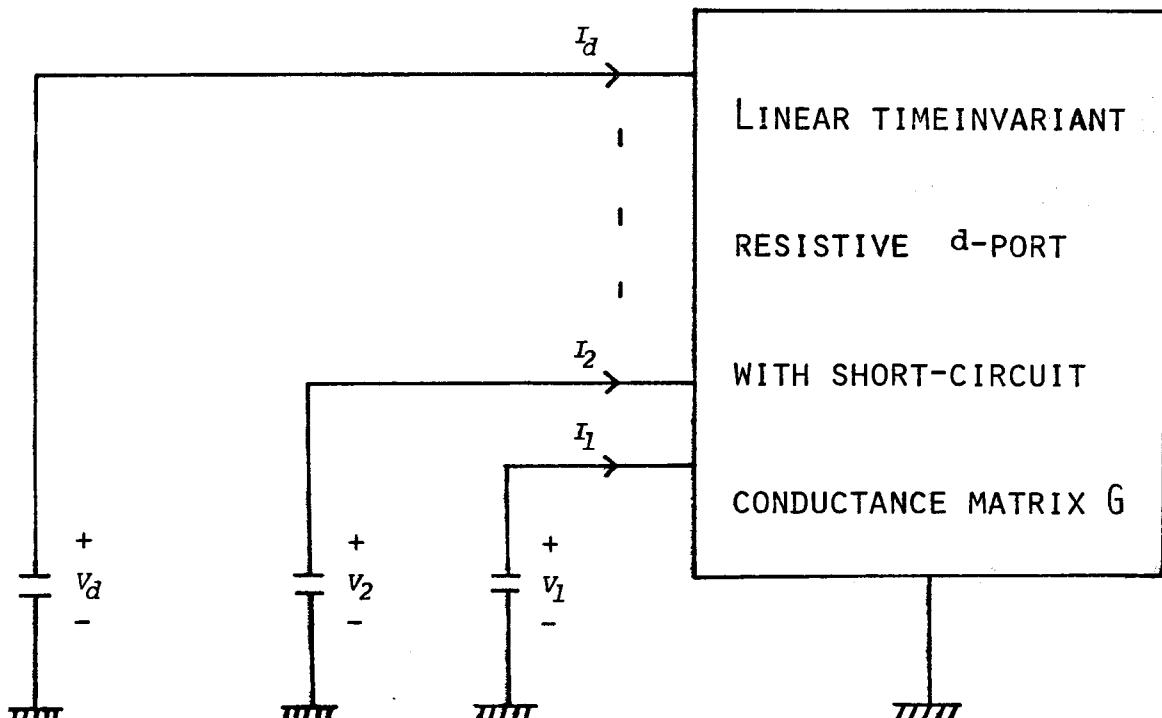


図 7-2. $d+1$ 端子を有する RC 回路網

が成り立つ。ここで、 $G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ とする。

i) $-g_{ii} \leq 0$, $\forall i, j \in \bar{\alpha}, i \neq j$;

ii) $g_{ii} + \sum_{j \neq i} g_{ij} \geq 0$, $\forall i \in \bar{\alpha}$

なる条件を満足することが知られている⁽⁹⁷⁾。

今、各コンデンサの特性を

$$V_j = C_j(g_j), \quad j \in \bar{\alpha} \quad (7.35)$$

とおこう。このとき、図7-2のとおり

$$\dot{q}_i = -I_i, \quad i \in \bar{\alpha} \quad (7.36)$$

が成り立つから、(7.34)~(7.36) より

$$\dot{q}_i = -[\sum_{j=1}^d g_{ij} C_j(g_j)], \quad i \in \bar{\alpha}$$

が成り立つ。従って、 $a_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \bar{\alpha}$ および $f_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \bar{\alpha}$ を

$$a_{ij}(\alpha) \triangleq -g_{ij} C_j(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f_i(q) \triangleq \sum_{j=1}^d a_{ij}(q_j), \quad q \in \mathbb{R}^d$$

とすると、

$$\dot{q}_i = f_i(q), \quad i \in \bar{\alpha} \quad (7.37)$$

を得る。

[系7-3] 系(7.37)において、次の条件:

$$\exists i_1 \in \bar{\alpha}, \quad g_{i_1 i_1} + \sum_{j \neq i_1} g_{i_1 j} > 0$$

が成り立つとする。そして、 $G = (g_{ij})$ は分解不能とする。

1) $C_j \in CP$, $\forall j \in \bar{\alpha}$

ならば、系(7.37)の零解は大域漸近安定である。

2) $\exists \varepsilon > 0$, $\forall j \in \bar{\alpha}$, $\alpha(C_j; \alpha, 0) \geq \varepsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$

ならば、系(7.37)の零解は大域指数安定である。

(証明) 定理7-2・7-3から明らか。

(証明終)

(注7-5) この場合、初期状態 1) $q^* \geq 0$ に限る。又、2)については、上に示した条件のかわりに、

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall j \in \bar{\alpha}, \quad \alpha(C_j; \alpha, \beta) \geq \varepsilon, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta$$

が成り立つとすると、初期状態は任意にとてよい(注7-4参照)。

[系7・4] 系(7.37)において、次の2条件が満足されるとする。

i) $\exists k \in \bar{d}, q_{kj} > 0, \forall j \in \bar{d}, j \neq k;$

ii) $\exists \varepsilon > 0, \forall j \in \bar{d}, \lambda(c_j; \alpha, \beta) \geq \varepsilon, \forall d, \beta \in R, \alpha \neq \beta$

このとき、任意の $g^0 \geq \theta$ に対して、系(7.37)は唯一の定常解 $g^*(g^0) \geq \theta$ を有し、解 $g(\cdot; g^0)$ は g^0 へ指数的に漸近する。

(証明) 定理7・5から明らか

(証明終)

7・6 結 言

この章では、ある種の物理的制約条件を有する特殊な非線形システムについて、解の非負性、安定性、および定常解の存在とその安定性について考察した。まず、解の非負性については、その必要十分条件を示すことができた。さらに安定性については、システムの構造、特性の特殊性を利用することによって、非常にシャープな結果を得ることができた。又、定常解の存在とその安定性についても、ここで取り扱ったような特殊なシステムにおいては、ある程度一般的な結果を示すことができた。なお、この定常解の解析については、よりシャープな結果が得られると思われる。

第8章 結 論

本研究では、連続な特性を有する連続時間、離散時間非線形ダイナミカルシステムの安定性および可解性の問題について考えた。

まず第3章で、平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について考察し、従来Palaisの定理や大域逆関数定理を用いて得られてくる結果を、Hadamardタイプの結果を除いて全て含む実用的な結果を得ることができた。これらの結果は、対象とする方程式が必ずしも連続微分可能な特性や区分的線形特性ではなくともよく、単に連続、ないし、局所的にリップシツク連続であればよいといった点と、単調性に関して比較的緩い条件を仮定すればよいといった点において従来の結果を改良したものである。又ここでは、唯一解が存在するための条件についてのみ考察したが、今後の問題としては、多価解の存在に関する問題が残されている。

次に第4章では、常微分方程式の可解性と安定性、そしてそれらの応用として周期系における周期解の存在とその安定性について考察した。まず可解性については、2つのタイプの結果を示した。1つは、岡村の結果に沿って得られるもので、その実用的な十分条件となつてゐる。そしてもう1つの結果は、安定性を考慮するために前者のように大域的な条件を必要としないものである。又、安定性については、指數安定性および有界入力有界状態安定について若干の結果が得られた。さらに、周期系における周期解の存在とその安定性については、その存在と指數安定性を保証する実用的な条件を明らかにした。

そして次に第5章では、平衡点や周期系における周期解を求める問題に関連して、平衡点方程式に対する反復法の適用とその収束性について考察した。ここではまず非線形ヤコビ法および非線形SOR法についてその大域収束のための実用的な条件を明らかにした。又、線形方程式に対するSOR法についてよく知られているオストロフスキーライフの定理が非線形SOR法についてもある程度拡張できることを示した。次にSandberg

の反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を提案し、それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを明らかにした。これらの反復法はいすれも緩い条件の下に大域収束性を有しているから、ニュートン法のように真の解の近傍では非常に速い収束性を示す反復法の初期近似値を与えるのに用いれば、非常に有効である。

又、第6章では、関数解析的アプローチによって非線形フィードバック系の出入力安定性(有界性、連続性)について考察した。まず有界性については、 α 関数を用いた2つの安定定理を得た。これらの結果は、スマールゲイン定理よりもシャープな結果となっている。そして連続性についても、 α 関数を用いた結果を得た。この結果は、スマールゲイン定理よりもシャープな結果となつてゐるとともに、ヒルベルト空間においては、従来知られてゐる受動定理と一致してゐる。従って、この意味において、受動定理を一般のバナッハ空間へ拡張することができた。

最後に第7章では、ある種の物理的制約条件を有する非線形ダイナミカルシステムについて考察した。ここではまず最初に解の非負性について考え、その必要十分条件を得た。さらに、安定性については、システムの構造、特殊性を利用することによって、一般の非線形システムの安定解析に対して、シャープな結果を得た。又、非線形ダイナミカルシステムにおける定常解の存在とその安定性についても、第7章で対象とした特殊なシステムにおいては、ある程度一般的な結果が得られることが示された。なお、この定常解の解析については、よりシャープな結果を得ることが、今後に残された問題である。

謝 辞

本研究の全過程を通じて、直接理解ある御指導を賜わり、ついに歴まご
れ御助言いたいたいに児玉慎三教授、前田肇講師に心から感謝の意を表する。

日頃御指導、御助言いたいたいに神戸大学工学部丸橋徹教授、羽根田
博正助教授に深く感謝する。

大学院博士課程において、御指導、御教授を賜わった電子工学教室尾崎
弘教授、寺田浩詔教授、産業科学研究所角所収教授、電気工学教室藤井克
彦教授、ならびに通信工学教室中西義郎教授に対し厚く御礼申し上げる。

本研究をまとめろにあたって有益な御助言を頂いた電気工学教室森田龍
彌助教授、黒田英三講師、近畿大学長田郎教授、馬場鎧一助教授、神戸大
学工学部池田雅夫助教授に心から感謝する。

筆者の所属している研究室の権谷文彦助手、熊谷貞俊助手に丁種々の面
で御協力をいたいたい。また日本電信電話公社鐘江真一氏に丁第6章に
關して有益な御助言をいたいたい。ここに記して心から感謝する。

最後に、親切な御援助をいたいたいに電子工学教室の諸々に御礼申し上げ
る。

文 献

- (1) 小池, 福島: 自動制御理論, 近代科学社(昭43).
- (2) L.A.Gould:Chemical process control:theory and applications, Reading,Mass.:Addison-Wesley(1969).
- (3) H.H.Rosenbrock:A Lyapunov function with applications to some nonlinear physical systems,Automatica,1,2-3,pp.31-53(1963).
- (4) 伊沢: 自動制御入門, 才-ム社(昭29).
- (5) 高橋: システムと制御, 岩波書店(昭43).
- (6) G.Dahlquist:Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations,Trans. of the Royal Inst. of Tech.,Stockholm,Sweden,130(1959).
- (7) S.M.Lozinskij:Error estimate for numerical integration of ordinary differential equations,Pt.I,Ivz. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika,6,pp.52-90(1958).
- (8) W.A.Coppel : Stability and asymptotic behavior of differential equations,D. C. Heath,Boston(1965).
- (9) C.A.Desoer and H.Haneda:The measure of a matrix as a tool to analyze computer algorithm for circuit analysis,IEEE Trans., CT-19,5,pp.480-486(Sept. 1972).
- (10) H.Haneda: μ -functional on bounded linear operators,Memoir Faculty of Engineering of Kobe Univ.,19,pp.15-25(1973).
- (11) T.Kato:Nonlinear semigroup and evolution equations,J. Math. Soc. of Japan,19,pp.508-520(1967).
- (12) J.M.Ortega and W.C.Reinboldt:Iterative solution of nonlinear equations in several variables,N. Y.:Academic Press(1970).
- (13) W.C.Reinboldt:Local mapping relation and global implicit function theorem,Trans. Amer. Math. Soc.,138,pp.183-198(1969).

- (14) J.Hadamard:Sur les transformation ponctuelles,Bull. Soc. Math. France,34,pp.71-84(1906).
- (15) G.Mayer:On solving nonlinear equations with one-parameter operator imbedding,SIAM J. Numer. Anal.,5,pp.739-752(1968).
- (16) M.Vehovec:Simple criterion for the global regularity of vector-valued functions,Elec. Letters,5,26,pp.680-681(Dec. 1969).
- (17) I.W.Sandberg:Theorems on computation of the transient response on nonlinear networks containing transistor and diodes,Bell Stst. Tech. J.,49,8,pp.1739-1776(Oct. 1970).
- (18) 羽根田 : C^k 級 ($1 \leq k \leq \infty$) 微分可能な特性をもつ直流方程式の解法,信学会,回路ヒンズテム理論研資,CT72-39 (昭47-10).
- (19) G.J.Minty:Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space,Duke Math. J.,29,pp.341-346(1962).
- (20) F.E.Browder:The solvability of non-linear functional equations,Duke Math. J.,30,pp.557-566(1963).
- (21) R.S.Palais:Natural operation on differential forms,Trans. Amer. Math. Soc.,92,1,pp.125-141(1959).
- (22) T.E.Stern:Theory of nonlinear networks and systems,Reading, Mass.:Addison-Wesley(1965).
- (23) T.Ohtsuki and H.Watanabe:State-variable analysis of RLC networks containing nonlinear coupling elements,IEEE Trans. CT-18,pp.146-152(Jan. 1971).
- (24) F.F.Wu and C.A.Desoer:Global inverse function theorem,IEEE Trans.,CT-19,2,pp.199-201(Mar. 1972).
- (25) E.S.Kuh and I.N.Hajj:Nonlinear circuit theory:resistive networks,Proc. IEEE 59,pp.340-355(Mar. 1971).
- (26) T.Ohtsuki and N.Yoshida:Dc analysis of nonlinear networks

- based on generalized piecewise-linear characterization, IEEE Trans., CT-18, 1, pp.146-152 (Jan. 1971).
- (27) 羽根田,石井,丸橋:区分的線形化特性をもつ直流方程式の解析.
信学論(A), 58-A, 2, pp.105-112(昭50-02).
- (28) H.Haneda:A generalization of monotonicity applied to the dc analysis of non-differentiable resistive networks, IEEE Trans., CAS-21, 3, pp.406-412 (May 1974).
- (29) F.F.Wu:Existence of an operating point for a nonlinear circuit using the degree of mapping, IEEE Trans., Cas-21, 5, pp.671-677 (Sept. 1974).
- (30) A.N.Willson,Jr.:On the solutions of equations for nonlinear resistive networks, Bell Syst. Tech. J., 47, pp.1755-1773 (Oct. 1968).
- (31) I.W.Sandberg and A.N.Willson,Jr.:Some theorems on properties of dc equation of nonlinear networks, Bell Syst. Tech. J., 48, pp.1-34 (Jan. 1969).
- (32) T.Fujisawa and E.S.Kuh:Some results on existence and uniqueness of solutions of nonlinear networks, IEEE Trans., CT-18, 5, pp.501-506 (Sept. 1971).
- (33) T.Fujisawa and E.S.Kuh:Piecewise-linear theory of nonlinear networks, SIAM J. Appl. Math., 22, pp.307-328 (Mar. 1972).
- (34) L.Bers:Introduction to topology, New York Univ. (1945-1955).
- (35) 大槻:位相幾何,至文堂(昭36).
- (36) L.Cesari:The implicit function theorem in functional analysis, Duke Math. J., 30, pp.417-440 (1966).
- (37) 国村:微分方程式序説,森北出版(昭44).
- (38) T.Yoshizawa:Stability theory by Liapunov's second method, Math. Soc. of Japan(1966).

- (39) C.A.Desoer:Notes for a second course on linear systems,N. Y.:Van Nostrand Reinhold(1970).
- (40) R.G.Bartle:The element of real analysis,N. Y.:John-Wiley(1964).
- (41) A.G.Filippov:Differential equations with discontinuous right-hand side,Math. Sb.,51,93,1,pp.99-128(1960),and Eng. Transl. AMS Trans. Ser. 2,42,pp.199-231(1964).
- (42) E.Winston:The existence of periodic solutions of perturbed periodic systems,SIAM J. Appl. Math.,21,1,pp.95-103(July 1971).
- (43) I.W.Sandberg:On the properties of some systems that distort signals,Pt.I,Bell Syst. Tech. J.,42,pp.2033-2047(Sept. 1964).
- (44) R.E.Kalman and J.E.Bertram:Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov',Pt.I and II,ASME Basic Engineering,Ser. D,82,pp.371-393, and 394-400(June 1960).
- (45) W.Hahn:Theory and applications of Liapunov's direct method, Englewood Cliff,N. J.:Prentice-Hall(1963).
- (46) A.Halanay:Differential equations:stability,oscillation,time lags,N. Y.:Academic Press(1966).
- (47) J.P.Lasalle and S.Lefschetz:Stability by Liapunov's direct method,N. Y.:Academic Press(1966).
- (48) S.Lefschetz:Stability of nonlinear control systems,Academic Press(1965).
- (49) M.A.Aizerman and F.R.Gantmacher:Absolute stability of regulator systems,Holden-Day(1964).
- (50) G.Zames:On the input-output stability of time-varing nonlinear feedback systems,Pt.I and II,IEEE Trans.,AC-11,2,pp.228-238(Apr. 1966),and 3,pp.465-477(July 1966).

- (51) I.W.Sandberg:On the L_2 boundness of solutions of nonlinear functional equations,Bell Syst. Tech. J.,43,pp.1581-1599 (July 1964).
- (52) I.W.Sandberg:Conditions for the causality of nonlinear operators defined on a functional space,Quart. Appl. Math., 12,pp.87-91(Apr. 1965).
- (53) J.C.Willems:Stability,instability,invertibility,and causality,SIAM J. Contr.,7,4,pp.645-671(Nov. 1969).
- (54) C.A.Desoer and M.Y.Wu:Input-output properties of multiple -input,multiple output discrete systems,Pt.I and II,J. Franklin Inst.,290,1,pp.11-24(July 1970),and 2,pp.85-101 (Aug. 1970).
- (55) C.A.Desoer and M.Vidyasager:Feedback systems:input-output properties,N. Y.:Academic Press(1975).
- (56) V.M.Popov:Absolute stability of nonlinear systems of automatic control,Automation and Remote control,22,8,pp.857-875 (aug. 1961).
- (57) C.A.Desoer:A generalization of the Popov criterion,IEEE Trans.,AC-10,pp.182-184(Sept. 1964).
- (58) R.Bellman:Vector Liapunov functions,SIAM J. Contr.,3,pp.443-462(1966).
- (59) M.Fiedler and V.Ptak:On matrices with nonpositive off-diagonal elements and positive principal minors,Czech. Math. J.,12, 3,pp.382-400(1962).
- (60) D.Mitra and H.C.So:Existence conditions for L_1 Lyapunov functions for a class fo nonautonomous systems,IEEE Trans., CT-19,6,pp.594-598(Nov. 1972).
- (61) J.M.Ortega:Numerical analysis;a second course,N. Y.:Academic

- Press (1970).
- (62) J.Diedonne:Foundation of modern analysis,N. Y.:Academic Press (1969).
- (63) 太田・羽根田・丸橋:非線形周期系における周期解の存在と安定性について,信学論(A),58-A,2,pp.105-112 (昭50-02).
- (64) 太田:直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について,信学論(A),59-A,6,pp.498-505 (昭51-06).
- (65) 太田・児玉:非線形方程式の解の存在と唯一性について,信学会,回路とシステム理論研究会,CST75-103 (昭51-01).
- (66) 児玉・佐藤・須田:制御工学者のためのマトリクス理論(13).システムと制御,16,9,pp.715-717 (昭47-09).
- (67) T.Strom:On logarithmic norm,SIAM J. Numer. Anal.,12,5,pp.741-752 (Oct. 1975).
- (68) K.Yosida:Functional analysis, Springer (1964).
- (69) J.M.Holtzman:Nonlinear system theory:a functional approach, Prentice-Hall (1970).
- (70) Y.Ohta:Monotone nonlinear mappings in general Banach spaces :the solvability and a solution algorithm, SIAM J. Appl. Math. (投稿中).
- (71) 児玉・須田:制御工学者のためのマトリクス理論(21), システムと制御,17,5,pp.296-304 (昭48-05).
- (72) R.K.Brayton and J.K.Moser:A theory of nonlinear networks, Pt.I and II, Quart. Appl. Math.,22,pp.1-33, and 81-104 (Apr. and July 1964).
- (73) C.A.Desoer and J.Katzenelson:Nonlinear RLC networks, Bell Syst. Tech. J.,44,pp.161-198 (Jan. 1965).
- (74) L.O.Chua and R.A.Rohrer:On the dynamic equations of a class of nonlinear RLC networks, IEEE Trans.,CT-12,pp.475-489

- (Dec. 1965).
- (75) T.E.Stern:On the equations of nonlinear networks, IEEE Trans., CT-13, pp.74-81 (Mar. 1966).
- (76) P.P.Varia and R.Liu:Normal form and stability of a class of coupled nonlinear networks, IEEE Trans., CT-13, pp.413-418 (Dec. 1966).
- (77) C.A.Desoer and F.F.Wu:Nonlinear monotone networks, SIAM J. Appl. Math., 26, pp.315-333 (Mar. 1974).
- (78) M.Ikeda and S.Kodama:Large-scale dynamical systems:state equation,Lipschitz conditions and linearization, IEEE Trans., CT-20, 3, pp.193-202 (May 1973).
- (79) R.M.Redheffer:Differential and integral inequalities, Proc. Amer. Math. Soc., 15, pp.715-716 (1964).
- (80) P.R.Bryant:The order of complexity of electrical networks, Proc. IEE, 106C, pp.174-188 (June 1959).
- (81) E.A.Coddington and N.Levinson:Theory of ordinary differential equations, N. Y.:McGraw-Hill (1955).
- (82) 太田, 羽根田, 丸橋:周期系における周期解の発生条件, 信学会, 回路システム理論研究会, CT73-15 (昭48-05).
- (83) 太田, 羽根田, 丸橋:周期系における周期解の発生条件, 第3回ダイナミカルシステムシンポジウム予稿集, pp.11-14 (昭48-07).
- (84) 鳥玉, 池田, 須田:制御工学者のためのマトリクス理論(6), システムと制御, 16, 2, pp.51-58 (昭47-02).
- (85) H.K.Gummel:A charge-control transistor model for networks analysis program, Proc. IEEE, 56, 4, p.751 (Apr. 1968).
- (86) D.Kohler:The charge-control concept in the form of equivalent circuit representing a link between the classical large signal diode transistor models, Bell Syst. Tech. J., 46, p.523

- (Mar. 1967).
- (87) I.W.Sandberg:Some theorems on the dynamic responce of nonlinear transistor networks,Bell Syst. Tech. J.,48,1, pp.35-54(Jan. 1969).
- (88) 太田:直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について,信学会・回路とシステム理論研資,CST75-6(昭50-05).
- (89) E.Isaacson and H.Keller:Analysis of numerical method,N. Y.: John-Wiley(1966).
- (90) R.S.Verga:Matrix iterative analysis,Prentice-Hall:Englewood Cliff,New Jersey(1962).
- (91) J.M.Ortega:Numerical analysis:a second course,N. Y.:Academic Press(1972).
- (92) 鐘ヶ江,太田:関数解析的アプローチによるフードバック系の入出力安定:受動定理の拡張,信学会・回路とシステム理論研資,CST-75-47(昭50-07).
- (93) 太田,鐘ヶ江,児玉:作用素のメジャ-による非線形離散値フードバック系の安定解析,信学論(D),59-D,8,pp.545-552(昭51-08).
- (94) B.D.O.Anderson:The small gain theorem,the passivity theorem, and their equivalence,J. Frank. Inst.,293,2,pp.105-115(1972).
- (95) C.W.Gear:Numerical intitial balue problems in ordinary differential equations,Englewwod Cliff,New Jersey:Prentice -Hall(1971).
- (96) 太田,前田,児玉:ある種の物理的制約条件を持つ非線形システムの解析,信学会・回路とシステム理論研資,CST76-103(昭51-11).
- (97) L.Weinberg:Network analysis ans synthesis,N. Y.:McGraw-Hill (1962).