Title	非線形ダイナミカルシステムの安定性および可解性に関する研究
Author(s)	太田, 有三
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/997
rights	
Note	

非線形ダイナミカルシステムの安定性および可解性に関する研究

昭和52年１月

太　田　有　三

序　　　文

本論文は，著者が大阪大学大学院工学研究科博士課程（電子工学専攻）在学中に行った研究のうち，非線形ダイナミカルシステムの安定性および可解性に関する研究をまとめたもので，本文は次の８章から成っている。

第１章は緒論で，本研究の目的ならびにその工学的意義，およびこの分野での研究の現状について述べ，本研究の新しい諸結果について概説している。

第２章では数学的な準備を行う。ここでは，本論文を通じて重要な役割を果すμ関数およびその拡張であるλ関数を導入し，それらの性質，値，両者の関係などを明らかにしている。さらに，種々の行列のクラスとμ関数の関係，双対写像とλ関数との等価性を示している。これによって，λ関数，μ関数の持つ意味，有効な範囲を明らかにするとともに，従来個々別々に定められてきた受動性，単調性の概念の整理，統一を試みている。

第３章では，発表論文（1），（2）を中心に平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について考察している。ここでは，唯一解の存在，および解の入力，パラメータに関する連続性を保証する実用的かつシャープな結果を示している。これらは，二・三の例外を除いて，従来知られているほとんど全ての結果をその特殊な場合として含んでいる。

第４章では，非線形常微分方程式の可解性と安定性，そしてそれらの応用として周期系における周期解の発生について考察している。まず可解性については，２つのタイプの結果を示している。１つは，通常の初期値問題の取り扱い方に沿って得られるもので，従来知られている結果の実用的な十分条件を明らかにしたものであり，もう１つは，安定性をも考慮するために前者のように大域的な条件を必要としないものである。又，安定性については，指数安定性および有界入力有界状態安定性について若干の結果を示している。さらに，周期系における周期解の存在とその安定性に関しては，発表論文（3）～（5）の結果を若干改良した結果を示している。

第5章では，発表論文(1)，(2)，(6)，(7)を中心に平衡点方程式に対する反復法の適用とその収束性について考察している。ここではまず非線形ヤコビ法および非線形SORの収束性について新しい収束条件を明らかにしている。又，線形方程式に対するSOR法に関してよく知られているオストロフスキー・ライクの定理が非線形SOR法についてもある程度拡張できることも示されている。次にSandbergの反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を提案し，それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを明らかにしている。

第6章では，発表論文(2)，(8)，(9)を中心に関数解析的アプローチによって非線形フィードバック系の入出力安定，すなわち，有界性と連続性について考察している。この手法による安定定理は，基本的な2つの定理，すなわち，スモールゲイン定理と受動定理に基づいている。ところで，前者はノルム空間において適用できるのに対し，後者は内積空間のみにおいて適用できるものである。ここでは，受動定理を一般のバナッハ空間へ拡張できることを示している。

第7章では，発表論文(10)を中心に，ある種の物理的制約条件を有する非線形ダイナミカルシステムについて考察している。ここではまず最初解の非負性について考察し，その必要十分条件を明らかにしている。さらにこれを用いて，安定性，および定常解の存在とその安定性について論じている。ここで得られる結果は対象とするシステムの構造，特性の特殊性を利用することによって，一般的なシステムに対する結果に比べ，非常にシャープな結果となっている。

第8章は結論で，本研究で得られた主な結果をまとめている。

関連発表論文

(1) 太田，児玉：非線形方程式の解の存在と唯一性について，信学会，回路とシステム理論研資，CST75-103（昭51-01）．

(2) Y.OHTA:MONOTONE NONLINEAR MAPPINGS IN GENERAL BANACH SPACES :THE SOLVABILITY AND A SOLUTION ALGORITHM,SIAM J.APPL. MATH.（投稿中）

(3) 太田，羽根田，丸橋：非線形周期系における周期解の存在と安定性について，信学論(A),58-A,2,pp.105-112（昭50-02）．

(4) 太田，羽根田，丸橋：周期系における周期解の発生条件，信学会，回路とシステム理論研資 CT73-15（昭48-05）．

(5) 太田，羽根田，丸橋：周期系における周期解の発生条件，第3回ダイナミカルシステムシンポジウム予稿集，pp.11-14（昭48-07）．

(6) 太田：直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について，信学論(A),59-A,6,pp.498-505（昭51-06）．

(7) 太田：直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について，信学会，回路とシステム理論研資，CST75-6（昭50-05）．

(8) 太田，鐘ヶ江，児玉：作用素のメジャーによる非線形離散値フィードバック系の安定解析，信学論(D),59-D,8,pp.545-552（昭51-08）．

(9) 鐘ヶ江，太田：関数解析的アプローチによるフィードバック系の入出力安定：受動定理の拡張，信学会，回路とシステム理論研資，CST75-47（昭50-07）．

(10) 太田，前田，児玉：ある種の物理的制約条件を持つ非線形システムの解析，信学会，回路とシステム理論研資，CST76-103（昭51-11）．

目　　次

諸記号

$\mathbb{R}$	：実数体
$\mathbb{R}_+$	：全ての非負実数の集合
$\mathbb{Z}$	：全ての整数の集合
$\mathbb{Z}_+$	：全ての非負整数の集合
$\mathbb{N}$	：全ての自然数の集合
$\mathbb{R}^d$	：d次元実空間
$\mathbb{H}$	：実ヒルベルト空間
$\mathbb{B}$	：実バナッハ空間
$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$	：実ノルム空間
$\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$	：$\mathbb{X}$と$\mathbb{Y}$の直積空間
$\lvert\cdot\rvert, \lvert\cdot\rvert_p$	：ベクトルのノルム，l_p（L_p）ノルム，$p \in [1, \infty]$
$\lVert\cdot\rVert, \lVert\cdot\rVert_p$	：作用素ノルム，$\lvert\cdot\rvert_p$によって誘導された作用素ノルム
$\langle \cdot , \cdot \rangle$	：$\mathbb{H}$における内積.
$\mathbb{R}^{d \times r}$	：$d \times r$実行列の集合.
$\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_N)$	：$A_1, A_2, \cdots, A_N$を対角ブロックとするブロック対角行列.
$\lambda_i(A)$	：行列Aのi番目の固有値
$Re(s)$	：複素数sの実部
$I - J$	：集合Iと$J \subset I$の差集合
ϕ	：空集合
$Int(A)$	：Aの内点集合
$B[x;r]$	：点xを中心とする半径rの開球
$\bar{B}[x;r]$	：点xを中心とする半径rの閉球
$A \Longleftrightarrow B$	：AとBは等価である.
$A \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} B$	：AをBで定義する.
$\triangleq$	：定義によって等しい.

$\equiv$	恒等的に等しい
x^{tr}, A^{tr}	ベクトルxや行列Aの転置
I	恒等作用素，単位行列
θ	零ベクトル，零行列
$\alpha \downarrow 0$, $\alpha \uparrow 0$	$\alpha > 0$, $\alpha \to 0$, $\alpha < 0$, $\alpha \to 0$
$\dot{x}(t)$	$\lim_{\alpha \to 0} [x(t+\alpha) - x(t)]/\alpha$
$\dot{x}_+(t)$	$\overline{\lim}_{\alpha \downarrow 0} [x(t+\alpha) - x(t)]/\alpha$
$\dot{x}_-(t)$	$\underline{\lim}_{\alpha \uparrow 0} [x(t+\alpha) - x(t)]/\alpha$
$x(t+0)$	$\lim_{\alpha \downarrow 0} x(t+\alpha)$
$x(t-0)$	$\lim_{\alpha \uparrow 0} x(t+\alpha)$
$F'(x)$	Fの点xにおける偏微分
$\partial_i F(x_1, \cdots, x_N)$	$x_i \mapsto F(x_1, \cdots, x_N)$の点$(x_1, \cdots, x_N)$における偏微分
$\bar{d}$	$\{1, 2, \cdots, d\}$, 例えば $\bar{3} = \{1, 2, 3\}$
$F(x)$, Fx	Fの点xにおける値
C	連続な写像の集合
C^k	k回連続微分可能な写像の集合
e	要素が全て1のベクトル
e^i	座標ベクトル

第1章 緒 論

制御系や電気回路などにおいて，それらを構成している要素，素子は厳密な意味では線形でないものが少なくない。例えば，増幅器は，入力信号が微小変化する限りにおいては，線形性を保持していると考えられるが，入力信号の振幅が大きくなると，入出力関係は比例関係からはずれてくる傾向にある。又，鉄心入インダクタ，強誘電体を用いたコンデンサ，非線形負性抵抗（エサキダイオード，ネオン管）なども非線形を示すものとして知られている。その他，電気－機械系[1]，化学系[2],[3]，熱系[3]，流体系[4]など多くの物理的システムにおいて非線形性があらわれる。

これらの非線形性は，線形性からはずれるために誤差を伴ったり，安定性を害するような場合もあるが，適応制御やボジカスト制御[5]あるいは非線形発振，共振回路や論理回路などにみられるように非線形性を積極的に利用する場合も少なくなく非線形ダイナミカルシステムの解析，設計の必要性はますます増大している。

これらの解析，設計における最も基本的かつ重要な問題としては，1)標準形状態方程式の導出，2)それらの可解性，3)平衡点や周期解の存在に関する問題，4)それらの求解の問題，5)安定性などがある。

ところで，問題1)における代表的な問題である非線形回路や大規模複合系における標準形状態方程式の導出，問題2)における差分方程式の可解性，および，問題3)における平衡点の存在の問題は，平衡点方程式（直流方程式）の可解性の問題に帰着される。

又，問題5)における重要な問題の1つであるフィードバック系の入出力安定解析は，本質的には，非線形Volterra型積分方程式などの非線形関数方程式の可解性の問題となる。

本研究では，このような観点から，連続な特性を有する連続時間，離散時間非線形ダイナミカルシステムを対象として，i)平衡点方程式，非線形関数方程式の可解性，ii)非線形常微分方程式の可解性，iii)周期解の存在，

iv)平衡点や周期解の求解，v)安定性（リアプノフ安定性，入出力安定性）について論じる。ただし，周期解については，周期系についてのみ考察している。各章で述べることは次の通りである。

第2章では，数学的な準備を行う。ここではまず最初に，写像のクラスについて，その定義，性質，包含関係を示す。次に，以下の章において重要な役割を果すμ関数[(6)〜(10)]およびその拡張であるλ関数を導入し，それらの性質，両者の関係を明らかにする。続いて，具体的にノルムを指定した場合のλ関数，μ関数の値，ないし評価を示す。さらに，種々の行列のクラスとμ関数の関係，双対写像[(11)]とλ関数の等価性を示す。これによって，λ関数，μ関数の持つ意味，有効な範囲を明らかにするとともに従来個々別々に定められてきた受動性，単調性の概念を整理，統一する。又，λ関数，μ関数と並んで以下の章において重要な役割を果す縮小写像およびそれから導かれる幾つかの結果を示す。

第3章では，平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について論じる。ここでは，$F(x)=u$，又は，$F(x,y)=u$なる形の平衡点方程式，非線形関数方程式について考察する。

まず3・2においては，$F(x)=u$なる形の方程式の可解性について論じる。ただし，Fはバナッハ空間$\mathcal{B}$からそれ自身への連続写像とする。さてここでいう可解性とは，「任意に入力$u\in\mathcal{B}$を与えたとき，方程式：$F(x)=u$は唯一解$x^*(u)$を有するか，そして$u\mapsto x^*$は連続か」という問題である。この種の問題については，多くの結果が報告されているが，それらは手法的な面からは次のように分類される。

i) 接続の性質[(12),(13)]を用いるもの：

　i－a) Fが連続微分可能な場合[(10),(14)〜(18)]，

　i－b) Fが連続な場合[(13),(19),(20)]　；

ii) Palaisの定理[(21)]，を用いるもの[(9),(22),(23)]；

iii) 大域逆関数定理[(24)]を用いるもの[(25)〜(28)]；

iv) 写像度[(12)]を用いるもの[(29)]；

V) 一次元の問題に帰着させる方法：

V-a) 方程式の構造を利用するもの[30],[31]，

V-b) Fujisawa-Kuhの方法[32],[33]．

ところで，Fが同相写像になるかどうかという点だけに注目するならば，Palaisの定理および大域逆関数定理は，接続の性質を用いて得られる。

又，写像度を用いた理論は，理論自体は非常に一般性を有しているが，実際にそれを適用する場合はかなり煩雑な手続きを必要とする。さらに，解の存在と一意性については結果が得られるとしても，解 $x(u)$ の入力 u に対する連続性に関しては情報が得られない。

又，V)の方法は，V-a)の方は方程式の構造が制限されてくるし，V-b)の方は，Fが連続微分可能であるか区分的線形である場合などに関しては有効であるが，Fが単に連続である場合に関しては適用が困難である。さらに，最初に述べた可解性よりも強い結果，例えば，逆写像の有界性などを得たい場合に，それらに関する情報が得られない。

以上のような観点から，ここでは接続の方法によって，可解性の問題を考察する。さて，この方法による問題点は次の2点が挙げられる。

1) 接続の性質を保証するにはある種の不等式が成り立つ必要があるが，そのためには，Fにどのような条件を課せばよいか；

2) 接続の性質によって解の存在を議論する前提は，Fが局所的同相写像である事で，そのためにはFにどのような性質を与えればいいか。

従って，3・2・1では，接続の性質を説明するとともに，1)の問題について考える。次に3・2・2では，2)の問題について考える。この問題に対しては，Fが連続微分可能な場合および $\mathcal{B}$ が有限次元空間である場合については，それぞれ，陰関数定理，領域不変性定理[34],[35]によって容易に結果が得られるが，Fが単に連続で，$\mathcal{B}$ が無限次元空間の場合は検討が必要である。又，無限次元空間の場合についてもヒルベルト空間の場合については，Minty[19]によって結果が得られている。従って，3・2・2では一般のバナッハ空間の場合について主に考えている。得られた結果

は，Mintyの結果よりも若干強い条件（Fが単に連続でなく，局所的にリプシッツ連続であること）を必要とする。最後に，3・2・3では，3・2・1および3・2・2をまとめ，さらに実用的な条件を示す。又，従来の結果との関連も明らかにし，先に示したDesoerとHaneda[9]，Stern[22]，Haneda[10],[18],[28]，OhtsukiとWatanabe[23]，KuhとHajj[25]，OhtsukiとYoshida[26]，羽根田，石井と丸橋[27]，らの結果をその十分条件として含むことを示す。さらに，Minty[19]，Browder[20]の結果をよりシャープにできることも示す。

次に3・3では，$F(x,y)=u$なる形の方程式の可解性について論じる。ただし，Fはバナッハ空間$\mathbb{B}\times\mathbb{B}'$から$\mathbb{B}$の内への連続写像とする。さてここでいう可解性とは，「任意に入力$u\in\mathbb{B}$および$y\in\mathbb{B}'$を与えたとき，方程式：$F(x,y)=u$は唯一解$x^*(u,y)$を有するか，そして，$(u,y)\mapsto x^*$は連続か」という問題である。この種の問題に対しては，Fが連続微分可能な場合については大域陰関数定理として若干の結果[25],[36]が知られている。ここでは，KuhとHajj[25]の方法に従って，3・2の結果を応用して結果を得る。得られた結果はKuhとHajjの結果[25]をその特殊例として含んでいる。

最後に3・4では，3・2，3・3で得られた結果を非線形回路に応用し，非線形RLMC回路の標準形状態方程式を導くとともに，非線形抵抗回路における直流解の存在条件を示す。

第4章では，非線形常微分方程式の可解性と安定性そしてそれらの応用として，周期系における周期解の発生について論じる。

まず4・2では非線形微分方程式の可解性について一般的な議論を行なう。ここでいう可解性とは，「与えられた非線形微分方程式において，その定義域内の任意の初期時間，状態，入力およびパラメータを定めたとき唯一の大域的な解が存在するか，そしてその解は，初期状態，入力，およびパラメータに関して連続か」という問題である。この問題の前半は，初期値問題（Cauchy問題）として古くから研究されている。そして，特に

微分方程式：$\dot{x}=f(x,t)$において，fが連続の場合には，岡村によって完全に解かれているが[37),(38)]，工学上は次の2点に注意する必要がある。

i) ここでは，$\dot{x}=f(x,v,t)+u$，$\dot{x}=f(x,v,t)$，$\dot{x}=f(x,t)+u$，$\dot{x}=f(x,t)$；$\dot{x}=f(x,v)+u$，$\dot{x}=f(x,v)$，$t=f(x)+u$，$\dot{x}=f(x)$ などの形で与えられる非線形微分方程式を対象とするが，入力u，vはステップ入力なども対象とするから，一般に連続関数とは限らず，区分的に連続な関数[(39),(40)]であることが多いこと。従って，解の定義を若干拡張する必要があること。但し，本研究では，系の特性f自体は連続であるから，Fillippov[(41)]の意味まで拡張するということではない；

ii) 先に述べた岡村の結果というのは，「初期値問題において，一意解が存在するための必要十分条件は，ある条件をみたすリアプノフ関数が存在すること」といった形で示されている訳であるが，与えられた微分方程式の特性から，実際にそのような条件をみたすリアプノフ関数を構成する方法は，リプシッツ条件を満足する場合などを除いては，わかっていない。

ここでは，以上の2点に注意して，非線形微分方程式の可解性について考察し，岡村の結果に沿った実用的な条件を示す。

次に，4・3では，安定性に関する若干の結果を示し，それを用いて，微分方程式の可解性について，4・2とは異った結果を得る。ここで得られる結果は安定性も考慮するために，4・2の結果のような大域的な条件を必要としない。

最後に4・4では，上で得られた結果を周期系へ応用する。まず4・4・1では，一般的な形で周期解発生のための実用的十分条件を示す。又，これらの条件は，発生する周期解軌道の指数安定であることもあわせて保証している。ここで得られた結果は，リアプノフ関数を用いて示されているYoshizawa[(38)]の結果の実用的な表現となっている。そして，Winstonの結果[(42)]をその特殊な場合として含んでいる。次に，4・4・2では，非線形RLCM回路，非線形トランジスタ・ダイオードを含む電気回路，および鉄共振現象などにおいてあらわれるDuffing方程式を例にとって，

上述の結果を説明する。

第5章では，平衡点方程式に対する反復法の適用およびその収束性について論じる。平衡点方程式（直流方程式）は，第3章でふれた非線形抵抗回路網における直流解析の他に，陰的積分公式による常微分方程式の数値解析，差分近似による偏微分方程式の数値解析，そして前章でふれた周期系における周期解を求めるに際して，それを常微分方程式の境界値問題としてとらえて，それを差分近似して数値解析を行う場合などに現われる。

まず5・2では，非線形ヤコビ法および非線形SOR法[12]について考察する。そのために，5・2・1では，基礎となる線形方程式に対する収束性を検討し，従来知られている結果を整理，拡張する。そして，5・2・2では，その結果が非線形方程式に対してもほぼそのまま成り立つことを示す。さらに，線形方程式に対するSOR法に関してよく知られているOstrowski-Reichの定理[12]が非線形SOR法に対してもある程度拡張できることを示す。

又，5・3では，Sandbergの反復法[43]を，もう少し使い易い形に変形した反復法を考え，それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを示す。

そして，5・4では，それらの結果の応用例を示す。まず5・4・1では，非線形抵抗回路の直流解析においてよくみられる2つのタイプの直流方程式に応用し，その収束条件を示す。得られた結果は，第3章で示した直流解の存在と唯一性を保証する条件と一致している。次に，5・4・2では，周期系における定常解析を先に示した方法によって行う場合について考える。この場合も収束条件は第4章で示した周期解の発生と安定性を保証する条件と一致している。

ところで，この種の反復法の特徴としては，i)他の方法，例えばニュートン法を用いる場合に比して記憶容量が少なくてすむこと，ii)スパーシティを考慮する場合に，計算の過程を通じて方程式の構造が全く変化しないから煩雑な手続きが不用であること，iii)上で示したように，比較的緩い条

件の下に大域収束性を有することなどが挙げられる。

第6章では，非線形フィードバック系の入出力安定性について論じる。この問題に対しては，大別して2つのアプローチがとられてきた。1つはリアプノフ理論[38],[44]〜[47]に基づくもので，その代表的なものとしてはLur'eの方法が挙げられる[47]〜[49]。もう1つは，関数解析な手法によるものである[43],[50]〜[55]。この2つの方法の橋渡しをなしたのはPopov[56]の論文であり，そのことはPopovの定理を拡張したDesoer[57]の論文でより明確にされている。そして，関数解析的な手法による安定解析は，Zames[50]とSandberg[43],[51],[52]によってその枠組が示された。この手法の特徴の1つとしては，分布系の取り扱いが集中系の取り扱いと同様に容易であることが挙げられる。そしてこのことは，多入力，多出力系と単一入力・単一出力系，連続時間系と離散時間系などにおいても同様である。その他，Popovの定理においてみられるように，マルチプライヤがしばしば有効な働きをするということが挙げられる。

ところで，関数解析的手法による安定解析は，基本的な2つの定理，すなわち，スモールゲイン定理と受動定理に基づいている。このうち，前者は一般のノルム空間において適用できるが，後者は内積空間のみにおいて適用できるものである。

この章の目的は，第2章において一般のノルム空間にまで拡張した受動性，単調性の概念を用いて，受動定理を一般のバナッハ空間へ拡張することである。

まず6・2においては，対象とする非線形フィードバック系を示し，ここでいう入出力安定性，すなわち，有界性および連続性を定義する。

次に6・3では，π関数を用いた有界性に関する2つのタイプの安定定理を示す。この2つの定理は，スモールゲイン定理よりもシャープな結果となっている。

さらに6・4では，π関数を用いた連続性に関する安定定理を示す。この結果は，スモールゲイン定理よりもシャープな結果となっていると同時

に，ヒルベルト空間においては，従来知られている受動定理と一致している。

そして6・5では この章で得られた安定定理を数値積分法の安定解析に応用する。

第7章では，ある種の物理的制約条件を有する系の安定解析について論じる。物理系，化学系，生体系などの広範な物理的，生理的現象を表わすダイナミカルシステムにおいては，物理学的，化学的保存法則によってその状態方程式が，$\dot{x}_i = -g_i(x) + f_i(x) + u_i,\ i \in \bar{n}$で与えられる。これは，状態iの状態量$x_i$の変化割合が，系外からの流入（入力）$u_i$と他の状態から状態iへの流入割合$f_i$との和から，状態iから他の状態および系外への流出割合g_iを差し引いたもので与えられることを示しており，一般に"流れの連続性"と呼ばれる性質が成り立つことを示している。さらに，熱交換系，化学反応系やある種のRC回路網などにおいてみられるように

i) $g_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ji}(x_i) + a_{oi}(x_i)$，$f_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j)$，

ii) $a_{ji}(x_i) \geqq 0$，$a_{oi}(x_i) \geqq 0$，$x_i \geqq 0$

なる条件が満足される場合も少なくない。

この章では，上に示した物理的な制約条件を有する特殊な非線形ダイナミカルシステムについて，i)解の非負性，単調性，ii)安定性，およびiii)定常解の存在とその安定性の3点について考察する。

まず7・2では，この章で対象とする系の特徴である解軌道の非負性，単調性について考察し，その必要十分条件を示す。この結果は，線形系におけるBellman [58] の結果の非線形系への拡張となっている。

次に7・3では，初期状態および入力が非負であれば，解軌道が非負であるという7・2の結果を考慮しながら，漸近安定性，指数安定性，有界入力有界状態安定性について考察し，構造の分解不能性を用いたシャープな結果を示す。この結果は，系の特性が線形の場合には，従来知られている結果と一致している。

さらに7・4では，入力がなく，系外への流出もない場合，すなわち，

$u_i(\cdot)\equiv 0$, $a_{0i}(\cdot)\equiv 0$, $i\in\bar{d}$ となる場合について定常解の存在とその安定性について考察し、ある条件の下に任意の非負の初期値x^0から出発した解軌道が、x^0に依存して一意的に定まる定常値x^∞へ指数的に漸近することを示す。

最後に7・5では、上の結果を化学プロセス、およびある種のRC回路網を例にとって説明する。

以上が従来の研究と本研究の概要である。

第2章 数学的準備

2・1 緒　言

この章では，数学的準備を行なう．まず最初に種々の写像のクラスについてその定義，性質，相互関係を示す．次に，以下の章において重要な役割を果すμ関数[61～110] およびその拡張であるλ関数を導入し，それらの性質を整理する．又，有界な線形写像に関しては，μ関数とλ関数が本質的に同一なものであることを示す．さらに，具体的にノルムを指定した場合のλ関数，μ関数の値，ないし評価を明らかにする．又，安定性や可解性の問題において重要な役割を果す種々の行列のクラス[27],[59]～[61]とμ関数との関係，および双対写像[111]とλ関数との等価性を示す．これによって，λ関数，μ関数の持つ意味，有効な範囲を明らかにするとともに，従来個々別々に定められてきた受動性，単調性の概念を整理，統一する．又，λ関数をμ関数とともに以下の章において重要な役割を果す縮小写像およびそれから導かれるいくつかの結果を整理する．

2・2 写像のクラス

この節では，以下の議論においてあらわれる種々の写像のクラスを定義し，その性質，相互関係などについて整理する．

[定義2・1][39],[40] 写像$u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$は区分的に連続（piecewisely continuous）である． $\Longleftrightarrow$ 任意のコンパクト区間$J \triangleq [t_1, t_2]$上で，$u(\cdot)$が次の3条件を全て満たす．

i) $u(\cdot)$はJ上で高々有限個の点を除いて連続；

ii) もし，$t' \in (t_1, t_2)$が不連続点ならば，$u(t'-0)$および$u(t'+0)$が存在する；

iii) $u(t_1+0)$ および$u(t_2-0)$が存在する．

区分的に連続な写像の集合を$\mathcal{P}_c$で示す．

[定義2・2][27] 写像$F:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$は区分的線形(piecewise-linear)である。 $\Leftrightarrow$ $F(\cdot)$が次の3条件を全て満足する。

i) $F(\cdot)$は連続である;

ii) $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \bar{n}$, $\exists \Omega_i \subset \mathbb{R}^d$, Ω_i:閉凸集合

$$\mathbb{R}^d = \cup_{i=1}^{n} \Omega_i, \quad \mathrm{Int}(\Omega_i) \cap \mathrm{Int}(\Omega_j) = \phi, \quad \forall i, j \in \bar{n}, \ i \neq j;$$

iii) $\forall i \in \bar{n}$, $\exists A_i \in \mathbb{R}^{r \times d}$, $\exists b_i \in \mathbb{R}^r$, $F(x) = A_i x + b_i$, $\forall x \in \Omega_i$.

区分的に線形な写像の集合を$\mathcal{P}_L$で示す。

(注2・1) 文献(26),(33)では，i)の連続性を定義にいれず，連続な区分的線形写像を用いている。

[定義2・3] 写像$F:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$は区分的に連続微分可能である*。

$\Leftrightarrow$ $F(\cdot)$が定義2・2，i); ii)，および次のiv)を満足する。

iv) $\forall i \in \bar{n}$, $\exists F_i:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$, $F_i \in C^1$, $F(x) = F_i(x)$, $\forall x \in \Omega_i$.

区分的に連続微分可能な写像の集合を$\mathcal{P}_{C^1}$で示す。

写像$F \in \mathcal{P}_{C^1}$に対しては，テーラーの公式[40),(62)]と同様な次の結果が成り立つ。

[補題2・1] 任意に$F:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$, $F \in \mathcal{P}_{C^1}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$を与える。このとき，

$$F(x) - F(y) = \left[\int_0^1 F'(\tau x + (1-\tau)y)\, d\tau\right](x-y)$$

が成り立つ。ここで，

$$F'(z) = F_i'(z), \quad z \in \Omega_i$$

とする。ただし，$z \in \Omega_i \cap \Omega_j$のとき，$F'(z)$は$F_i'(z)$又は$F_j'(z)$のいずれか一方をとるものとする(以下，$F \in \mathcal{P}_{C^1}$に対し，$F'(z)$をこの意味で用いる)。

(証明) $\ell \triangleq \{z \in \mathbb{R}^d \mid z = \tau x + (1-\tau)y, \ \tau \in J \triangleq [0, 1]\}$

とすると，各Ω_iは閉凸集合であるから，必要ならば番号をつけ変えること

* 文献(63)では区分的に滑らか，文献(64)では区分的に一次微分可能という語を用いている。

によって，ある$m\in\mathbb{N}$，$m\leqq n$に対し

$$\ell=\cup_{i=1}^{m}\ell_i,\ \ell_i\in\Omega_i,\ {}^{\forall}i\in\bar{m};$$

$$\ell_i\triangleq\{z\in\mathbb{R}^d\,|\,z=\tau x+(1-\tau)y,\ \tau\in J_i\triangleq[\tau_{i-1},\tau_i]\},$$

$$0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m=1$$

となる。ここで，

$$z^i\triangleq\tau_i x+(1-\tau_i)y,\quad {}^{\forall}i\in\{0,1,\cdots,m\}$$

とすると，

$$F(x)-F(y)=\sum_{i=1}^{m}[F(z^i)-F(z^{i-1})]$$
$$=\sum_{i=1}^{m}[F_i(z^i)-F_i(z^{i-1})] \qquad (2.1)$$

となる。ここで，各$F_i(\cdot)\in C^1$に対しテーラーの公式[40),(62)]を適用すると，

$$F_i(z^i)-F_i(z^{i-1})=[\int_0^1 F_i'(sz^i+(1-s)z^{i-1})ds](z^i-z^{i-1})$$

を得る。上式において

$$\tau=\tau_{i-1}+s(\tau_i-\tau_{i-1})$$

なる変換を行うと，

$$F_i(z^i)-F_i(z^{i-1})=[\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}F_i'(\tau x+(1-\tau)y)d\tau](x-y)$$

となる。上式と式(2.1)から，

$$F(x)-F(y)=\sum_{i=1}^{m}[\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}F_i'(\tau x+(1-\tau)y)d\tau](x-y)$$

$$=[\int_0^1 F'(\tau x+(1-\tau)y)d\tau](x-y)$$

を得る。

定義2・2，2・3から，$\mathcal{P}_L\subset\mathcal{P}_{C'}$であることに注意すると補題2・1によって直ちに次の系2・1を得る。

[系2・1][26)(33)] 任意に$F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^r$，$F\in\mathcal{P}_L$，$x$，$y\in\mathbb{R}^d$を与える。このとき，

$$F(x)-F(y)=[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i](x-y)$$

が成り立つ。ここで，$\lambda_i\in[0.1]$，$i\in\bar{n}$は，

$$1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

を満足する。

[定義2・4][55] 写像$F: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$は$\mathfrak{X}$上で有界である。

$\Longleftrightarrow$ $\exists a, b \geqq 0$, $\| F(x) \| \leqq a \|x\| + b$, $\forall x \in \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{X}$上で有界な写像の集合を$\mathcal{F}_B$で示す。

(注2・2) 写像Fは連続とは限らない。

(注2・3) 文献(50), (53)では, Fが$\mathfrak{X}$上で有界とは,

$$\exists a \geqq 0, \ \| F(x) \| \leqq a \|x\|, \ \forall x \in \mathfrak{X}$$

が成り立つことと定義しているが, この場合には, 上式から, $F(\theta)=\theta$でかつ, Fは原点θで連続となっている。

[定義2・5] 写像$F: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$は$\mathfrak{X}$上でリプシッツ連続である。

$\Longleftrightarrow$ $\exists l \geqq 0$, $\| F(x) - F(y) \| \leqq l \|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{X}$上でリプシッツ連続な写像の集合を$\mathcal{F}_L$で示す。

[定義2・6] 写像$F: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$は準リプシッツ連続である。

$\Longleftrightarrow$ $\forall z \in \mathfrak{X}$, $\forall r > 0$, $\exists l(z, r) \geqq 0$,

$$\| F(x) - F(y) \| \leqq l \|x - y\|, \ \forall x, y \in \bar{B}[z ; r].$$

準リプシッツ連続な写像の集合を$\mathcal{F}_{q.L}$で示す。

(注2・4) 文献(28), (65)では, 局所的にリプシッツ連続(locally Lipschitz continuous)という語を用いているが, 局所的にリプシッツ連続であるということは, 次の定義のように定める方が妥当と思われるのでここでは, 準リプシッツ連続という語を用いる。

[定義2・7] 写像$F: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$は局所的にリプシッツ連続である。

$\Longleftrightarrow$ $\forall z \in \mathfrak{X}$, $\exists \delta(z) > 0$, $\forall r \in (0, \delta]$, $\exists l(z, r) \geqq 0$

$$\| F(x) - F(y) \| \leqq l \|x - y\|, \ \forall x, y \in \bar{B}[z ; r].$$

局所的にリプシッツ連続な写像の集合を$\mathcal{F}_{l.L}$で示す。

(注2・5) 定義2・1～2・7において定めた各写像のクラスの相互関係は, 各定義, 補題2・1, および系2・1から次のようになる。

$$C' \subset \mathcal{P}_{C'} \subset \mathcal{F}_{q.L} \subset \mathcal{F}_{l.L} \subset C \subset \mathcal{P}_C ;$$

$$\mathcal{P}_L \subset \mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_B.$$

[定義2・8]　$\mathcal{T}$を$\mathbb{R}_+$又は$\mathbb{Z}_+$とし，$\mathcal{F}^d \triangleq \{x:\mathcal{T}\to\mathbb{R}^d\}$とする．線形写像 ${}_\tau P_T:\mathcal{F}^d\to\mathcal{F}^d$，$\tau, T\in\mathcal{T}$，$\tau<T$を次式で定める．

$$({}_\tau P_T x)(t) \triangleq \begin{cases} x(t), & \tau\leqq t\leqq T, \\ \theta, & \text{その他}. \end{cases}$$

そして，特に$\tau=0$であるとき${}_0P_T$をP_Tで示す．

$\mathcal{X}$を線形空間$\mathcal{F}^d$上のノルム空間とし，$\mathcal{X}$のノルム$|\cdot|:\mathcal{X}\to\mathbb{R}_+$は，

i)　$\forall x\in\mathcal{X}$，$\forall T, T'\in\mathcal{T}$，$T\leqq T'$，$|P_T x|\leqq|P_{T'}x|$，

ii)　$\forall x\in\mathcal{X}$，$|P_T x|\to|x|$，$T\to\infty$

を満足するものとする．$\mathcal{X}$の拡張空間$\mathcal{X}_e$を次式で定める．

$$\mathcal{X}_e \triangleq \{x\in\mathcal{F}^d \mid P_T x\in\mathcal{X},\ \forall T\in\mathcal{T}\}$$

1)　写像$G:\mathcal{X}_e\to\mathcal{X}_e$は因果的である．$\Longleftrightarrow$ $P_T G P_T = P_T G$，$\forall T\in\mathcal{T}$；

2)　写像$G:\mathcal{X}_e\to\mathcal{X}_e$は零メモリである．$\Longleftrightarrow$ ${}_T P_T G\, {}_T P_T = {}_T P_T G$，$\forall T\in\mathcal{T}$．

(注2・6)　以下の議論においては，無元次元ノルム空間$\mathcal{X}$は定義2・8における条件i)，ii)を満足するものとする．又，l_p，L_pなどは全てそれを満足している．

因果的な写像については，次の性質が成り立つ．

[補題2・2][55]　写像$G:\mathcal{X}_e\to\mathcal{X}_e$は因果的とする．このとき，

i)　Gが$\mathcal{X}_e$上で有界．$\Longleftrightarrow$　Gが$\mathcal{X}$上で有界；

ii)　Gが$\mathcal{X}_e$上でリプシッツ連続．$\Longleftrightarrow$　Gが$\mathcal{X}$上でリプシッツ連続

なる関係が成り立つ．さらに，$G\in\mathcal{F}_B$として，

$$\gamma_e(G)\triangleq\inf\{a\in\mathbb{R}_+ \mid |Gx|_T\leqq a|x|_T+b,\ \forall x\in\mathcal{X}_e,\ \forall T\in\mathcal{T}\},$$

$$\gamma(G)\triangleq\inf\{a\in\mathbb{R}_+ \mid |Gx|\leqq a|x|+b,\ \forall x\in\mathcal{X}\}$$

とすると，$\gamma_e(G)=\gamma(G)$となる．但し，$|x|_T\triangleq|P_T x|$．

同様に，$G\in\mathcal{F}_L$として，

$$\tilde{\gamma}_e(G)\triangleq\inf\{l\in\mathbb{R}_+ \mid |Gx-Gy|_T\leqq l|x-y|_T,\ \forall x,y\in\mathcal{X}_e,\ \forall T\in\mathcal{T}\},$$

$$\tilde{\gamma}(G)\triangleq\inf\{l\in\mathbb{R}_+ \mid |Gx-Gy|\leqq l|x-y|,\ \forall x,y\in\mathcal{X}\}$$

とすると，$\tilde{\gamma}_e(G)=\tilde{\gamma}(G)$ となる。
（注2・7）　$\gamma(G)$，$\hat{\gamma}(G)$ をそれぞれ直流ゲイン，交流ゲインと呼ぶ。

2・3　λ関数，μ関数

2・3・1　定義と性質

この節では，以下の章において重要な役割を果すμ関数およびその拡張である λ関数を導入し，その性質を整理する。μ関数はDahlquist[6]とLozinskij[7]によって導入された量で，行列のメジャー，対数的ノルム (the logarithmic norm)，対数的微分 (the logarithmic derivative) などの名前で呼ばれることもある。

まず，μ関数の定義を示そう。

［定義2・9］[(6)~(10),(16)]　線形写像 $A:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，$A\in\mathscr{F}_B$ を与え，μ関数を次式で定義する。

$$\mu(A)\triangleq\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{\|I+\alpha A\|-1}{\alpha}\tag{2.2}$$

μ関数は線形写像に対して定義されているが，非線形写像への拡張の1つは次のように与えられる。

［定義2・10］[(28)]　写像 $F:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，$F\in\mathscr{F}_{LL}$，および任意の $z\in\mathscr{X}$，$r\in(0,\delta(z)]$ を与えて，局所的μ関数を次式で定義する。

$$\mu[F;z,r]=\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{\|I+\alpha F;z,r\|-1}{\alpha}\tag{2.3}$$

ここで，$\|\cdot;\cdot,\cdot\|$ は局所的リプシッツセミノルムと呼ばれ，

$$\|F;z,r\|\triangleq\sup_{x,y\in B[z;r],\,x\neq y}\frac{|Fx-Fy|}{|x-y|}\tag{2.4}$$

で与えられる。

（注2・8）　もし，$F\in\mathscr{F}_{g.L}$ ならば，(2.3)，(2.4)は任意の $r>0$ に対し定義できる。

(2.3), (2.4)から,

$$\mu[F;z,r]=\lim_{\alpha\downarrow 0}\sup_{x,y\in\bar{B}[z;r],\,x\neq y}\frac{|(I+\alpha F)x-(I+\alpha F)y|-|x-y|}{\alpha|x-y|} \tag{2.5}$$

となる。従って,Fが線形の場合は,

$$\mu[F;z,r]=\mu(F),\qquad {}^{\forall}z\in\mathcal{X},\ r>0 \tag{2.6}$$

となることは容易にわかる。

ところで,(2.5)右辺は,F∈$\mathcal{L}\ell\mathcal{L}$でないと定義されないが,次にFに関するそのような制限を緩和し,なおかつ局所的μ関数と同様な意味を有するλ関数と呼ぶ量を導入しよう。

[定義2・11] 写像$F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$,$x,y\in\mathcal{X}$,$x\neq y$を与えてλ関数を次式で定義する。

$$\lambda(F;x,y)=\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{|(I+\alpha F)x-(I+\alpha F)y|-|x-y|}{\alpha|x-y|}. \tag{2.7}$$

まず,(2.7)が意味を持つことを示そう。

[補助定理2・1] 写像$F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$,$x,y\in\mathcal{X}$,$x\neq y$を与えて,

$$\gamma(F;x,y)\triangleq\frac{|Fx-Fy|}{|x-y|}, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha;F,x,y)&\triangleq[\gamma(I+\alpha F;x,y)-1]/\alpha\\&=\frac{|(I+\alpha F)x-(I+\alpha F)y|-|x-y|}{\alpha|x-y|},\end{aligned}$$

$$\alpha>0 \tag{2.9}$$

とすると,

$$\kappa(\alpha;F,x,y)\geqq-\gamma(F;x,y),\ {}^{\forall}\alpha>0 \tag{2.10}$$

となる。又,$\alpha\mapsto\kappa(\alpha;F,x,y)$,$\alpha>0$は非減少関数である。

(証明) (2.10)は,(2.8),(2.9)およびノルムの性質から容易に得られる。次に,$\xi\triangleq x-y$,$\Delta F\triangleq Fx-Fy$とし,任意の$k\in(0,1)$

を与えると，

$$K(k\cdot\alpha;F,x,y)=\frac{|\xi+k\cdot\alpha\cdot\Delta F|-|\xi|}{k\cdot\alpha\cdot|\xi|}$$

$$\leqq\frac{k|\xi+\alpha\Delta F|+(1-k)|\xi|-|\xi|}{k\cdot\alpha\cdot|\xi|}$$

$$=\frac{|\xi+\alpha\Delta F|-|\xi|}{\alpha|\xi|}$$

$$=K(\alpha;F,x,y),\quad {}^\forall\alpha>0$$

となる。従って，$\alpha\mapsto K(\alpha;F,x,y)$，$\alpha>0$ は非減少関数である。

（証明終）

［定理2・1］　写像$F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$，$x,y\in\mathcal{X}$，$x\neq y$ を与えるとき，(2.7)の値は唯一存在する。

（証明）　(2.7)，(2.9)から，

$$\lambda(F;x,y)=\lim_{\alpha\downarrow 0}K(\alpha;F,x,y)\tag{2.11}$$

となる。$\{\alpha_n>0\}_{n=0}^{\infty}$ を0に収束する任意の単調減少列とする。補助定理2・1から，

$$K(\alpha_n;F,x,y)\geqq K(\alpha_m;F,x,y),\quad {}^\forall n,m\in\mathbb{Z}_+,\ n\leqq m;$$
$$K(\alpha_n;F,x,y)\geqq-\gamma(F;x,y),\quad {}^\forall n\in\mathbb{Z}_+$$

が成り立つから，数列$\{K(\alpha_n;F,x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する。一方，$\{\alpha_n\}$は任意の単調減少列であるから，(2.11)右辺の値は唯一存在する。

（証明終）

（注2.9）　写像$F\in\mathcal{F}_{LL}$，$z\in\mathcal{X}$，$r\in(0,\delta(z)]$を与え，

$$\tilde{K}(\alpha;F,z,r)\triangleq[\|I+\alpha F;z,r\|-1]/\alpha,\quad \alpha>0\tag{2.12}$$

とすると，補助定理2・1と同様にして，

$$\tilde{K}(\alpha;F,z,r)\geqq-\|F;z,r\|,\quad {}^\forall\alpha>0\tag{2.13}$$

が成り立ち，さらに，$\alpha\mapsto\tilde{K}(\alpha;F,z,r)$，$\alpha>0$は非減少関数となる。そしてこれから，(2.3)の値が唯一存在することが示される。

さて次に，λ関数，μ関数の性質を示そう．

［定理2・2］　写像F，$G:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$，$x, y\in\mathcal{X}$，$x\neq y$を与える．$\lambda$関数は，次の性質(a)〜(i)を有する．

(a)　$\lambda(\pm I; x, y)=\pm 1$　(複号同順)；

(b)　$-\gamma(F;x,y)\leqq -\lambda(-F;x,y)\leqq\lambda(F;x,y)\leqq\gamma(F;x,y)$；

(c)　$\lambda(\beta\cdot F;x,y)=\beta\cdot\lambda(F;x,y)$，$^\forall\beta\geqq 0$；

(d)　$\lambda(\beta I+F;x,y)=\beta+\lambda(F;x,y)$，$^\forall\beta\in\mathbb{R}$；

(e)　$\lambda(F+G;x,y)\leqq\lambda(F;x,y)+\lambda(G;x,y)$　；

(f)　$\lambda(F+G;x,y)\geqq\lambda(F;x,y)-\lambda(-G;x,y)$　；

(g)　$|Fx-Fy|\geqq\lambda(F;x,y)\,|x-y|$；

(h)　$F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$が全単射で，$\lambda(F;x,y)>0$ならば，

$$|F^{-1}x-F^{-1}y|\leqq[1/\lambda(F;x,y)]\cdot|x-y|\ ;$$

(i)　$Q:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$を線形，全単射とし，$|x|_Q\triangleq|Qx|$とすると，

$$\lambda_Q(F;x,y)=\lambda(QFQ^{-1};Qx,Qy).$$

(証明)　(a)．定義から明らか．

(b)　$\lambda(F;x,y)\leqq\gamma(F;x,y)$

および，

$$-\gamma(F;x,y)\leqq-\lambda(-F;x,y)$$

は定義とノルムの性質から明らか．次に，

$$\xi\triangleq x-y,$$

$$\Delta F\triangleq Fx-Fy$$

とすると，ノルムの性質から，

$$\begin{aligned}&\mu(\alpha;F,x,y)+\mu(\alpha;-F,x,y)\\&=\frac{|\xi+\alpha\cdot\Delta F|-|\xi|+|\xi-\alpha\cdot\Delta F|-|\xi|}{\alpha\cdot|\xi|}\\&\geqq\frac{2|\xi+\alpha\cdot\Delta F+\xi-\alpha\Delta F|-2|\xi|}{\alpha\cdot|\xi|}\\&\geqq 0\quad,\ ^\forall\alpha>0\end{aligned}$$

となる。上式と(2.11)から,

$$\lambda(F;x,y)+\lambda(-F;x,y)\geqq 0$$

を得る。

(c) $\beta=0$ のときは明らかであるから, $\beta>0$ とする。

$$\pi(\hat{\alpha};\beta F;x,y)=\beta\cdot\frac{|\xi+\hat{\alpha}\beta\cdot\Delta F|-|\xi|}{\hat{\alpha}\cdot\beta|\xi|}$$

$$=\beta\cdot\pi(\alpha;F,x,y),\quad {}^{\forall}\alpha=\hat{\alpha}\beta>0$$

となる。上式と(2.11)から(c)を得る。

(d) $\hat{\alpha}>0$ を $1+\hat{\alpha}\beta>0$ となるように十分小さくとると,

$$\pi(\hat{\alpha};\beta I+F,x,y)=\frac{|\xi+\hat{\alpha}(\beta\xi+\Delta F)|-|\xi|}{\hat{\alpha}|\xi|}$$

$$=\frac{|(1+\hat{\alpha}\beta)\xi+\hat{\alpha}\Delta F|-(1+\hat{\alpha}\beta)|\xi|}{\hat{\alpha}|\xi|}+\beta$$

$$=\frac{|\xi+\alpha\Delta F|-|\xi|}{\alpha|\xi|}+\beta,\quad \alpha=\frac{\hat{\alpha}}{1+\hat{\alpha}\beta}$$

$$=\pi(\alpha;F,x,y)+\beta,\quad {}^{\forall}\alpha>0$$

となる。上式と(2.11)から(d)を得る。

(e) $\Delta G=Gx-Gy$

とすると,

$$\pi(\hat{\alpha};F+G,x,y)=\frac{|\xi+2\cdot\hat{\alpha}\Delta F+\xi+2\hat{\alpha}\Delta G|-2|\xi|}{2\hat{\alpha}\cdot|\xi|}$$

$$\leqq\frac{|\xi+2\hat{\alpha}\Delta F|-|\xi|}{2\hat{\alpha}|\xi|}+\frac{|\xi+2\hat{\alpha}\Delta G|-|\xi|}{2\hat{\alpha}|\xi|}$$

$$=\pi(\alpha;F,x,y)+\pi(\alpha;G,x,y),\quad {}^{\forall}\alpha=2\hat{\alpha}>0$$

となる。上式と(2.11)から(e)を得る。

(f) (e)から,次式を得る。

$$\lambda(F+G-G;x,y)\leqq\lambda(F+G;x,y)+\lambda(-G;x,y)$$

$$\therefore\ \lambda(F;x,y)-\lambda(-G;x,y)\leqq\lambda(F+G;x,y).$$

(g) $\alpha>0$ を与えると，

$$\frac{|Fx-Fy|}{|x-y|}=\frac{|\xi+\alpha\cdot\Delta F-\xi|}{\alpha|\xi|}$$

$$\geqq\frac{|\xi+\alpha\Delta F|-|\xi|}{\alpha|\xi|}$$

$$=h(\alpha;F,x,y)$$

を得る．上式と (2.11) から (g)を得る．

(h) 仮定と (f) から

$$|x-y|=|FF^{-1}x-FF^{-1}y|$$

$$\geqq\lambda(F;x,y)|F^{-1}x-F^{-1}y|$$

$$\therefore|F^{-1}x-F^{-1}y|\leqq[1/\lambda(F;x,y)]\cdot|x-y|.$$

(i) 定義から明らか．

（証明終）

［補題2.3］(6)〜(10),(66) 線形写像 A, $B:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$, $A,B\in\mathcal{F}_B$ を与える．μ関数を次の性質(a')〜(j')を有する．

(a') $\mu(\pm I)=\pm1$　（複号同順）；

(b') $-\|A\|\leqq-\mu(-A)\leqq\mu(A)\leqq\|A\|$；

(c') $\mu(\beta A)=\beta\cdot\mu(A)$, $\forall\beta\geqq0$；

(d') $\mu(\beta I+A)=\beta+\mu(A)$, $\forall\beta\in\mathbb{R}$；

(e') $\mu(A+B)\leqq\mu(A)+\mu(B)$；

(f') $\mu(A+B)\geqq\mu(A)-\mu(-B)$；

(g') $|Ax|\geqq\{-\mu(-A)\}|x|$, $\forall x\in\mathbb{X}$；

(h') $A:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ が全単射で，$-\mu(-A)>0$ ならば，

$$\|A^{-1}\|\leqq1/[-\mu(-A)]；$$

(i') $Q:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ を線形，全単射とし，$|x|_Q=|Qx|$ とすると，

$$\mu_Q(A)=\mu(QAQ^{-1}).$$

(j') $\mathbb{X}=\mathbb{R}^d$　($A\in\mathbb{R}^{d\times d}$) とすると，

$$-\mu(-A)\leqq Re[\lambda_i(A)]\leqq\mu(A),\quad\forall i\in\bar{d}.$$

(注2・10)　性質(a')～(f')，(j')はDahlquist[6]とLozinskij[7]によって示された。そして，(g')～(i')はDesoerとHaneda[9]によって示された。又，局所的μ関数は，μ関数と同様な性質を有する[28]。

さて次に，無限次元ノルム空間における因果的な写像（定義2・8）に対するλ関数，μ関数の性質について考えよう。

[補助定理2・2]　因果的な写像 $F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ を与える。任意に $T\in\mathcal{T}$ を与えて，ノルム空間 $\mathcal{X}_T$ を，

$$\mathcal{X}_T \triangleq \{x_T\in\mathcal{F}^d \mid x_T=P_Tx_T,\ |x_T|_T=|P_Tx_T|<\infty\}\subset\mathcal{X}$$

で定める。但し，P_T は定義2・8で与えられる。

1)　$F_T\triangleq P_TF$ とすると，F_T は F の $\mathcal{X}_T$ への制限，$F/\mathcal{X}_T$ となる。さらに，F_T は $\mathcal{X}_T$ からそれ自身への因果的な写像となる；

2)　ノルム $|\cdot|:\mathcal{X}\to\mathbb{R}_+$，$|\cdot|_T:\mathcal{X}_T\to\mathbb{R}_+$ によって誘導されるλ関数を，それぞれ $\lambda(\cdot;\cdot,\cdot)$，$\lambda_T(\cdot;\cdot,\cdot)$ で示すと，

$$\inf_{x,y\in\mathcal{X},\,x\neq y}\lambda(F;x,y)\leqq\inf_{x_T,y_T\in\mathcal{X},\,x_T\neq y_T}\lambda_T(F_T;x_T,y_T),$$

$$\sup_{x_T,y_T\in\mathcal{X}_T,\,x_T\neq y_T}\lambda_T(F_T;x_T,y_T)\leqq\sup_{x,y\in\mathcal{X},\,x\neq y}\lambda(F;x,y)$$

が成り立；

3)　F は線形かつ有界とする。$|\cdot|$，$|\cdot|_T$ によって誘導されるμ関数を，それぞれ $\mu(\cdot)$，$\mu_T(\cdot)$ で示すと，

$$-\mu(-F)\leqq-\mu_T(-F_T)\leqq\mu_T(F_T)\leqq\mu(F)$$

が成り立つ。

(証明)　1). $\mathcal{X}_T$ の定め方と定義2・8から明らか。

2)　$\mathcal{X}_T\subset\mathcal{X}$ に注意すると1)から明らか。

3)　$\mathcal{X}_T\subset\mathcal{X}$ と1)から，$\|F_T\|_T\leqq\|F\|$ となる。このことと補題2・3，(b')から3)を得る。　　(証明終).

2・3・2 λ関数とμ関数の関係

さて前節では，μ関数の定義域を拡張するという観点からλ関数を導入し，λ関数とμ関数がよく似た性質を有していることを示したが，この節では，両者の量的な関係を明らかにする。

まず，次の補助定理を示す。

[補助定理2・3] 写像$F:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，$F\in\mathscr{F}_{\ell.L}$，$z\in\mathscr{X}$，$r\in(0,\delta(z)]$を与える。このとき，次式が成り立つ。

$$-\mu[-F;z,r]\leqq-\lambda(-F;x,y)\leqq\lambda(F;x,y)\leqq\mu[F;z,r],\quad {}^\forall x,y\in\bar{B}[z,r],\ x\neq y.$$

(証明) 任意に$x,y\in\bar{B}[z;r]$，$x\neq y$を与えると

$$\begin{aligned}\lambda(F;x,y)&=\lim_{\alpha\downarrow0}\frac{|(I+\alpha F)x-(I+\alpha F)y|-|x-y|}{\alpha|x-y|}\\&\leqq\lim_{\alpha\downarrow0}\sup_{\xi,\eta\in\bar{B}[z;r],\xi\neq\eta}\frac{|(I+\alpha F)\xi-(I+\alpha F)\eta|-|\xi-\eta|}{\alpha|\xi-\eta|}\\&=\lim_{\alpha\downarrow0}\frac{\|I+\alpha F;z,r\|-1}{\alpha}\\&=\mu[F;z,r]\end{aligned}\tag{2.14}$$

を得る。同様にして，

$$-\lambda(-F;x,y)\geqq-\mu[-F;z,r],\quad {}^\forall x,y\in\bar{B}[z;r],\ x\neq y$$

を得る。上式と(2.14)および定理2・2，(b)から結論を得る。

(証明終)

この補助定理から，$F\in\mathscr{F}_{\ell.L}$，$z\in\mathscr{X}$，$r\in(0,\delta(z)]$に対し，

$$-\mu[-F;z,r]\leqq\inf_{x,y\in\bar{B}[z,r],\,x\neq y}\lambda(F;x,y)\tag{2.15}$$

および，

$$\mu[F;z,r]\geqq\sup_{x,y\in\bar{B}[z;r],\,x\neq y}\{-\lambda(-F;x,y)\}\tag{2.16}$$

が成り立つことがわかる。ところで，(2.15)，(2.16)において等号の成

り立つ場合がある。それは，Fが線形写像である場合や$\mathscr{X}$がヒルベルト空間の場合などである。$\mathscr{X}$がヒルベルト空間の場合は後（補題2・8，注2・10）でふれることにして，ここでは，Fが線形写像である場合についてのみ示す。

［定理2・3］　写像$A:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$は有界な線形写像とする。このとき，

$$-\mu(-A)=-\mu[-A;z,r]$$
$$=\inf_{x,y\in\bar{B}[z;r],\,x\neq y}\lambda(F;x,y),\quad {}^{\forall}z\in\mathscr{X},\ {}^{\forall}r>0 \tag{2.17}$$

および，

$$\mu(A)=\sup_{x,y\in\bar{B}[z;r],\,x\neq y}\{-\lambda(-F;x,y)\}\quad {}^{\forall}z\in\mathscr{X},\quad {}^{\forall}r>0 \tag{2.18}$$

が成り立つ。

（証明）　(2.18)は(2.17)から直ちに得られるから，(2.17)のみ示す。まず，Aの線形性から，

$$-\mu(-A)=-\mu[-A;z,r],\quad {}^{\forall}z\in\mathscr{X},\quad {}^{\forall}r>0 \tag{2.19}$$

および，

$$\inf_{x,y\in\bar{B}[z,r],\,x\neq y}\lambda(A;x,y)=\inf_{|x|=1}\lambda(A;x,\theta) \tag{2.20}$$

が成り立つ。従って，(2.15)から

$$-\mu(-A)\leqq\inf_{|x|=1}\lambda(A;x,\theta) \tag{2.21}$$

を得る。さて，$\{\alpha_k>0\mid \alpha_k<1/\|A\|,\ k\in\mathbb{N}\}$を0に収束する任意の単調減少列とする。そして各$k\in\mathbb{N}$に対し，$\{x^{k,n}\mid |x^{k,n}|,\ n\in\mathbb{N}\}$を

$$|(I-\alpha_k A)x^{k,n}|\leqq|(I-\alpha_k A)x^{k,m}|,\quad {}^{\forall}n,m\in\mathbb{N},\quad n\leqq m;$$
$$|(I-\alpha_k A)x^{k,n}|\to\|I-\alpha_k A\|,\quad n\to\infty$$

なる任意の数列とする。このような$\{x^{k,n}\}$の存在は，ノルムの定義から

保証される。このとき，$\alpha \mapsto [\|I-\alpha_k A\|-1]/\alpha$，$\alpha>0$ が非減少関数であるから*，

$$\frac{1-\|I-\alpha_k A\|}{\alpha_k} \leqq -\mu(-A), \quad {}^{\forall}k\in\mathbb{N} \tag{2.22}$$

が成り立つ。一方 $\{x^{k,n}\}$ の定め方から，

$${}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\forall}k\in\mathbb{N},\ {}^{\exists}N(\varepsilon,k)\in\mathbb{N},\ {}^{\forall}n\geqq N,$$
$$\|I-\alpha_k A\| < |(I-\alpha_k A)x^{k,n}| + \alpha_k\cdot\varepsilon/2$$

を得る。従って，上式と（2.22）から，

$${}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\forall}k\in\mathbb{N},\ {}^{\exists}N(\varepsilon,k)\in\mathbb{N},\ {}^{\forall}n\geqq N,$$
$$\frac{1-|(I-\alpha_k A)x^{k,n}|}{\alpha_k} - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \frac{1-\|I-\alpha_k A\|}{\alpha_k}$$
$$\leqq -\mu(-A)$$

を得る。$|x^{k,n}|=1$ であることに注意すると，上式から，

$${}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\forall}k\in\mathbb{N},\ {}^{\exists}N(\varepsilon,k)\in\mathbb{N},\ {}^{\forall}n\geqq N,$$
$$-\mu_-(\alpha_k;-A,x^{k,n}) = \frac{|x^{k,n}|-|(I-\alpha_k A)x^{k,n}|}{\alpha_k\cdot|x^{k,n}|}$$
$$\leqq -\mu(-A)+\varepsilon/2 \tag{2.23}$$

を得る。さて次に，任意に与えた $\varepsilon\in(0,1)$ に対し $K(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ を，$2\alpha_k\cdot\|A\|^2 < \varepsilon/2$ となるようにえらぶ。このとき，次式が成り立つ

$$(I+\alpha_k A)^{-1} = (I-\alpha_k A) + \alpha_k^2(I+\alpha_k A)^{-1}A^2, \ ^{**} \tag{2.24}$$

$$|(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}| \geqq \inf_{|x|=1}|(I+\alpha_k A)^{-1}x|$$
$$= 1/\|I+\alpha_k A\|$$
$$\geqq 1/(1-\alpha_k\|A\|). \tag{2.25}$$

従って，

$$\frac{|x^{k,n}|-|(I-\alpha_k A)x^{k,n}|}{\alpha_k|x^{k,n}|} - \frac{|x^{k,n}|-|(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|}{\alpha_k|(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k,n}|}$$

---

*　注2・9とAが線形であることによる。

**　ノイマン展開を用いる。

$$= \frac{\{|x^{k.n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k.n}| \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|}$$

$$- \frac{\{|x^{k.n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k.n} + \alpha_k^2 A^2 (I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|\} \cdot |x^{k.n}|}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|} \quad *$$

$$\leqq \frac{|\{|x^{k.n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k.n}|\}| \cdot |\{|(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}| - |x^{k.n}|\}|}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|}$$

$$+ \alpha_k \cdot \|A\|^2$$

$$\leqq \frac{\alpha_k \|A\| \cdot \{\alpha_k \|A\| + \alpha_k^2 \|A\|^2 \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|\}}{\alpha_k \cdot |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|} + \alpha_k \|A\| \quad *$$

$$\leqq \alpha_k \cdot \|A\|^2 (1-\alpha_k \|A\|) + \alpha_k^2 \|A\|^3 + \alpha_k \|A\|^2 \quad **$$

$$= 2 \cdot \alpha_k \|A\|^2$$

$$< \varepsilon/2, \quad {}^\forall k \geqq K \tag{2.26}$$

を得る。同様に,

$$\frac{|x^{k.n}| - |(I-\alpha_k A)x^{k.n}|}{\alpha_k |x^{k.n}|} - \frac{|x^{k.n}| - |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|}{\alpha_k |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|}$$

$$\geqq -\varepsilon/2, \quad {}^\forall k \geqq K \tag{2.27}$$

を得る。一方, $\xi^{k.n} \triangleq (I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}$ とおくと, $\alpha \mapsto \pi(\alpha; A, \xi^{k.n}, \theta)$, $\alpha > 0$ が非減少関数であることに注意すると***

$$\lambda(A; \xi^{k.n}, \theta) \leqq \pi(\alpha_k; A, \xi^{k.n}, \theta)$$

$$= \frac{|(I+\alpha_k A)\xi^{k.n}| - |\xi^{k.n}|}{\alpha_k |\xi^{k.n}|}$$

$$= \frac{|x^{k.n}| - |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|}{\alpha_k |(I+\alpha_k A)^{-1}x^{k.n}|}$$

を得る。上式と (2.26), (2.27), および (2.23) から,

---

* (2.24) および $|x^{k.n}| = 1$ を用いる

** (2.25) を用いる。

*** 補助定理 2・1 参照。

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$. $^\forall k \geqq K(\varepsilon)$, $^\exists N(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$. $^\forall n \geqq N$,

$$\lambda(A; \xi^{k.n}, \theta) \leqq -K(\alpha_k; -A, x^{k.n}, \theta) + \varepsilon/2$$
$$\leqq -\mu(-A) + \varepsilon$$

を得る。上式とAの線形性から,

$$\inf_{|x|=1} \lambda(A; x, y) = \inf_{x \neq \theta} \lambda(A; x, y)$$
$$\leqq \lambda(A; \xi^{k.n}, \theta)$$
$$\leqq -\mu(-A) + \varepsilon$$

が成り立つ。$\varepsilon > 0$は任意であるから, 上式と(2.21)から(2.17)を得る

(証明終)

(注2・11) 定理2・3は, 定理2・2, (g), 補題2・3, (g')の観点からいうと有界な線形写像に対しては同じ評価を与えることを示している。この点については, 2・3・4においてもう一度説明する。

2・3・3 λ関数, μ関数の値

λ関数, μ関数の値は, 定義からわかるようにノルムに依存している。この節では, 種々のノルムおよび写像を与えて, それに対するλ関数, μ関数の値, 又はその評価を与える。

まず, 有限次元空間 ($X = \mathbb{R}^d$)の場合について考える。

[補題2・4](6)~(10), (66) 行列$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$を与える。

i) l_1ノルム. ノルムを,

$$|x|_1 \triangleq \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}^d$$

で与えるとき, 次式が成り立つ.

$$\mu_1(A) = \max_j \{a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\},$$

$$-\mu_1(-A) = \min_j \{a_{jj} - \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\}.$$

ii) l_2ノルム. ノルムを,

$$|x|_2 \triangleq (\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2)^{1/2}, \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}^d$$

で与えると，次式が成り立つ。

$$\mu_2(A) = \max_i \lambda_i\left(\frac{A+A^{tr}}{2}\right)$$

$$-\mu_2(-A) = \min_i \lambda_i\left(\frac{A+A^{tr}}{2}\right).$$

iii) l_∞ ノルム．ノルムを

$$|x|_\infty \triangleq \max\{|x_i|,\ i\in\bar{d}\}$$

で与えると，次式が成り立つ。

$$\mu_\infty(A) = \max_i \left\{a_{ii} + \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\}$$

$$-\mu_\infty(-A) = \min_i \left\{a_{ii} - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\}.$$

（注2・12）　この補題は，Dahlquist[7]とLozinskij[8]によって示された。

［補題2・5］　ノルム$|\cdot|_\phi : R^d \to R^d$を，

$$|x|_\phi \triangleq \max\left\{\sum_{i\in I(x)} x_i\ ,\ -\sum_{j\in J(x)} x_j\right\},\quad {}^\forall x\in R^d \tag{2.28}$$

で与える。但し，$I(\cdot)$，$J(\cdot)$は次式で与えられる。

$$I(x) \triangleq \{i\in\bar{d} \mid x_i > 0\},\quad {}^\forall x\in R^d.$$

$$J(x) \triangleq \{j\in\bar{d} \mid x_j < 0\},\quad {}^\forall x\in R^d.$$

i) 行列$A=(a_{ij})\in R$，$a_{ij}\geqq 0$，$i\neq j$に対して，次式が成り立つ。

$$-\mu_1(-A) \leqq -\mu_\phi(-A) \leqq \mu_\phi(A) \leqq \mu_1(A).$$

ii) $b, e\in R^d$，$b_i\geqq 0$，$e_i=1$，$i\in\bar{d}$に対して，次式が成り立つ。

$$-\mu_\phi(-be^{tr}) \geqq 0.$$

（証明）　i)．　補題2・3，(b')に注意すると，

$$\mu_\phi(A) \leqq \mu_1(A)$$

のみ示せばよい。このことは，定理2・3から，任意に与えた$x\in R^d$，$x\neq\theta$に対し，

$$\lambda_\phi(A; x, \theta) \leqq \mu_1(A) \tag{12.29}$$

を示すのと等価である。任意に$x \neq \theta$を与える。$\alpha_0 > 0$を

$$1-\alpha\sum_{i=1}^{d}|a_{ij}|>0, \quad {}^{\forall}j\in\bar{d}, \quad {}^{\forall}\alpha\in(0,\alpha_0]$$

となるようにえらぶ。$I \triangleq I(x)$, $I_\alpha \triangleq I(x+\alpha Ax)$, $J \triangleq J(x)$, $J_\alpha \triangleq J(x+\alpha Ax)$とする。このとき，$\alpha>0$を十分小さくとると，$I \subset I_\alpha$, $J \subset J_\alpha$であることに注意する。定義によって，

$$|x+\alpha Ax|_\phi = \max\left\{\sum_{i\in I_\alpha}(x_i+\alpha\sum_{j=1}^{d}a_{ij}x_j),\ -\sum_{i\in J_\alpha}(x_i+\alpha\sum_{j=1}^{d}a_{ij}x_j)\right\} \tag{2.30}$$

である。一方，補題2・4・i)から$\alpha\in(0,\alpha_0)$を十分小さくとると，

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I_\alpha}(x_i+\alpha\sum_{j=1}^{d}a_{ij}x_j) &= \sum_{j\in I_\alpha}x_i+\alpha\sum_{j=1}^{d}(\sum_{i\in I_\alpha}a_{ij})x_j\\ &\leqq \sum_{j\in I_\alpha}(1+\alpha a_{ij}+\alpha\sum_{i\neq j}|a_{ij}|)x_j\\ &\leqq [1+\alpha\mu_1(A)](\sum_{j\in I}x_j)\end{aligned} \tag{2.31}$$

が成り立つ，同様に$\alpha\in(0,\alpha_0)$を十分小さくとると

$$-\sum_{i\in J_\alpha}(x_i+\alpha\sum_{j=1}^{d}a_{ij}x_j) \leqq [1+\alpha\mu_1(A)](-\sum_{i\in J}x_i) \tag{2.32}$$

が成り立つ。従って，(2.30)〜(2.32)から，$\alpha\in(0,\alpha_0)$を十分小さくとると，

$$|x+\alpha Ax|_\phi \leqq |x|_\phi+\alpha\mu_1(A)\cdot|x|_\phi$$

を得る。上式とλ関数の定義から，(2.29)を得る。

ii)，任意に$x\neq\theta$を与え，I, I_α, J, J_αを上に同様に定める。

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I_\alpha}(x_i+\alpha\sum_{j=1}^{d}b_i x_j) &= \sum_{i\in I_\alpha}x_i+\alpha(\sum_{i\in I_\alpha}b_i)(\sum_{j=1}^{d}x_j)\\ &= \sum_{i\in I_\alpha}x_i+\alpha(\sum_{i\in I_\alpha}b_i)(\sum_{i\in I}x_i+\sum_{j\in J}x_j), \quad {}^{\forall}\alpha>0\end{aligned}$$

$$\sum_{i\in J_\alpha}(x_i+\alpha\sum_{j=1}^{d}b_i x_j) = \sum_{i\in J_\alpha}x_i+\alpha(\sum_{i\in J_\alpha}b_i)(\sum_{i\in I}x_i+\sum_{j\in J}x_j), \quad {}^{\forall}\alpha>0$$

が成り立つから，$b_i \geqq 0$, $i\in\bar{d}$に注意すると，

$$|x+\alpha\cdot b\cdot e^{tr}x|_\phi \geqq |x|_\phi, \quad {}^{\forall}\alpha>0$$

を得る。従って

$$\lambda(be^{tr};x,\theta)\geqq 0$$

となる。従って，定理2・3から ii)を得る。　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

[補助定理2・4]　写像 $f:R\to R$ を与える。このとき

$$\lambda(f;\alpha,\beta)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta},\quad {}^{\forall}\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$$

が成り立つ。

(証明)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(省略)

[補題2・6]　写像 $G:R^d\to R^d$ を，

$$G(x)=[g_1(x),\cdots,g_d(x)]^{tr},\tag{2.33}$$

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j),\quad {}^{\forall}x\in R^d$$

で与える。但し，$a_{ij}:R\to R$，$i,j\in\bar{d}$．

i)　もし，次の条件：

$$\lambda(a_{jj};\alpha,\beta)-\sum_{i\neq j}|\lambda(a_{ij};\alpha,\beta)|\geqq m,\ {}^{\forall}\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta,\ {}^{\forall}j\in\bar{d}$$

が成り立つならば，次式が成り立つ。

$$\lambda_1(G;x,y)\geqq m,\quad {}^{\forall}x,y\in R^d,\ x\neq y.$$

ii)　もし，次の2条件：

$$a_{ij}(\alpha^*)=0,\quad {}^{\forall}i,j\in\bar{d};$$

$$\lambda(a_{jj};\alpha,\alpha^*)-\sum_{i\neq j}|\lambda(a_{ij};\alpha,\alpha^*)|\geqq m,\quad {}^{\forall}j\in\bar{d},\ \alpha\neq\alpha^*$$

が成り立つならば，次式が成り立つ。

$$\lambda_1(G;x,\alpha^*e)\geqq m,\quad {}^{\forall}x\in R^d,\ x\neq\alpha^*e,$$

(証明)　補題2・4と同様にして証明できる。　　　　　　　　　　　　(証明終)

[補題2・7]　写像 $H:R^d\to R^d$ を，

$$H(x)=[b_1(e^{tr}x),\cdots,b_d(e^{tr}x)]^{tr}$$

で与える。但し，$b_i:R\to R$，$i\in\bar{d}$．

i)　もし，

$$\lambda(b_i;\alpha,\beta)\geqq 0,\quad {}^{\forall}\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$$

が成り立つならば，次式が成り立つ。

$$\lambda(H;x,y)\geqq 0,\quad {}^{\forall}x,y\in R^d,\ x\neq y.$$

ii) もし，ある$\alpha^* \in R$に対し，

$$b_i(\alpha^*) = 0, \quad {}^\forall i \in \bar{d};$$

$$\lambda(b_i;\alpha,\alpha^*) \geqq 0, \quad {}^\forall \alpha \in R,\ \alpha \neq \alpha^*,\ {}^\forall i \in \bar{d}$$

が成り立つならば，次式が成り立つ。

$$\lambda(H;x,\alpha^* e) \geqq 0, \quad {}^\forall x \in R^d,\ x \neq \alpha^* e.$$

（証明） i) 任意に$x,\ y \in R^d,\ x \neq y$を与える。

$$H(x)-H(y) = \hat{b}(x,y)\cdot e^{tr}(x-y),$$

$$\hat{b}_i(x,y) = \begin{cases} \lambda(b_i;e^{tr}x,\ e^{tr}y) \geqq 0, & i \in \bar{d},\ e^{tr}x \neq e^{tr}y \\ 0, & i \in \bar{d},\ e^{tr}x = e^{tr}y \end{cases}$$

が成り立つから，補題2．5，ii)と同様にして証明できる。

ii) i)と同様にして証明できる。

［補題2．8］ 写像$F: R^d \to R^d$，$F \in \mathcal{P}c^1$を与える。このとき，

$$\lambda(F;x,y) \leqq \sup_{z \in I[x,y]} \mu[F'(z)], \quad {}^\forall x,y \in R^d,\ x \neq y$$

が成り立つ。 但し，$I[x,y] \triangleq \{z \in R^d \mid z = \tau x + (1-\tau)y,\ \tau \in [0,1]\}$.

（証明） 任意に$x,\ y \in R^d,\ x \neq y$を与える。

$$\lambda(F;x,y) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{|(I+\alpha F)x-(I+\alpha F)y|-|x-y|}{\alpha|x-y|}$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{|[I+\alpha\int_0^1 F'(\tau x+(1-\tau)y)d\tau](x-y)|-|x-y|}{\alpha|x-y|} \quad *$$

$$\leqq \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\|I+\alpha\int_0^1 F'(\tau x+(1-\tau)y)d\tau\|-1}{\alpha}$$

$$= \mu\left[\int_0^1 F'(\tau x+(1-\tau)y)d\tau\right]$$

$$\leqq \int_0^1 \mu[F'(\tau x+(1-\tau)y)]d\tau \quad **$$

$$\leqq \sup_{z \in I[x,y]} \mu[F'(z)].$$

（証明終）

---

* 補題2．1による

* 補題2．3，(c)，(e)による。

[補題2・9][67]　行列$A\in\mathbb{R}^{d\times d}$を与える。

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},\ A_{ij}\in\mathbb{R}^{n_i\times n_j},\quad \sum_{j=1}^{n} n_i=d$$

とし，ノルム$|\cdot|:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$は

$$|x|=|y|_0,\quad y=[|x_1|_1,\cdots,|x_n|_n]^{tr},\ x_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ {}^\forall x\in\mathbb{R}^d$$

を満足するとする。但し，$|\cdot|_i:\mathbb{R}^{n_i}\to\mathbb{R}_+$，$i=0,1,\cdots,n$，$n_0=n$はノルムを示し，$|\cdot|_0$は単調なノルムとする*。

このとき，$\hat{A}=(\hat{a}_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$を，

$$\hat{a}_{ij}=\begin{cases}\mu_i(A_{ii}), & i=j\\ \|A_{ij}\|_{i,j}, & i\neq j\end{cases}$$

とすると，

$$\max_i\{\mu_i(A_{ii})\}\leqq\mu(A)\leqq\mu_0(\hat{A})$$

が成り立つ**。但し，$\mu_i(\cdot)$，$i=0,1,\cdots,n$は$|\cdot|_i$ノルムによって定められるμ関数を示し，$\|\cdot\|_{i,j}$，$i,j\in\bar{n}$は，

$$\|A_{ij}\|_{ij}\triangleq\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{n_j},\,\xi\neq 0}\frac{|A_{ij}\xi|_i}{|\xi|_j}$$

で与えられる。

[系2・2]　ノルム$|\cdot|:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$を$l_p$ノルム，$p\in[1,\infty]$，又は，

$$|x|_D\triangleq|Dx|_p,\quad D=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_d),\ \alpha_i>0,\ i\in\bar{d},\quad p\in[1,\infty]$$

で与えるならば，補題2・9の結果はそのまま成り立つ。

(証明)　(省略)

---

* 任意の$x^i\in[x^i_1,\cdots,x^i_n]^{tr}\in\mathbb{R}^n$，$i\in\bar{2}$；$|x^1_j|\geqq|x^2_j|$，$j\in\bar{n}$に対し，$|x^1|_0\geqq|x^2|_0$となるとき，$|\cdot|_0$は単調なノルムといわれる[12]。

** 文献(67)では，$|\cdot|_j:\mathbb{R}^{n_j}\to\mathbb{R}_+$，$j\in\bar{n}$が単調なノルムであることを要求しているが，この条件は必要でなく，$|\cdot|_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$が単調なノルムであることが必要である。

次に，無限次元空間の場合について考える．

[補題2・10]　$\mathscr{X}$を線形空間$\mathscr{F}^d$上のノルム空間とする*．

写像$\tilde{F}: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$を，

$$(\tilde{F}x)(t) = F[x(t)], \quad {}^\forall x \in \mathscr{X}, \quad {}^\forall t \in \mathscr{T}$$

で与える．但し，$F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

i)　$\mathscr{X}$のノルムを，

$$|x|_\infty \triangleq \sup\{|x(t)|_a,\ t \in \mathscr{T}\}$$

で与える。但し，$|\ |_a: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$は任意に指定されたノルムを示す．

このとき，

$$\inf_{\xi,\eta \in \bar{B}[\theta, 2|x-y|_\infty] \subset \mathbb{R}^d,\ x \neq y} \lambda_a(F; x, y) \leqq \lambda_\infty(\tilde{F}; x, y).$$

$${}^\forall x, y \in \mathscr{X},\quad x \neq y$$

が成り立つ。

ii)　$\mathscr{X}$のノルムを，

$$|x|_1 \triangleq \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |x(t)|_a, & \mathscr{T} = \mathbb{Z}_+ \\ \int_0^\infty |x(t)|_a\, dt, & \mathscr{T} = \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

で与えるとすると，

$$\inf_{\xi,\eta \in \bar{B}[\theta, 2|x-y|_\infty],\ \xi \neq \eta} \lambda_a(F; x, y) \leqq \lambda_1(\tilde{F}; x, y)$$

$${}^\forall x, y \in \mathscr{X},\ x \neq y$$

が成り立つ。

(証明)　定理2・2，(g)，(c)，(d)から，

$$|(I+\alpha\tilde{F})x - (I+\alpha\tilde{F})y|_\infty - |x-y|_\infty$$

$$= \sup_{t \in \mathscr{T}} |(I+\alpha F)[x(t)] - (I+\alpha F)[y(t)]|_a - |x-y|_\infty$$

$$\geqq \sup_{t \in \mathscr{T}} \{1+\alpha\lambda_a(F; x(t), y(t))\}|x(t)-y(t)|_a - |x-y|_\infty$$

---

*　定義2・8参照。

$$\geqq \alpha \cdot |x-y|_\infty \cdot \inf_{\xi,\eta \in \bar{B}[\theta, 2|x-y|_\infty],\ \xi \neq \eta} \lambda_\alpha(F;\xi,\eta)$$

を得る。従って，λ関数の定義によって，i)を得る。

ii)．i)と同様にして証明できる。 （証明終）．

［補題2・11］ 写像$F:H \to H$を与える。このとき，

$$\lambda_2(F;x,y) = \frac{\langle Fx-Fy,\ x-y\rangle}{\langle x-y,\ x-y\rangle},\quad {}^\forall x, y \in H,\ x \neq y \quad (2.34)$$

が成り立つ。さらに，$F \in \mathcal{F}_{\ell.L}$ならば，

$$\inf_{x,y \in \bar{B}[z;r],\ x \neq y} \lambda_2(F;x,y) = -\mu_2[-F;z,r],\quad {}^\forall z \in H,\ {}^\forall r > 0 \quad (2.35)$$

が成り立つ。

（証明） (2.35) は，文献(28)による。(2.34)は (2.35)と同様にして証明される。 （証明終）

（注2・13） (2.35)から実ヒルベルト空間Hにおいては，(2.15)，(2.16)において等号が成り立つことがわかる。

2・3・4 行列のクラスとμ関数の関係

前節でℓ_1，ℓ_2，ℓ_∞ノルムに対してμ関数の値を示したが*，この節では，それらと種々の行列のクラスとの関係を示す。

まず，行列のクラスを示そう。

［定義2・12］ 行列$A=(a_{ij}) \in R^{d \times d}$を与える。

1) AはクラスP(P_0)に属す：$A \in P$ ($A \in P_0$)(59)

⟺ Aの全ての主小行列式の値が正（非負）である。

2) $A \in Z$(59) ⟺ Aの非対角要素は負または零。

3) $A \in M$(59) ⟺ $A \in P$かつ$A \in Z$．**

---

* 補題2・4．

** クラスMのかわりにクラスKと呼ぶ場合もある。

4) $A\in\mathcal{D}$[60] $\Longleftrightarrow$ $\hat{A}\in M$.

但し，$\hat{A}=(\hat{a}_{ij})$ ：$\hat{a}_{jj}=a_{jj}$，$^\forall j\in\bar{d}$，$\hat{a}_{ij}=-|a_{ij}|$，$^\forall i,j\in\bar{d}$，$i\neq j$.

5) Aは既約優対角である：$A\in IrDD$[61].

$\Longleftrightarrow$ Aは既約条件で，次の2条件をみたす。

i) $|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\geqq 0$，$^\forall i\in\bar{d}$；

ii) $^\exists k\in\bar{d}$，$|a_{kk}|-\sum_{j\neq k}|a_{kj}|>0$.

6) Aは強（弱）優列和である：$A\in SCSD\ (A\in WCSD)$[27].

$\Longleftrightarrow$ $a_{jj}-\sum_{i\neq j}|a_{ij}|>(\geqq)\ 0$，$^\forall j\in\bar{d}$.

7) Aは強（弱）優行和である：$A\in SRSD\ (A\in WRSD)$[27].

$\Longleftrightarrow$ $a_{ii}-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|>(\geqq)\ 0$，$^\forall i\in\bar{d}$.

8) Aは正定値（準正定値）である：$A\in PD\ (A\in PSD)$[61].

$\Longleftrightarrow$ $(A+A^{tr})\in P\ (P_0)$.

9) $A\in\mathcal{D}+$ $\Longleftrightarrow$ $A=diag(a_{11},\cdots,a_{dd})$，$a_{ii}>0$，$^\forall i\in\bar{d}$.

［定義2・13］[60] 行列$A,B\in R^{d\times d}$を与える。

$(A,B)\in\mathcal{D}$ $\Longleftrightarrow$ $^\exists D\in\mathcal{D}+$，$DA$，$DB\in SCSD$.

［補題2・12］（M行列の性質）

i) $A\in M$ $\Longleftrightarrow$ $^\exists D\in\mathcal{D}+$，$AD\in SRSD$[59].

ii) $A\in Z$，$A\in IrDD$，$a_{ii}>0$，$^\forall i\in\bar{d}\Rightarrow A\in M$[61].

定義2・12，2・13，補題2・3，2・4，2・12から次の結果を得る。

［定理2・4］ 行列$A,B\in R^{d\times d}$を与える。

1) $A\in\mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ $^\exists D\in\mathcal{D}+$，$AD\in SRSD$；

$\Leftrightarrow$ $^\exists D\in\mathcal{D}+$，$-\mu_\infty(-D^{-1}AD)>0$

2) $A\in\mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ $^\exists D\in\mathcal{D}+$，$DA\in SCSD$；

$\Leftrightarrow$ $^\exists D\in\mathcal{D}+$，$-\mu_1(-DAD^{-1})>0$

3) $-\mu_\infty(-A)>0$ $\Leftrightarrow$ $A\in SRSD$ $\Rightarrow$ $A\in\mathcal{D}$.

4) $-\mu_1(-A)>0$ $\Leftrightarrow$ $A\in SCSD$ $\Rightarrow$ $A\in\mathcal{D}$.

5) $A\in M$ $\Rightarrow$ $A\in\mathcal{D}$.

6) $A \in I_r DD \Rightarrow {}^{\exists}S \in R^{d\times d}$, $S = diag(s_1, \cdots, s_d)$

$s_i = sgn(a_{ii}),\ i \in \bar{d},\ SA \in \mathcal{D}$.

7) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \in P$.

8) $A \in PD \Rightarrow -\mu_2(-A) > 0 \Rightarrow A \in P$.

9) $(A, B) \in \mathcal{D} \Rightarrow {}^{\exists}D \in \mathcal{D}_+,\ -\mu_1(-DAD^{-1}) > 0,\ -\mu_1(-DBD^{-1}) > 0$.

（証明） 1)～6)，および9）は定義と補題2．4，2．12から明らか．

7) Aの任意の主小行列を$C \in R^{k\times k}, k \leq d$とする。このとき，定義から$C \in \mathcal{D}$となる。従って，i）により，

$${}^{\exists}D \in R^{k\times k},\ D \in \mathcal{D}_+,\ -\mu_\infty(-D^{-1}CD) > 0$$

となる。従って，補題2．3，(j')によって，

$$Re[\lambda_i(C)] \geq -\mu_\infty(-D^{-1}CD) > 0,\ {}^{\forall}i \in \bar{k}$$

を得る．上式から，

$$det(C) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(C) > 0$$

となる。従って，$A \in P$となる。

8)，7)と同様にして示される。 （証明終）

2．3．5 受動性，単調性，双対写像とλ関数．

この節では，まず，受動性，単調性の概念を一般のノルム空間にまで拡張する。これは，本質的にはKato[11]によってなされたものであるが，そこで本質的な役割を果すものは，双対写像という概念である。ここでは，双対写像とλ関数の関係を明らかにし，最初に定めた受動性，単調性をλ関数を用いてあらわす。さらに，λ関数の性質を用いて，それらの物理的な意味を明らかにする。

単調な非線形写像（作用素）という語を最初に用いたのは，筆者の知る限りでは，Minty[19]であるが，単調という語を用いた理由は次の2つである。

i）単調非減少な一変数関係との類推；

ii）受動性と区別するため．

これについて少し考えてみよう。一変数関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考える。f が単調非減少であるということは、

$$f(x)-f(y)\geqq 0,\quad \forall x,y\in\mathbb{R},\ x\geqq y \tag{2.40}$$

が成り立つことであるが、これは、

$$[f(x)-f(y)]\cdot(x-y)\geqq 0,\quad \forall x,y\in\mathbb{R},$$

と等価である。上式をもっと一般に、$F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ に対し、

$$\langle Fx-Fy,\ x-y\rangle\geqq 0,\quad \forall x,y\in\mathbb{H} \tag{2.41}$$

とかく。Minty[19] は、F が (2.41) を満たすとき、F は単調(非減少)であると定義した。

一方、歴史的には、それ以前から、

$$\langle Fx,\ x\rangle\geqq 0,\quad \forall x\in\mathbb{H} \tag{2.42}$$

を満たす線形写像 F を受動的(消散的*, 準正定値**)な写像と呼び、さらに、その類推から、(2.42) を満たす非線形写像をも受動的な写像と呼びならわしてきた。そして、この受動性と区別する意味で、単調性という語を用いる訳である。

さて以下においては、上に示した受動性、単調性の概念を一般のノルム空間へ拡張することを考える。

(2.40)は、

$$|x-y+\beta[Fx-Fy]|\geqq|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R},\quad \forall\beta\geqq 0$$

と等価であるが、上式をもっと一般的に(絶対値をノルムにかえて)、

$$\|(I+\beta F)x-(I+\beta F)y\|\geqq\|x-y\|,\quad \forall x,y\in\mathbb{X},\quad \forall\beta\geqq 0 \tag{2.43}$$

とかく。そして今仮に、$F:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ が (2.43) をみたすとき、F は単調(非減少)であると呼ぶことにする。

ところで、Kato[20] は、(2.41) の類推から、単調性を次のように定め

---

* 本によっては、増大的という語を用い、逆向きの不等号が成り立つ場合を消散的ということもある。

** 準正定値という語は、F が自己共役の場合に限って用いられる場合もあるが、本文では自己共役でなくともこの語を使っている。

た。

[定義2.14][(41)] $\mathscr{X}^*$を$\mathscr{X}$の双対空間とする。各$u\in\mathscr{X}$, $u\neq\theta$に対して双対写像$F_D(u)\in\mathscr{X}^*$を次式で定義する。

$$F_D(u)\triangleq\{f\in\mathscr{X}^*\mid \|f\|^2=|u|^2=|u|^2=(u,f)\triangleq f(u)\}.$$

[定義2.15][(41)] $F:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$は単調である。

$\Longleftrightarrow$ $\forall x,y\in\mathscr{X}$, $x\neq y$, $\exists f\in F_D(x-y)$, $(Fx-Fy,f)\geqq 0$.

(注2.14) ヒルベルト空間においては、各$u\in\mathscr{H}$について双対写像は唯一存在して、$f\in F_D(u)$は、

$$(x,f)=\langle x,u\rangle$$

で与えられる[(68)]. 従って、定義2.15が、(2.41)を~~用いた~~Mintyの定義の自然な拡張になっていることがわかる。

さて次に、双対写像とλ関数の関係を示そう。

[定理2.5] 写像$F:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$を与える. 次の3条件は等価である。

1) $\forall x,y\in\mathscr{X}$, $x\neq y$, $\exists f\in F_D(x-y)$, $(Fx-Fy,f)\geqq 0$;

$\Longleftrightarrow$ 2) $|(I+\beta F)x-(I+\beta F)y|\geqq|x-y|$, $\forall x,y\in\mathscr{X}$, $\forall\beta\geqq 0$;

$\Longrightarrow$ 3) $\lambda(F;x,y)\geqq 0$, $\forall x,y\in\mathscr{X}$, $x\neq y$.

(証明) 1) $\Longrightarrow$ 2). 任意に$x,y\in\mathscr{X}$を固定する。$x=y$のときは、明らかに2)が成り立つから、$x\neq y$とする。1)から、

$$\exists f\in F_D(x-y),\ (Fx-Fy,f)\geqq 0$$

が成り立っているから、

$$\begin{aligned}|x-y|^2&=(x-y,f)\\&\leqq(x-y+\beta[Fx-Fy],f)\\&\leqq|(I+\beta F)x-(I+\beta F)y|\cdot\|f\|,\quad\forall\beta\geqq 0\end{aligned}$$

となる。$|x-y|=\|f\|$だから、2)を得る。

2) $\Longrightarrow$ 3). λ関数の定義から明らか.

3) $\Longrightarrow$ 1). 任意に$x,y\in\mathscr{X}$, $x\neq y$を与えて. 部分空間$M\subset\mathscr{X}$を

$$M\triangleq\{m=\alpha(x-y)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$

で定める。セミノルム $p:\mathcal{X}\to\mathbb{R}_+$ および線形汎関数 $f_0:M\to\mathbb{R}$ を

$$p(u)=|x-y|\cdot|u|,\ u\in\mathcal{X}.$$

$$f_0(m)=\alpha\cdot|x-y|^2,\ m=\alpha(x-y)\in M$$

で与える。ここで,

$$|f_0(m)|\leqq p(m),\quad {}^\forall m\in M$$

であることに注意する。

i) $Fx-Fy\notin M$ の場合. 部分空間 $M'\subset\mathcal{X}$ を,

$$M'\triangleq\{m'=m+\beta(Fx-Fy)\mid m\in M,\ \beta\in\mathbb{R}\}$$

で定める。線形汎関数 $f_0':M'\to\mathbb{R}$ を,

$$f_0'(m')=f_0(m)+\beta c,\quad m'=m+\beta(Fx-Fy)\in M' \tag{2.44}$$

で与える。ここで, 定数 c は,

$$\begin{aligned}&\sup\{f_0(m)-p(m-[Fx-Fy])\mid m\in M\}\\&\leqq c\leqq\inf\{p(m+Fx-Fy)-f_0(m)\mid m\in M\}\end{aligned} \tag{2.45}$$

を満足するようにえらぶ, このとき, f_0' は f_0 の拡張で,

$$|f_0'(m')|\leqq p(m'),\quad {}^\forall m'\in M'$$

を満足する(68)。一方,

$$\begin{aligned}&\inf\{p(m+Fx-Fy)-f_0(m)\mid m\in M\}\\&=\inf\{|\beta(x-y)+Fx-Fy|-\beta|x-y|\mid \beta\in\mathbb{R}\}\cdot|x-y|\end{aligned} \tag{2.46}$$

である。又,

$$\begin{aligned}&\inf\{|\beta(x-y)+Fx-Fy|-\beta|x-y|\mid\beta\leqq 0\}\\&\geqq|Fx-Fy|\\&=\gamma(F;x,y)\cdot|x-y|.\end{aligned} \tag{2.47}$$

但し, $\gamma(\cdot;\cdot,\cdot)$ は, (2.8) で与えられる。

そして, 補助定理 2.1 から,

$$\begin{aligned}&\inf\{|\beta(x-y)+Fx-Fy|-\beta|x-y|\mid\beta>0\}\\&=\inf\left\{\frac{|(I+\alpha F)x-(I+\alpha F)y|-|x-y|}{\alpha|x-y|}\cdot|x-y|\ \middle|\ \alpha>0\right\}\end{aligned}$$

$$=\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{|(I+\alpha F)x-(I+\alpha F)y|-|x-y|}{\alpha\cdot|x-y|}\cdot|x-y|$$

$$=\lambda(F;x,y)\cdot|x-y|$$

を得る。定理2.2,(b)に注意すると,(2.46)〜(2.48)から

$$\inf\{p(m+Fx-Fy)-f_0(m)\,|\,m\in M\}=\lambda(F;x,y)\cdot|x-y|^2 \tag{2.49}$$

を得る 上式と(2.45)から,

$$C=\lambda(F;x,y)|x-y|^2 \tag{2.50}$$

とおいてよいことがわかる。ところで,Hahn−Banachの定理(68)によって,f_0'の拡張$f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}_+$が存在して,

$$|f(u)|\leqq p(u)=|x-y|\cdot|u|,\quad \forall u\in\mathcal{X}$$

を満足する。そして,上式から,

$$\|f\|=|x-y|^2=(u,f)=(u,f_0)$$

が成り立つから,$f\in F_D(x-y)$であり,(2.44),(2.50)と仮定から,

$$(Fx-Fy,f)=(Fx-Fy,f_0')$$
$$=\lambda(F;x,y)\cdot|x-y|^2\geqq 0$$

となり,i)を得る。

ii) $Fx-Fy\in M$の場合,f_0をHahn−Banachの定理によって拡張したものを$f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}^d$とすれば,$f\in F_D(x-y)$となる。そして,

$$Fx-Fy=\alpha_0(x-y)$$

とすると,

$$\lambda(F;x,y)=\alpha_0\geqq 0$$

であるから,

$$(Fx-Fy,f)=(Fx-Fy,f_0)$$
$$=\alpha_0|x-y|^2\geqq 0$$

となりi)を得る。 (証明終)

(注2.15) (2.49)と同様にして

$$\sup\{f_0(m)-p(m-[Fx-Fy])\,|\,m\in M\}=-\lambda(-F;x,y)|x-y|^2$$

を得る。従って，$f \in F_D(x-y)$は，

$$-\lambda(-F;x,y)|x-y|^2 \leqq (Fx-Fy,f) \leqq \lambda(F;x,y)\cdot|x-y|^2$$

を満足することがわかる。

（注2・16）　1)と2)の等価性はKato[11]によって示されている。

以上のことから，少なくとも式の形の類推という意味において，次のような定義ができる。

［定義2・16］　写像$F:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$は単調非減少である。

$\Leftrightarrow$　$\lambda(F;x,y)\geqq 0$，　$\forall x,y\in\mathbb{X}$，$x\neq y$．

写像$F:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$，$F\theta=\theta$は受動的である*．

$\Leftrightarrow$　$\lambda(F;x,\theta)\geqq 0$，　$\forall x\in\mathbb{X}$，$x\neq\theta$

（注2・17）　上の定義を$\mathbb{X}=\mathbb{H}$の場合について示すと，次のようになる（補題2・11参照）。

$F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$は単調非減少である。

$\Leftrightarrow$　$\langle Fx-Fy,x-y\rangle\geqq 0$，　$\forall x,y\in\mathbb{H}$，　$x\neq y$．

$F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$，$F\theta=\theta$は受動的である．

$\Leftrightarrow$　$\langle Fx,x\rangle\geqq 0$，　$\forall x\in\mathbb{H}$，$x\neq\theta$．

さて次に，定義2・16の物理的意味を考えよう。

図2−1に示す回路を考える。今，Nの特性が

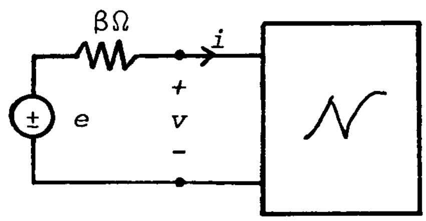


図2−1　受動性の説明

$i(t)=(Gv)(t)$，　$t\in\mathbb{R}$．

$G\theta=\theta$

で与えられるとする。さらに，次の条件：

［A］　$G:L_2\to L_2$，　G：因果的，

$\langle Gv,v\rangle_T\geqq 0$，　$\forall v\in L_2$，　$\forall T\in\mathbb{R}$

が満足されるとする。但し，

$\langle Gv,v\rangle_T=\int_{-\infty}^{T}\langle (Gv)(t),v(t)\rangle dt$．

*　$F\theta=\theta$という条件は，工学的にはほとんど問題でない。

さらに，任意の入力 $e \in L_{2e}$（L_2の拡張空間*）に対し，キルヒホッフの法則およびオームの法則：

$$e = v + \beta G \tag{2.51}$$

をみたす解 $v \in L_{2e}$ が存在するとする。

このとき，「$e \in L_2$ ならば，$v \in L_2$ となり，

$$\langle e, e \rangle \geqq \langle v, v \rangle + \beta^2 \langle Gv, Gv \rangle \geqq \langle v, v \rangle \tag{2.52}$$

となる」というのが，受動回路に対してよく知られている結果である

ところで，条件[A]のかわりに，次の条件：

[B]　$G : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$，$G$：因果的，

$$\lambda(G ; v, \theta) \geqq 0, \quad {}^{\forall} v \in \mathcal{X},$$

が満足されるとし**，さらに，任意の $e \in \mathcal{X}_e$ に対し，(2.51)をみたす解 $v \in \mathcal{X}_e$ が存在するとすると，定理2.2，(g)，(c)，(d)，補助定理2.2から，

$$\begin{aligned} \infty > |e| &\geqq |e|_T \\ &= |v + \beta G v|_T \\ &\geqq |v|_T, \quad {}^{\forall} T \in R \end{aligned} \tag{2.53}$$

が成り立ち，$v \in \mathcal{X}$ となること，および(2.52)とよく似た(2.53)が成り立つことがわかる。

このことは，定義2.16における受動性の定義が，単に式の形の類推から定義域を拡張したというだけでなく，その物理的意味をも保存しているという意味で，従来知られている（ヒルベルト空間における）受動性の概念をノルム空間へ拡張したものと考えていいことを示している。

又，単調性については，受動性が原点に対してのみ注目した性質が各点において成り立つことをいうと考えればよいので省略する。

---

*　定義2.8参照

**　条件[A]の場合も，明らかに，$\lambda_2(G, v, \theta) \geqq 0$，${}^{\forall} v \in H$，$v \neq 0$ が成り立つ。

最後に，後の便利のため，次のような定義を示しておく。

[定義 2.17]　写像 $F: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ は狭義単調増加である。

$\Longleftrightarrow$　$\lambda(F; x, y) > 0, \ {}^\forall x, y \in \mathbb{X}, \ x \neq y.$

Fは一様に単調増加である。

$\Longleftrightarrow$　${}^\exists m > 0, \ \lambda(F; x, y) \geqq m > 0, \ {}^\forall x, y \in \mathbb{X}, \ x \neq y.$

(注 2.18)　定理 2.3，2.4から，定義 2.12で示した行列のクラス M，$\mathcal{D}$，SCSD，SRSD，PDに属する行列は一様単調増加である。

2.4　縮小写像原理

この節では，縮小写像原理およびそれから導かれるいくつかの結果について整理する。

[定義 2.18]　Ω をバナッハ空間 $\mathbb{B}$ の閉部分集合とする。

写像 $G: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ が Ω 上の縮小写像である。

$\Longleftrightarrow$　Gが次の2条件を満足する。

i)　$G(\Omega) \subset \Omega$；

ii)　${}^\exists \gamma \in (0, 1), \ |Gx - Gy| \leqq \gamma |x - y|, \ {}^\forall x, y \in \Omega.$

[定義 2.19]　x^* がGの不動点である。

$\Longleftrightarrow$　$x^* = Gx^*.$

[補題 2.13]　(縮小写像原理[09])　Ω をバナッハ空間 $\mathbb{B}$ の閉部分集合とする。写像 $G: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ が Ω 上の縮小写像ならば，次の2条件が成り立つ。

i)　Gは Ω 内に唯一の不動点 x^* を有する；

ii)　任意に $x^0 \in \Omega$ を与えて

$$x^{k+1} = Gx^k, \ k \in \mathbb{Z}_+$$

とすると，

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x^k$$

となる。

[定義 2.20]　写像 $T: \mathcal{D} \subset \mathbb{X} \to \mathcal{R} \subset \mathbb{X}$，$\mathcal{D}$，$\mathcal{R}$：開集合，は同相写像である。$\Longleftrightarrow$　Tが次の3条件を満足する。

i) Tは全射である：$\mathcal{R}=T(\mathcal{D})$；

ii) Tは単射である：$Tx \neq Ty \Leftrightarrow x \neq y,\ {}^\forall x, y \in \mathcal{D}$；

iii) Tおよび$T^{-1}: \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ は連続である．

［補題2.14］[12]　写像$G: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，および同相写像$T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を与える。このとき，$\hat{G}=T^{-1}GT$ が閉部分集合$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上の縮小写像ならば，Gは，$T(\Omega)$ 内で唯一の不動点x^*を有し，任意の$x^0 \in T(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$ に対し，$\{x^k \mid x^{k+1}=Gx^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ はx^*へ収束する。

［系2.3］　写像$G: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ および同相写像$T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を与え，写像$\hat{G}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を，$\hat{G}=T^{-1}GT$ で定める。もし，$\hat{G}$が不動点y^*を有し，さらに次の条件：

$$
{}^\forall r>0,\quad {}^\exists \gamma(r) \in (0,1),
$$

$$
|\hat{G}y-y^*| \leqq \gamma |y-y^*|,\quad {}^\forall y \in \bar{B}[y^*;r] \qquad (2.54)
$$

が成り立つとする。このとき，Gは　内で唯一の不動点　　　を有する。又，$T \in \mathcal{F}_{gL}$ でかつ，

$$
{}^\exists m>0,\ \lambda(T;x,y) \geqq m>0,\quad {}^\forall x,y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y \qquad (2.55)
$$

が成り立つならば，任意の$\tilde{x}^0 \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$
\tilde{x}^{k+1}=G\tilde{x}^k+\varepsilon^k,\quad |\varepsilon^k| \leqq (1-\gamma_0)|T^{-1}\tilde{x}^0-y^*|m \qquad (2.56)
$$

とすると，

$$
|\tilde{x}^k-x^*| \leqq [\gamma_0^k|\tilde{x}^0-x^*|+r_0 m]M_0/m \qquad (2.57)
$$

が成り立つ。但し，$\gamma_0 \in (0,1)$ は，$r_0 \triangleq |T^{-1}x^0-x^*|$ に対し，(2.54)を満足する定数で，M_0は，次式で与えられる。

$$
M_0 \triangleq \|T;y^*,r_0\|. \qquad (2.58)
$$

（証明）　この系の前半は明らか，後半のみ示す。　　　　　　とすると，

$$
\tilde{y}^{k+1}=\hat{G}y^k+T^{-1}(G\tilde{x}^k+\varepsilon^k)-T^{-1}\tilde{x}^k
$$

が成り立つ。(2.54)，(2.55)と定理2.2，(h)から

$$
|\tilde{y}^1-y^*| \leqq \gamma_0|\tilde{y}^0-y^*|+(1-\gamma_0)r_0 \leqq r_0
$$

$$
|\tilde{y}^2-y^*| \leqq \gamma_0|\tilde{y}^1-y^*|+(1-\gamma_0)r_0 \leqq r_0
$$

―――

$$|\tilde{y}^{k+1}-y^*| \leqq \gamma_0\, |\tilde{y}^k-y^*| + (1-\gamma_0)\cdot r_0 \leqq r_0$$

を得る。従って，

$$\begin{aligned} |\tilde{y}^{k+1}-y^*| &\leqq \gamma_0^k |\tilde{y}^0-y^*| + r_0 \\ &\leqq \gamma_0^k \cdot |\tilde{x}^0-x^*|/m + r_0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

となる。一方，M_0を（2.58）のように定めると，

$$\frac{|\tilde{x}^k-x^*|}{|\tilde{y}^k-y^*|} = \frac{|T\tilde{y}^k-Ty^*|}{|\tilde{y}^k-y^*|} \leqq M_0$$

となるから，上式と（2.59）によって（2.57）を得る。　　　　（証明終）

2.5 結　言

この章では，数学的な準備を行った。ここで，定義された概念，整理された結果は以下の章において非常に重要な役割を果す。特に，λ関数，μ関数は，本研究において得られる諸結果を導くにあたって重要な部分を占めている。又，それらと行列のクラス，あるいは双対写像との関係を明らかにした。このことは，行列のクラスや双対写像を用いて得られる結果が，λ関数，μ関数を用いてより一般的そして統一的な形で述べられるということを示すとともに，λ関数，μ関数の有効な範囲の限界を示している。

第3章　平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性(70)(71)

3・1　緒　言

非線形回路における状態方程式の導出[22),(23),(72)~(77)]，大規模複合系における状態方程式の導出[78]，非線形抵抗回路網の直流解析[9),(22)~(33)]などの問題は平衡点方程式（直流方程式）の可解性の問題に帰着される。

又、第6章で論ずる関数解析的手法による非線形フィードバック系の入出力安定解析は，本質的に，非線形Volterra型積分方程式などの非線形関数方程式の可解性一写像（作用素）の有界性，連続性，因果性など一を調べる問題である。

この章では，$F(x)=u$，又は，$F(x,y)=u$なる形で与えられる平衡点方程式および非線形方程式の可解性について論じる。

まず3・2では，基礎となる$F(x)=u$なる形の方程式について考察する。ただし，Fはバナッハ空間$\mathcal{B}$からそれ自身への連続写像とする。さてここでいう可解性とは，「任意に入力$u\in\mathcal{B}$を与えたとき，方程式$F(x)=u$は唯一解$x^*(u)$を有するか，そして$u\mapsto x^*$は連続か」という問題，すなわち，写像Fが同相写像[12),(62)]かどうかを調べる問題である。

この節では，まず3・2・1において，この章の結果を導くにあたって重要な役割を果す接続の性質(the continuation property)[12),(13)]を説明するとともに，それを用いてFが同相写像になるための一般的な条件を示す。次に3・2・2では，Fが局所的同相写像[12]になるための条件について考える。そして3・2・3においては，3・2・1および3・2・2の結果をまとめ，さらに実用的な条件を示す。

次に3・3では，3・2の結果を応用して，$F(x,y)=u$なる形の方程式の可解性について考察する。但し，Fはバナッハ空間$\mathcal{B}\times\mathcal{B}'$から$\mathcal{B}$の連続写像とする。さてここでいう可解性とは，「任意に入力$u\in\mathcal{B}$およびパラメータ$y\in\mathcal{B}'$を与えたとき，方程式：$F(x,y)=u$は唯一解$x^*(u,y)$を有するか，そして$(u,y)\mapsto x^*$は連続か」という問題である。

最後に３・４では，３・２，３・３で得られた結果を非線形回路に応用し，非線形ＲＬＭＣ回路の標準形状態方程式を導くとともに，非線形抵抗回路における直流解の存在条件を示す．

３・２　可解性

３・２・１　接続の性質と同相写像

ここでは，以下の議論において重要な役割を果す接続の性質という概念を導入し，それを用いてＦが同相写像になるための一般的な条件を示す．接続の性質は，Reinboldt(13) によって導入された概念であるが，文献(12)と(13)とはその定義が若干異なる。ここでは，わかり易い文献(12)の定義に従う．

［定義３・１］(12)　写像 $F: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ は局所的同相写像である．

$\Longleftrightarrow$　$\mathcal{X}$ の各点 x に対して，x の開近傍 $U(x)$ および Fx の開近傍 $V(Fx)$ が存在して，F の U への制限，$F/U: U \to V$ は同相写像である*．

［定義３・２］(12)　写像 $F: D \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は，連続写像 $g: [0.1] \to \mathcal{B}$ に対し接続の性質を有する．

$\Longleftrightarrow$　もし連続写像 $p: [0.a) \to D$，$a \in (0.1]$ が存在して，

$$F[p(t)] = g(t), \quad \forall t \in [0.a) \tag{3.1}$$

を満足するならば，$\lim_{t \uparrow a} p(t) = p(a) \in D$ が存在して，$F[p(a)] = g(a)$ となる。

［補題３・１］(12)　写像 $F: D \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は開集合 D において局所的同相写像とする。もし，F が全ての線形写像

$$g(t) = ty^0 + (1-t)y^1 \qquad t \in [0,1] \tag{3.2}$$

に対し接続の性質を有するならば，$F(D) = \mathcal{B}$ となる。すなわち，F は D から $\mathcal{B}$ への全射である**。但し，$y^0, y^1 \in \mathcal{B}, y^0 \neq y^1$ は任意の点とする。

（証明）　任意に $x^0 \in D$；$y^1 \in \mathcal{B}$，$y^1 \neq y^0 \triangleq F(x^0)$ を固定する。$g: [0.1] \to$

---

*　同相写像の定義は，定義２・20に示す。

**　文献(12)では，$\mathcal{B} = \mathbb{R}^d$ に対して示している。

$\mathbb{B}$を（3.2）のように定める。Fは局所的同相写像であるから，ある$a_1 \in (0.1]$に対し，$p:[0,a_1) \to D$，$p \in C$が存在して，

$$F[p(t)] = g(t), \quad t \in [0, a_1) \qquad (3.3)$$

となる。このとき，Fがgに対し接続の性質を有するから，

$$\lim_{t \uparrow a_1} p(t) = p(a_1) \in D \qquad (3.4)$$

が存在して，

$$F(\xi') = p(a_1), \quad \xi' = p(a_1)$$

となる。

1）$a_1 = 1$の場合．　$y' = F[p(1)] = F(\xi')$　となり，$y' \in F(D)$であることがわかる。

2）$a_1 < 1$の場合．　（3.3），（3.4）とFが同相写像であることおよびDが開集合であることに注意すると，ある$a_2 \in (a_1, 1]$に対して，$p:[0,a_2) \to D$，$p \in C$が存在して，

$$F[p(t)] = g(t), \quad t \in [0, a_2)$$

が成り立つ

以下これを繰り返すと，　単調増加列$\{a_k,\ k \in \mathbb{N}\} \subset (0.1]$が存在して，各$k \in \mathbb{N}$に対して，$p:[0,a_k) \to D$が存在して，

$$F[p(t)] = g(t), \quad t \in [0, a_k)$$

が成り立つ。今，数列$\{a_k\}$の極限をa_∞とする。もし，$a_\infty = 1$ならば，上の1）と同様にして，$y' \in F(D)$となる。$y' \in \mathbb{B}$は任意であるから，$F(D) = \mathbb{B}$となり結論が得られる。

従って，$a_\infty = 1$を示す．もし$a_\infty < 1$とすると，Fがgに対し接続の性質を有するから，

$$\lim_{t \uparrow a_\infty} p(t) = p(a_\infty) \in D$$

が存在し，

$$F[p(a_\infty)] = g(a_\infty)$$

が成り立つ。このとき，上の2）と同様に考えると，a_∞が$\{a_k\}$の極限であることに矛盾する。　　　　（証明終）

さて次に，Fが同相写像になるための条件を示そう．まず次の準備をする

[定義3・3]　関数のクラス$\mathcal{M}_0$を次式で定める．

$$\mathcal{M}_0 \triangleq \{ m : R_+ \to R_+ \mid m \in \mathcal{P}_c \,;\ {}^\forall \alpha \in R_+,\ {}^\exists \varepsilon(\alpha) > 0$$
$$m(\beta) \geqq \varepsilon,\ {}^\forall \beta \in [0, \alpha]\,;\ \int_0^\infty m(\alpha)d\alpha = \infty \}.$$

[補題3・2]（Redhetterの不等式[18],[19]）　関数$b\,;\,m : R_+ \to R$，$b, m \in \mathcal{P}_c$を与える．微分不等式：

$$\dot{v}_+(t) \triangleq \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}}\ [v(t+\alpha) - v(t)]/\alpha \leqq b(t+0)/m(v),\quad v(0) \leqq c$$

を考える．今

$$B(t) \triangleq \int_0^t b(s)ds$$

$$M(\tau) \triangleq \int_{v(0)}^{\tau} m(s)ds$$

とする．もし，次の2条件：

1)　${}^\forall t \in R_+,\ {}^\exists \tau \in R,\ M(c) + B(t) = M(\tau)\,;$

2)　${}^\forall \xi \geqq v(0),\quad m(\xi) > 0$

が満足されるならば，

$$v(t) \leqq M^{-1}[M(c) + B(t)],\quad {}^\forall t \in R_+$$

が成り立つ．

[補題3・3]　写像$F : B \to B$は局所的同相写像とする。もし，次の2条件のうちいずれか1つが満足されれば，$F : B \to B$は同相写像である．

i)　${}^\exists m \in \mathcal{M}_0,\ |F(x) - F(y)| \geqq m(\max\{|x|, |y|\}) \cdot |x - y|,\quad {}^\forall x, y \in B\,;$

ii)　${}^\exists m \in \mathcal{M}_0,\ |F(x) - F(y)| \geqq m(|x - y|) \cdot |x - y|,\quad {}^\forall x, y \in B.$

（証明）　仮定から，Fが単射であること，FおよびF^{-1}が連続であることは明らかであるから，Fが全射であることを示せばよい．任意に$y^\circ, y' \in B$，$y^\circ \neq y'$を固定し，線形写像$g : [0, 1] \to B$を

$$g(t) = t\,y^\circ + (1-t)\,y',\quad t \in [0, 1] \qquad (3.5)$$

で定める．今，写像$p : [0, a) \to B$，$a \in (0, 1]$が存在して，

$$F[p(t)] = g(t), \quad {}^{\forall}t \in [0, a) \tag{3.6}$$

を満足するとする。今 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,a)$ を a に収束する任意の単調増加列とする。もし，$\{p(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ がコーシー列になるならば，$\mathbb{B}$ は完備であるから，極限は存在し，

$$\lim_{t \uparrow a-} p(t) = \lim_{k \to \infty} p(t_k) = p(a) \in \mathbb{B}$$

となる。そして，F の連続性から，$F[p(a)] = g(a)$ となり，F は g に対し接続の性質をみたす，従って補題3・1により結論を得る。

以下 $\{p(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ がコーシー列になることを示す。

まず i) が満足されるとする。このとき，

$$v(t) \triangleq |p(t)| \quad , t \in [0, a)$$

とすると，(3.6) から

$$\dot{v}_+ = \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \frac{|F^{-1}[g(t+\alpha)]| - |F^{-1}[g(t)]|}{\alpha}$$

$$\leqq \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \frac{|y^0 - y^1|}{m(\max\{|p(t+\alpha)|, |p(t)|\})} \quad *$$

$$= |y^0 - y^1| / m[v(t)] \quad , \quad {}^{\forall}t \in [0, a)$$

を得る。従って，

$$b(t) = |y^0 - y^1|,$$

$$M(\tau) = \int_{v(0)}^{\tau} m(s)$$

とおくと，補題3・2から**

$$|p(t)| = v(t)$$
$$\leqq M^{-1}(|y^0 - y^1| \cdot t)$$
$$\leqq M^{-1}(|y^0 - y^1| \cdot a) \quad , \quad {}^{\forall}t \in [0, a) \tag{3.7}$$***

---

* $\alpha > 0$ に対し，$\alpha|y^0 - y^1| = |g(t+\alpha) - g(t)| = |F[p(t+\alpha)] - F[p(t)]|$
$\geqq m(\max\{|p(t+\alpha)|, |p(t)|\}) \cdot |p(t+\alpha) - p(t)|$:

** $m \in \mathfrak{M}_0$ から，$M([v(0), \infty)) = \mathbb{R}_+$.

*** $\tau \geqq v(0)$ ，$m(\alpha) \geqq 0$ ，${}^{\forall}\alpha \geqq 0$.

を得る。従って，$m \in \mathfrak{M}_0$ に注意すると，

$$\exists\, \varepsilon\,(M^{-1}[|y^0-y'|\cdot a])>0,\ m(|p(t)|) \geqq \varepsilon > 0,\quad \forall t \in [0,a)$$

が成り立つ．上式と（3.6），（3.7）から，

$$\begin{aligned} |g(t_i)-g(t_j)| &= |F[p(t_i)]-F[p(t_j)]| \\ &\geqq m(\max\{|p(t_i)|,|p(t_j)|\})\cdot|p(t_i)-p(t_j)| \\ &\geqq \varepsilon\,|p(t_i)-p(t_j)|,\quad \forall i,j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

を得る。一方

$$|g(t_i)-g(t_j)| = |t_i-t_j|\cdot|y^0-y'|,\quad \forall i,j \in \mathbb{N} \qquad (3.8)$$

であるから，

$$|p(t_i)-p(t_j)| \leqq (|y^0-y'|/\varepsilon)\cdot|t_i-t_j|,\quad \forall i,j \in \mathbb{N}$$

を得る。従って，$\{p(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ はコーシー列となる。

次に ii)が満足されるときは，上と同様にして，

$v(t)=|p(t)|,\ t \in [0,a)$ とすると，

$\dot{v}_+ \leqq |y^0-y'|/m(+0)$

から，

$$\begin{aligned} |p(t)| &\leqq |y'|+|y^0-y'|\cdot t/m(+0) \\ &\leqq |y'|+|y^0-y'|\cdot a/m(+0),\quad \forall t \in [0,a) \end{aligned} \qquad (3.9)$$

を得る。従って，$m \in \mathfrak{M}_0$ から

$$\exists\, \varepsilon([|y'|+|y^0-y'|\cdot a/m(+0)])>0,\ m(|p(t)|) \geqq \varepsilon > 0,\quad \forall t \in [0,a)$$

が成り立つ。上式と(3.6)，(3.8)，(3.9)から，

$$|p(t_i)-p(t_j)| \leqq (|y^0-y'|/\varepsilon)\cdot|t_i-t_j|,\quad \forall i,j \in \mathbb{N}$$

を得る。従って，$\{p(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ はコーシー列となる。　　（証明終）

3・2・2　局所的同相写像

前節では，Fが局所的同相写像であることを仮定した上で議論を行ったが，この節では，Fが局所的同相写像になるための条件について考える。

有限次元空間，すなわち，$\mathbb{B}=\mathbb{R}^d$ である場合については，領域不変性定

理（後に補題3．6で示す）によって，Fが連続かつ単射であれば，Fは開写像，従って局所的同相写像となることが示される。この節の主な目的は，一般のバナッハ空間において，Fが局所的にリプシッツ連続であるときに，Fが局所的同相写像になるための条件を示すことである。

まず次の補助定理を示す。

［補助定理3．1］ 写像$F: \mathcal{B}\to\mathcal{B}$は連続とする。もし，次の条件：

$$^{\exists} z\in\mathcal{B},\quad ^{\exists} r_0, \alpha_0, m_0>0,$$

$$-\kappa(\alpha_0; -F, x, y)\geqq m_0>0,\quad ^{\forall} x, y\in B_0\triangleq B[z; r_0],\ x\neq y \tag{3.10}$$

が満足されるならば，FのB_0への制限，$F/B_0: B_0\to F(B_0)$は同相写像となる。ここで，$\kappa(\cdot;\cdot,\cdot,\cdot)$は，（2.9）で与えられる。

（証明） 補助定理2．1と（3．10）から，

$$-\eta(-F; x, y)\geqq -\kappa(\alpha_0; -F, x, y)$$
$$\geqq m_0>0,\quad ^{\forall} x, y\in B_0,\ x\neq y$$

を得る。上式と定理2．2，(g)から，F/B_0はB_0から$F(B_0)$への全単射となる。従って，後はFが開写像であること，すなわち，任意の開集合$D\subset B_0$に対して，$F(D)$が開集合であることを示せば結論が得られる。

この証明は次のような順序で示される。

1) 任意に$y'\in F(D)$を定める；

2) y'の適当な開近傍$V(y')$を定め，任意に$y''\in V(y')$を定める；

3) $x'\in D$を$Fx'=y'$なる点とし，x'の適当な開近傍$U(x')\subset D$を定め$y''\in F(U)\subset F(D)$を示す。

このとき，$y''\in V(y')$が任意だから，$V(y')\subset F(D)$となる。そして，$y'\in F(D)$が任意だから，$F(D)$は開集合となる。

$r_1>0$を，$U(x')\triangleq \bar{B}_1\triangleq \bar{B}[x'; r_1]\subset D$となるように十分小さくとる。そして，$V(y')\triangleq B_1'\triangleq B[y'; r_1 m_0]$とする。

（3．10）から，

$$0<m_0\leqq -\kappa(\alpha_0; -F, x, y)$$

$$= \frac{|x-y|-|(I-\alpha_0 F)x-(I-\alpha_0 F)y|}{\alpha_0 |x-y|}, \quad {}^\forall x, y \in \bar{B}_1, x \neq y$$

(3.11)

を得る。任意に $y^2 \in B_1'$ を固定し，写像 $H:\bar{B}_1 \to \mathcal{B}$ を，

$$Hx = (I-\alpha_0 F)x + \alpha_0 y^2$$

で定めると，(3.11) から，

$$|Hx - H\tilde{x}| \leqq (1-\alpha_0 m_0)\cdot|x-\tilde{x}|, \quad {}^\forall x, \tilde{x} \in \bar{B}_1 \qquad (3.12)$$

および，

$$|Hx - x'| \leqq |Hx - Hx'| + |x' - \alpha_0 Fx' + \alpha_0 y^2 - x'| \qquad *$$

$$\leqq (1-\alpha_0 m_0)|x-x'| + \alpha_0 |y' - y^2| \qquad **$$

$$< (1-\alpha_0 m_0) r_1 + \alpha_0 \cdot r_1 \cdot m_0 \qquad ***$$

$$= r_1, \quad {}^\forall x \in \bar{B}_1 \qquad (3.13)$$

を得る。従って，$H(\bar{B}_1) \subset \bar{B}_1$ であり，(3.12) と縮小写像原理（補題2.13）から，Hは唯一の不動点 $x^2 \in \bar{B}_1$ を有する。このとき，

$$x^2 = Hx^2 \iff Fx^2 = y^2$$

に注意すると，$y^2 \in F(D)$ となる。 （証明終）

これを用いて次の補題を得る．

［補題 3・4］ 写像 $F:\mathcal{B} \to \mathcal{B}$，$F \in \mathcal{F}\ell_L$ を与える。もし，次の条件：

$${}^\forall z \in \mathcal{B}, \quad {}^\exists r(z), \quad m(z) > 0,$$

$$n(F; x, y) \geqq m, \quad {}^\forall x, y \in \mathcal{B}[z; r], \quad x \neq y.$$

が満足されるならば，$F:\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は局所的同相写像となる。

（証明） 任意に $z \in \mathcal{B}$ を与える。$r_0 \triangleq \min\{r(z), \delta(z)\}$ とする。但し $\delta(z)$ は定義 2・7 によって定まる。さらに，$l_0 \triangleq \|F; z, r'\|$ とする。ここで，$\|\cdot; \cdot, \cdot\|$ は，(2.4) によって与えられる。任意に $\beta > 1$ を与え，$R \triangleq \beta + l_0$ とすると

---

* $Hx' = (I-\alpha_0 F)x' + \alpha_0 y^2$.

** (3.12) および $Fx' = y'$ を用いる。

** $x \in \bar{B}_1 \triangleq \bar{B}[x'; r_1]$，$y^2 \in B[y'; r_1 m_0]$.

$$-K\left(\tfrac{1}{k};-(kI+F),x,y\right)$$
$$=\frac{|x-y|-(\tfrac{1}{k})|Fx-Fy|}{(\tfrac{1}{k})\cdot|x-y|}$$
$$\geqq k-l_0=\beta>0,\quad {}^{\forall}x,y\in B_0\triangleq B[z;r_0],\ x\neq y$$
を得る。従って，補助定理3・1によって，$(kI+F):B_0\to(kI+F)(B_0)$は同相写像となる。

以下次の順序で証明を行う。

1°) 任意に開集合$D\subset B_0$を定める；

2°) 任意に$y'\in F(D)$を固定する；

3°) $x'\in D$を$Fx'=y'$なる点とする；

4°) $r_1>0$を，$B_1\triangleq B[kx'+y';r_1]\subset(kI+F)(D)$，$B_2\triangleq B[x';r_1]\subset D$となるようにえらぶ．(このような$r_1>0$は，$(kI+F)(D)$およびDが開集合だから必ず存在する。)：

5°) y'の開近傍$B_3\triangleq B[y';(m/k)r_2]$，$r_2\triangleq[m/(k+m)]r_1<r_1$の任意の点$y^2$を与える；

6°) 任意に$x\in\bar{B}_4\triangleq\bar{B}[x';r_2]\subset B_2\subset B_0$に対し，
$$|y^2+kx-(y'+kx')|\leqq(m/k)r_2+k\cdot r_2$$
$$=(m/k)\cdot r_1$$
$$<r_1,\qquad *$$
すなわち，
$$(y^2+kx)\in B_1\subset(kI+F)(D),\quad {}^{\forall}x\in\bar{B}_4$$
となることに注意して，写像$H:\bar{B}_4\to B_2$
$$Hx=(kI+F)^{-1}(kx+y^2)$$
で定義する：

7°) 定理2・2，(d)と仮定から
$$\lambda(kI+F;x,\tilde{x})\geqq k+m>0,\quad {}^{\forall}x,\tilde{x}\in\bar{B}_4\subset B_0$$
が成り立つことと$(kI+F):B_0\to(kI+F)(B_0)$が同相写像であることに注

* $k=l_0+\beta>l_0$，$l_0\geqq m$（注2・9，補助定理2・3参照）．

意すると，定理2.2，(h)から，任意の$y, \tilde{y}$　$(kI+F)(B_0)$に対して

$$|(kI+F)^{-1}y-(kI+F)^{-1}\tilde{y}|\leqq[1/(k+m)]\,|y-\tilde{y}|$$

従って，

$$|Hx-H\tilde{x}|\leqq[k/(k+m)]\,|x-\tilde{x}|,\quad \forall x, \tilde{x}\in\overline{B_4}$$

が成り立つ。そしてこれらを用いると，任意の$x\in\overline{B_4}$に対し，

$$\begin{aligned}|Hx-H'|&\leqq|Hx-Hx'|+|Hx'-x'|\\&\leqq[k/(k+m)]\cdot|x-x'|\\&\quad+|(kI+F)^{-1}(y^2+kx')-(kI+F)^{-1}(y'+kx')|\\&\leqq[k/(k+m)]\cdot r_2+[1/(k+m)]\cdot(m/k)\cdot r_2\\&\leqq r_2,\end{aligned}$$

*

すなわち，

$$Hx\in\overline{B_4},\quad \forall x\in\overline{B_4}$$

となる。従って，縮小写像定理から，Mは唯一の不動点$x^2\in\overline{B_4}\subset B_2$を有する。よって，

$$x^2=Hx^2\iff Fx^2=y^2$$

に注意すると，$y^2\in F(\overline{B_4})\subset F(D)$となる；

8)　$y^2\in B_3$は任意であるから，$B_3\subset F(B_2)\subset F(D)$となる；

9)　$y'\in F(D)$は任意であるから，$F(D)$は開集合である。

以上のことから，Fが開写像であることがわかった。

一方，仮定と定理2.2，(g)から，$F/B_0: B_0\to F(B_0)$は全単射である。従って，$F/B_0: B_0\to F(B_0)$は同相写像であり，$z\in\mathbb{B}$は任意であるから$F:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$は局所的同相写像となる。　　　　（証明終）

ヒルベルト空間の場合については，次のMinty[19]による次の結果が知られている。

[補題3.5][19][20]　写像$F: \mathbb{H}\to\mathbb{H}$，$F\in C$を与える。もし次の条件：

$$\forall z\in\mathbb{H},\ \exists r(z),\ m(z)>0,$$

$$\lambda(F; x, y)\geqq m>0,\quad \forall x, y\in B[z; r],\ x\neq y$$

が成り立てば，$F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ は局所的同相写像である。但し，$\lambda_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ は補題２・１１で与えられる。

（注３・１）　補題３・４と３・５の違いは，$F\in\mathcal{F}_{eL}$ か $F\in C$ かという点である。

最後に，有限次元空間の場合について示す。

［補題３・６］（領域不変性定理[34],[35]）　写像 $F:R^d\to R^d$，$F\in C$ は単射とする。このとき，任意の開集合 $D\subset R^d$ に対し，$F(D)$ は開集合である。すなわち，F は開写像となる。

３・２・３　同相写像のための実用的十分条件

３・２・１で示した補題３・３は，F の性質を調べるのに非常に有益であるが，F がそのような条件をみたすか否かをどのようにして調べるかという点で実用性に欠ける面を持っている。このような観点から，この節では，F が同相写像になるための実用的十分条件を示す。

［定理３・１］　写像 $F:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$，$F\in\mathcal{F}_{eL}$ を与える。もし，次の２条件のうちいずれか一方が満足されるならば，$F:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ は同相写像である。

i)　$^\exists m\in\mathcal{M}_0$，$\lambda(F;x,y)\geqq m(\max\{|x|,|y|\})$，$^\forall x,y\in\mathbb{B}$，$x\neq y$；

ii)　$^\exists m\in\mathcal{M}_0$，$\lambda(F;x,y)\geqq m(|x-y|)$，$^\forall x,y\in\mathbb{B}$，$x\neq y$．

（証明）　補題３・４，定理２・２，(g)，および補題３・３から明らか。

（証明終）

［定理３・２］　写像 $F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$，$F\in C$ を与える。もし，次の２条件のうちいずれか一方が満足されれば，$F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ は同相写像である。

i)　$^\exists m\in\mathcal{M}_0$，$\lambda_2(F;x,y)\geqq m(\max\{|x|,|y|\})$，$^\forall x,y\in\mathbb{H}$，$x\neq y$；

ii)　$^\exists m\in\mathcal{M}_0$，$\lambda_2(F;x,y)\geqq m(|x-y|)$，$^\forall x,y\in\mathbb{H}$，$x\neq y$．

（証明）補題３・５，定理２・２，(g)，および補題３・３から明らか。

（証明終）

［系３・１］　写像 $F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$，$F\in C$ を与える。もし，次の２条件のうち

いずれか一方が満足されれば，$F: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は同相写像である。

i) $^{\exists} m > 0$，$\lambda_2(F; x, y) \geqq m$，$^{\forall} x, y \in \mathbb{H}$，$x \neq y$ [19]；

ii) $^{\exists} m \in \mathcal{M}_0^* \subset \mathcal{M}_0$，$\lambda_2(F; x, y) \geqq m(\max\{|x|, |y|\})$，

$^{\forall} x, y \in \mathbb{H}$，$x \neq y$ [20]．

但し，$\mathcal{M}_0^*$ は，$\mathcal{M}_0$ と単調非増加関数の集合との積集合を示す。

（証明）（省略）

同様に，有限次元空間の場合について次の結果が成り立つ。

［定理3．3］ 写像 $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，$F \in C$ を与える。もし，次の2条件のうちいずれか1つが満足されれば，$F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は同相写像である。

i) $^{\exists} m \in \mathcal{M}_0$，$\lambda(F; x, y) \geqq m(\max\{|x|, |y|\})$，$^{\forall} x, y \in \mathbb{R}^d$，$x \neq y$；

ii) $^{\exists} m \in \mathcal{M}_0$，$\lambda(F; x, y) \geqq m(|x-y|)$，$^{\forall} x, y \in \mathbb{R}^d$，$x \neq y$．

（証明） 領域不変性定理（補題3．6），定理2．2，(g)，および補題3．3から明らか．

（注3．2） 定理3．3の結果は，次の2つの意味において，Minty[19] と Browder の結果の拡張となっている。

i) ノルムは任意に指定されたノルムであり，l_2 ノルムとは限らない；

ii) $\mathcal{M}_0^* \subset \mathcal{M}_0$ である（系3．1参照）．

［系3．2］[28] 写像 $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，$F \in \mathcal{F}_{g.L} \subset C$ を与える。もし，次の条件：

$$^{\exists} \varepsilon > 0,\ ^{\exists} p \geqq 0,\ ^{\exists} m \in \mathcal{M}(\varepsilon : p),$$

$$-\mu[-F; z, r] \geqq m(r),\quad ^{\forall} z \in \mathbb{R}^d,\ ^{\forall} r > 0$$

が満足されるならば，$F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は同相写像である。但し，$\mathcal{M}(\varepsilon, p)$ は，

$$\mathcal{M}(\varepsilon, p) \triangleq \{m: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \mid m \in PC;\ m(\alpha) \geqq \varepsilon \alpha^p,\ ^{\forall} \alpha \in \mathbb{R}_+\}$$

で与えられる。

（証明） 任意に $x, y \in \mathbb{R}^d$，$x \neq y$ を与える。$z \triangleq \frac{1}{2}(x+y)$，$r = \frac{1}{2}|x-y|$ とすると，$x, y \in \bar{B}[z; r]$ となる。従って仮定から，

$$\lambda(F; x, y) \geqq -\mu[-F; z, r]$$

$$\leqq m(r)$$
$$= m(|x-y|)$$

を得る。一方，$\mathcal{F}_{gu} \subset C$，$m(\varepsilon, p) \subset \mathcal{M}_0$であるから，定理3・3によって結論を得る。

［系3・3］ 写像$F: R^d \to R^d$，$F \in Pc'$を与える。もし，次の条件：

$$^{\exists}m > 0,\ -\mu[-F'(z)] \geqq m > 0,\ ^{\forall}z \in R^d.$$

が満足されるならば，$F: R^d \to R^d$は同相写像である。

（証明） 補題2・8，および定理3・3から明らか． （証明終）

（注3・3） DesoerとHaneda[9]は，$F \in C' \subset Pc'$の場合にこの結果を示している。そしてそれは，l_2 ノルムを用いたOhtsuki とWatanabe[23]，Kuh とHajj[25]，およびOhtsuki と Yoshida[26]の結果や，l_1ノルムを用いたStern[22]，および Willson, Jr.[30] の結果を特殊な場合として含んでいる。

3・3 パラメータに関する連続性

前節では，$F(x) = u$なる形の方程式の可解性について考えた。そしてそれは，連続な逆写像の存在の問題であった。それに対し，この節では，$F(x, y) = u$ なる形の方程式の可解性について考える。この場合は，"陰関数"の存在の場合となる*．

さて，写像$F: \mathbb{B} \times \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$は連続とする。今，任意に$y \in \mathbb{B}'$を固定したとすると方程式：$F_y(x) \triangleq F(x, y) = u$は，定理3・1を用いると適当な条件の下に唯一解$x^* = F_y^{-1}(u)$を有するであろう。従って，$G: \mathbb{B} \times \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$を$G(u, y) \triangleq F_y^{-1}(u)$で定めると，方程式：$F(x, y) = u$は，$F_y^{-1}$が存在することを保証するような条件の下に，唯一解$x^* = G(u, y)$を有する。すなわち$F(G(u, y), y) = u$なる$G: \mathbb{B} \times \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$が存在する。これが，最初に"陰関数"という語を用いた理由である。ところで，このGの連続性について

---

* 通常，陰関数という語は連続微分可能という条件の下でのみ使われる。従ってその意味では，陰関数という語は適切でないかもしれない．

はどうであろうか，これがこの節の主たる問題である。
これに対する結果は次のように与えられる．

［定理3.4］写像$F: \mathbb{B}\times\mathbb{B}'\to\mathbb{B}$，$F\in\mathfrak{F}_{eL}$を与える*．もし，次の2条件のうちいずれか一方が成り立てば，写像$G: \mathbb{B}\times\mathbb{B}'\to\mathbb{B}$，$G\in C$が存在して，

$$F(G(u,y),y)=u,\quad {}^{\forall}(u,y)\in\mathbb{B}\times\mathbb{B}'$$

を満足する．

i) ${}^{\exists}m\in\mathfrak{M}_0$，${}^{\exists}k\geq 0$，${}^{\forall}y\in\mathbb{B}'$，

$$\lambda(F(\cdot,y);x,\tilde{x})\geq m(\max\{|x|,|\tilde{x}|\}+k|y|),\ {}^{\forall}x,\tilde{x}\in\mathbb{B},x\neq\tilde{x}$$

ii) ${}^{\exists}m\in\mathfrak{M}_0$，${}^{\forall}y\in\mathbb{B}'$，

$$\lambda(F(\cdot,y);x,\tilde{x})\geq m(|x-\tilde{x}|),\quad {}^{\forall}x,\tilde{x}\in\mathbb{B},\quad x\neq\tilde{x}.$$

（証明）　写像$\Phi: \mathbb{B}\times\mathbb{B}'\to\mathbb{B}\times\mathbb{B}'$を，

$$\Phi(x,y)=(F(x,y),y),\quad (x,y)\in\mathbb{B}\times\mathbb{B}' \tag{3.14}$$

で与える。このとき，任意に$(u,z)\in\mathbb{B}\times\mathbb{B}'$を与えて，方程式：$\Phi(x,y)=(u,z)$の可解性について考えると，明らかに，

$$y=z$$

であり，これから，

$$F(x,z)=u$$

なる方程式が得られる。写像$F_z: \mathbb{B}\to\mathbb{B}$を，$F_z(x)\triangleq F(x,z)$で与えると仮定から，$F_z\in\mathfrak{F}_{eL}$となる。又，$\tilde{m}: R_+\to R_+$を

$$\tilde{m}(\alpha)\triangleq m(\alpha+k|z|),\quad {}^{\forall}\alpha\in R_+$$

で定めると，$m\in\mathfrak{M}_0$ならば，$\tilde{m}\in\mathfrak{M}_0$となることは容易にわかる。従って，条件i)，又はii)が満足されるならば，定理3.1から(3.15)は唯一解$x^*=F_z^{-1}(u)$を有する。従って，任意の$(u,z)\in\mathbb{B}\times\mathbb{B}'$に対して，(3.14)は，それに対応した一意解$(F_z^{-1}(u),z)$を有する。このことから$\Phi: \mathbb{B}\times\mathbb{B}'\to\mathbb{B}\times\mathbb{B}'$は全単射となることがわかる。従って，後は$\Phi$の連続性をいえばよい。そしてそのためには，$\Phi$が開写像であることを示せばよい。

*　$\mathbb{B}\times\mathbb{B}'$のノルムは，$\|(x,y)\|\triangleq|x|+|y|$，で与えられる。

1°) 任意に開集合 $D \subset \mathbb{B}\times\mathbb{B}'$ を与える；

2°) 任意に $(u', z') \in \Phi(D)$ を与える；

3°) (x', y') を $\Phi(x', y') = (u', z')$ なる点とする；

4°) $F \in \mathcal{F}_{eL}$ から $\Phi \in \mathcal{F}_{eL}$ となることに注意して，$r_1 \in (0, \delta(x', y')]$ を十分小さくとり，$B_1 \triangleq B[(x', y'); r_1] \subset D$ となるようにする；

5°) $l_0 \triangleq \|\Phi; (x', y'), r_1\|$ とする；

6°) 任意に $\beta > 2l_0$ を定める；

7°) $A: \mathbb{B}\times\mathbb{B}' \to \mathbb{B}\times\mathbb{B}'$ を，$A(x, y) \triangleq (x, \beta y)$ で定める；

8°) $\Psi: B_1 \to \mathbb{B}\times\mathbb{B}'$ を，$\Psi(x, y) = (A\circ\Phi)(x, y) = (F(x, y), \beta y)$ で定める．

このとき，$x \neq \tilde{x}$ ならば，

$$
\begin{aligned}
&\lambda(\Psi; (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}))\\
&= \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{|x + \alpha F(x, y) - [\tilde{x} + \alpha F(\tilde{x}, \tilde{y})]| + (1 + \alpha\beta)|y - \tilde{y}| - (|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|)}{\alpha\ (|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|)}\\
&\geqq \frac{\lambda(F(\cdot, y); x, \tilde{x})|x - \tilde{x}| - |F(\tilde{x}, y) - F(\tilde{x}, \tilde{y})| + \beta|y - \tilde{y}|}{|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|} \quad ***\\
&\geqq \lambda(F(\cdot, y); x, \tilde{x}) + (\beta - 2l_0)|y - \tilde{y}| / (|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|)\\
&\geqq \lambda(F(\cdot, y); x, \tilde{x}) \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

を得る。同様に，$x = \tilde{x}$ ならば，

$$\lambda(\Psi; (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) \geqq \beta > 0 \qquad (3.17)$$

を得る。従って，条件 i)，又は ii) と (3.16)，(3.17)，および補題 3.4 から，$\Psi: B_1 \to \Psi(B_1)$ は同相写像となる．

9°) $B_1 \subset D$ から，$\Phi(B_1) = (A^{-1}\circ\Psi)(B_1) \subset \Phi(D)$；

10°) $A: \mathbb{B}\times\mathbb{B}' \to \mathbb{B}\times\mathbb{B}'$ は，明らかに同相写像であり，$\Psi(B_1)$ は開集合であるから，$\Phi(B_1) = (A^{-1}\circ\Psi)(B_1)$ も開集合となる；

11°) $(u', z') \in \Phi(B_1) \subset \Phi(D)$ は任意であるから，$\Phi(D)$ は開集合となる。

以上で，Φ が開写像となることがわかった。 (証明終)

さて次に，有限次元空間の場合について示す。

［定理3・5］　写像$F:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$，$F\in C$を与える。もし次の条件のうちいずれか一方が成り立てば，写像$G:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^d$，$G\in C$が存在して，

$$F(G(u,y),y)=u,\quad {}^\forall(u,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$$

を満足する。

i）　${}^\exists m\in\mathcal{M}_0$，${}^\exists R\geqq 0$，${}^\forall y\in\mathbb{R}^r$，

$$\lambda(F(\cdot,y);x,\tilde{x})\geqq m(\max\{|x|,|y|\}),\quad {}^\forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^d,\ x\neq\tilde{x};$$

ii）　${}^\exists m\in\mathcal{M}_0$，${}^\forall y\in\mathbb{R}^r$，

$$\lambda(F(\cdot,y);x,\tilde{x})\geqq m(|x-\tilde{x}|),\quad {}^\forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^d,\ x\neq\tilde{x}.$$

（証明）　写像$\Phi:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$を，

$$\Phi(x,y)=(F(x,y),y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$$

で与える。このとき，定理3・4の証明の前半と同様にして，Φは全単射であることが示される。一方，$F\in C$から，$\Phi\in C$となるから領域不変性定理（補題3・6）によってΦは開写像となる。　（証明終）

［系3・4］　写像$F:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^d$，$F\in\mathcal{P}C^1$を与える。もし，次の条件：

$${}^\exists m>0,\ -\mu[-\partial_1F(x,y)]\geqq m>0,\quad {}^\forall(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$$

が満足されるならば，写像$G:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^d$，$G\in C$が存在して，

$$F(G(u,y),y)=u,\quad {}^\forall(u,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$$

を満足する。但し，$\partial_1F(x,y)$は点(x,y)における$x\mapsto F(x,y)$の偏微分を示す。

（証明）　補題2・8，および定理3・5から明らか．　（証明終）

（注3・4）　KuhとHajj[25]は，$F\in C^1\subset\mathcal{P}C^1$の場合にこの結果を$l_2$ノルムの場合について示している。その場合$G\in C^1$となる。

［系3・5］　写像$F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$，$F\in C$，および$A\in\mathbb{R}^{d\times r}$を与える。もし次の条件：

$${}^\exists m\in\mathcal{M}_0,\ \lambda(F;x,\tilde{x})\geqq m(|x-\tilde{x}|),\quad {}^\forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^d,\quad x\neq\tilde{x}$$

が成り立つならば，写像$G:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^d$，$G\in C$が存在して

$$F(G(u,y)+Ay)=u,\quad {}^\forall(u,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$$

を満足する。

(証明)　定理3・5から明らか.　　　　　　　　　　　　(証明終)

3・4 応用例

3・4・1 非線形RLMC回路における状態方程式の導出

非線形時間不変RLMC回路網：非線形時間不変結合抵抗，非線形時間不変キャパシタ，非線形時間不変結合インダクタ，および独立電圧源，電流源からなる電気回路網を考える．

与えられたRLMC回路には，適当なノーマル木* で，次の条件(A-1)～(A-3)を満足するものが存在するものとする．

(A-1)　：

$$\begin{bmatrix} v_R \\ i_G \end{bmatrix} = f(i_R, v_G), \quad f: \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_G} \to \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_G}, \quad f \in C;$$

$$\exists m_R \in \mathcal{M}_0, \quad r_2(f; x, y) \geq m_R(|x-y|_2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_G}, \quad x \neq y;$$

(A-2)　：

$$q_C = h_C(v_C), \quad h_C: \mathbb{R}^{n_C} \to \mathbb{R}^{n_C}, \quad h_C \in C;$$

$$\exists m_C \in \mathcal{M}_0, \quad r_2(h_C; x, y) \geq m_C(|x-y|_2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_C}, \quad x \neq y;$$

$$q_S = h_S(v_S), \quad h_S: \mathbb{R}^{n_S} \to \mathbb{R}^{n_S}, \quad h_S \in C;$$

$$r_2(h_S; x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_S}, \quad x \neq y;$$

(A-3)　：

$$\begin{bmatrix} \phi_L \\ \phi_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_L(i_L, i_\Gamma) \\ g_\Gamma(i_L, i_\Gamma) \end{bmatrix} \quad g_L: \mathbb{R}^{n_L} \times \mathbb{R}^{n_\Gamma} \to \mathbb{R}^{n_L}, \quad g_\Gamma: \mathbb{R}^{n_L} \times \mathbb{R}^{n_\Gamma} \to \mathbb{R}^{n_\Gamma}, \quad g_L, g_\Gamma \in C;$$

$$\exists m_L \in \mathcal{M}_0^*, \quad r_2(g; x, y) \geq m_L(|x-y|_2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{n_L} \times \mathbb{R}^{n_\Gamma}, \quad x \neq y;$$

但し，$g(i_L, i_\Gamma) \triangleq (g_L(i_L, i_\Gamma), g_\Gamma(i_L, i_\Gamma))$.

---

* ノーマル木：　全ての電圧源，できるだけ多くのキャパシタを木に含み，できるだけ少ないインダクタを木に含む。又，電流源は木に含まれない[80]。

ここで，添字は慣例に従って表3·1のように定めている。又，v，i，q，およびϕは，それぞれ，電圧，電流，電荷，および磁束の変数を示し添字をつけて区別している。例えば，v_Cは木枝のキャパシタの電圧を示している。又，n_Kは素子Kの数（例えば，n_GはGの数）を示す。

表3·1　添字記号

	電圧源	キャパシタ	抵抗	インダクタ	電流源
木枝	E	C	G	Γ	
リンク枝		S	R	L	J

ノーマル木によって定まる基本ループ行列$B_f = [I \vdots F]$の主要部Fを次のように表わす。

$$F \triangleq \begin{bmatrix} F_{SE} & F_{SC} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ F_{RE} & F_{RC} & F_{RG} & \mathbb{O} \\ F_{LE} & F_{LC} & F_{LG} & F_{L\Gamma} \\ F_{JE} & F_{JC} & F_{JG} & F_{J\Gamma} \end{bmatrix}$$

（注3·5）　$F_{SG}=\theta$，$F_{S\Gamma}=\theta$，$F_{R\Gamma}=\theta$となるのは，ノーマル木の定義による[80]。

電圧則（KVL），電流則（KCL）から，

$$\begin{bmatrix} v_R \\ i_G \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} i_R \\ v_G \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \tilde{v}_R \qquad (3.19)$$

を得る。但し，

$$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{O} & -F_{RG} \\ F_{RG}^{tr} & \mathbb{O} \end{bmatrix},\ \beta \triangleq \begin{bmatrix} -F_{RC} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & F_{LG}^{tr} \end{bmatrix},\ \tilde{v}_R \triangleq \begin{bmatrix} -F_{RE} v_E \\ F_{JG}^{tr} i_J \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

条件（A－1）と（3.19）から

$$f(i_R, v_G) - \alpha \begin{bmatrix} i_R \\ v_G \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \tilde{v}_R \qquad (3.21)$$

を得る。$\alpha^{tr} = -\alpha$であることに注意すると，条件（A－1）から，

$$\lambda_2(f-\alpha;x,y) \geqq \lambda_2(f;x,y)$$
$$\geqq m_R(|x-y|_2),\quad {}^\forall x,y\in\mathbb{R}^{n_R} \qquad (3.22)$$
が成り立つ。従って，定理3・3から，
$${}^\exists \hat{f}:\mathbb{R}^{n_R}\times\mathbb{R}^{n_G}\to\mathbb{R}^{n_R}\times\mathbb{R}^{n_G},\ \hat{f}\in C,$$
$$\begin{bmatrix} i_R \\ v_G \end{bmatrix} = \hat{f}\left(\beta\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \tilde{v}_R\right)$$
を得る。KVLとKCLから，
$$\begin{cases} v_S = -F_{SC}v_C - F_{SE}v_E \\ i_C = F_{SC}^{tr}i_S + F_{RC}^{tr}i_R + F_{LC}^{tr}i_L + F_{JC}^{tr}i_J \end{cases}$$
が成り立つ。上式と（A−2）から，
$$\begin{aligned} i_C &= \dot{q}_C \\ &= \frac{d}{dt}[h_C(v_C)] \\ &= F_{SC}^{tr}\dot{q}_S + F_{RC}^{tr}i_R + F_{LC}^{tr}i_L + F_{JC}^{tr}i_J \\ &= \frac{d}{dt}[F_{SC}^{tr}h_S(-F_{SC}v_C - F_{SE}v_E)] + F_{RC}^{tr}i_R + F_{LC}^{tr}i_L + F_{JC}^{tr}i_J \end{aligned}$$
$$\therefore\ \frac{d}{dt}[h_C(v_C) - F_{SC}^{tr}h_S(-F_{SC}v_C - F_{SE}v_E)]$$
$$= F_{RC}^{tr}i_R + F_{LC}^{tr}i_L + F_{JC}^{tr}i_J \qquad (3.24)$$
を得る。KVLとKCLから，
$$\begin{cases} v_L = -F_{L\Gamma}v_\Gamma - F_{LG}v_G - F_{LC}v_C - F_{LE}v_E \\ i_\Gamma = F_{L\Gamma}^{tr}i_L + F_{J\Gamma}^{tr}i_J \end{cases}$$
が成り立つ。上式と（A−3）から，
$$\begin{aligned} v_L &= \frac{d}{dt}[g_L(i_L,i_\Gamma)] \\ &= -F_{L\Gamma}\frac{d}{dt}[g_\Gamma(i_L,i_\Gamma)] - F_{LG}v_G - F_{LC}v_C - F_{LE}v_E \end{aligned}$$
$$\therefore\ \frac{d}{dt}[g_L(i_L, F_{L\Gamma}^{tr}i_L + F_{J\Gamma}^{tr}i_J) + F_{L\Gamma}g_\Gamma(i_L, F_{L\Gamma}^{tr}i_L + F_{J\Gamma}^{tr}i_J)]$$
$$= -F_{LG}v_G - F_{LC}v_C - F_{LE}v_E \qquad (3.25)$$
を得る。今，
$$\begin{cases} q \triangleq h_C(v_C) - F_{SC}^{tr}h_S(-F_{SC}v_C - F_{SE}v_E) \\ \phi \triangleq g_L(i_L, F_{L\Gamma}^{tr}i_L + F_{J\Gamma}^{tr}i_J) + F_{L\Gamma}g_\Gamma(i_L, F_{L\Gamma}^{tr}i_L + F_{J\Gamma}^{tr}i_J) \end{cases} \qquad (3.26)$$
$$x \triangleq [q^{tr}, \phi^{tr}]^{tr} \qquad (3.27)$$

$$y \triangleq [v_C^{tr}, i_L^{tr}]^{tr} \tag{3.28}$$

$$\gamma \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{O} & F_{LC}^{tr} \\ -F_{LC} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$u \triangleq \begin{bmatrix} F_{JC}^{tr} i_J \\ -F_{LE} v_E \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

とすると，(3.23)～(3.30)から，

$$\dot{x} = -\beta^{tr} \hat{f}(\beta y + \hat{v}_R) + \gamma y + u \tag{3.31}$$

を得る。一方，(A-2)と補題2.11から，

$$n_2(h_C - F_{SC}^{tr} h_S(-F_{SC} \cdot - \eta); \xi, \zeta)$$

$$= \frac{\langle h_C(\xi) - F_{SC}^{tr} h_S(-F_{SC}\xi - \eta) - [h_C(\zeta) - F_{SC}^{tr} h_S(-F_{SC}\zeta - \eta)], \xi - \zeta \rangle}{\langle \xi - \zeta, \xi - \zeta \rangle}$$

$$= n_2(h_C; \xi, \zeta) + \frac{\langle h_S(-F_{SC}\xi - \eta) - h_S(-F_{SC}\zeta - \eta), -F_{SC}(\xi - \zeta) \rangle}{\langle \xi - \zeta, \xi - \zeta \rangle}$$

$$\geq m_C(|\xi - \zeta|_2), \ ^\forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^{n_C}, \xi \neq \zeta, \ ^\forall \eta \in \mathbb{R}^{n_S} \tag{3.32}^*$$

が成り立つから，(3.26)と定理3.5から，

$$^{\exists 1} \hat{h}: \mathbb{R}^{n_C} \times \mathbb{R}^{n_S} \to \mathbb{R}^{n_C}, \ \hat{h} \in C, \ v_C = \hat{h}(q, -F_{SE} v_E) \tag{3.33}$$

を得る。又，(A-3)と補題 2.11 から

$$n_2(g_L(\cdot, F_{L\Gamma}^{tr} \cdot + \eta) + F_{L\Gamma} g_\Gamma(\cdot, F_{L\Gamma}^{tr} \cdot + \eta); \xi, \zeta)$$

$$\geq m_L(|(\xi, F_{L\Gamma}^{tr}\xi + \eta) - (\zeta, F_{L\Gamma}^{tr}\zeta + \eta)|_2)$$

$$= m_L(\{\langle \xi - \zeta, (I + F_{L\Gamma} F_{L\Gamma}^{tr})(\xi - \zeta) \rangle\}^{1/2})$$

$$\geq m_L(\sqrt{1+k} \cdot |\xi - \zeta|_2) \tag{3.34}^{**}$$

が成り立つ。但し，$k \triangleq \mu_2(F_{L\Gamma} F_{L\Gamma}^{tr}) \geq 0$.

$m_L \in \mathcal{M}_0^*$ ならば，$\tilde{m}_L(\alpha) \triangleq m_L(\sqrt{1+k} \cdot \alpha)$，$\alpha \in \mathbb{R}_+$ とすると，$\tilde{m}_L \in \mathcal{M}_0$ であるから，(3.34)，定理3.5と(3.27)から，

$$^{\exists 1} \hat{g}: \mathbb{R}^{n_L} \times \mathbb{R}^{n_\Gamma} \to \mathbb{R}^{n_L}, \ \hat{g} \in C, \ i_L = \hat{g}(\phi, F_{J\Gamma}^{tr} i_J) \tag{3.35}$$

を得る。従って，

---

* $-F_{SC}(\xi - \zeta) = -F_{SC}\xi - \eta - [-F_{SC}\zeta - \eta]$ および (A-2)による。

** $m_L \in \mathcal{M}_0^*$ であるから m_L は単調非増加である。

$$v_\tau \triangleq \begin{bmatrix} -F_{SE} v_E \\ F_{JP}^{tr} i_J \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

とすると，(3.27)，(3.28)，(3.33)，(3.35)および(3.36)から

$$y = \psi(x, v_x) \tag{3.37}$$

を得る。但し，

$$\psi(x, v_x) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{h}(q, -F_{SE} v_E) \\ \hat{g}(\phi, F_{JP}^{tr} i_J) \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

(3.31)および(3.37)から

$$\dot{x} = -\beta^{tr} \hat{f}[\beta\psi(x, v_x) + \tilde{v}_R] + \gamma\psi(x, v_x) + u \tag{3.39}$$

が成り立つ。これが非線形RLMC回路の1つの状態方程式表現である。

3・4・2 非線形抵抗回路における直流解析への応用

ここでは，2つのタイプの直流方程式について考える。1つは混合解析に際して現われるもので，もう1つは，非線形トランジスタ・ダイオードを含む回路において現われるものである。

［例1］ 直流方程式：$Af(A^{tr}x + v) + Bg(B^{tr}x + w) + Sx = u$

一般的な非線形抵抗回路：電圧制御形非線形抵抗，電流制御形非線形抵抗，非線形結合抵抗，線形抵抗，および直流電圧源，電流源からなる電気回路を考える。電圧制御形抵抗と電流制御形抵抗の両方を含んでいるから，ここでは，混合解析を用いる。混合解析においては，与えられた回路を2つの部分回路に分割し，一方に対しては，カットセット解析を適用し，他方に対しては，ループ解析を適用する。さて，与えられた回路およびそのグラフをN，カットセット解析を適用する方の部分回路およびそのグラフをN_a，ループ解析を適用する方の部分回路およびそのグラフをN_bで示すことにする。又，枝電圧vをN_aに属する枝の電圧v_aとN_bに属する枝の電圧v_bに分割する。同様に枝電流iをi_aとi_bに分割する。さらに，N_a，N_bに属する抵抗に関しては，その電圧（電流）を$\hat{v}_a$（$\hat{i}_a$），$\hat{v}_b$（$\hat{i}_b$）で示すことにし，その枝特性は，

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_a \\ \hat{v}_b \end{bmatrix} = h(\hat{v}_a, \hat{i}_b), \quad h: R^{d} \to R^{d}, \quad h \in C \tag{3.40}$$

で与えられるものとする。上式は次のようなことを意味している。

i) 電圧制御形抵抗は全てN_aに属す；

ii) 電流制御形抵抗は全てN_aに属す；

iii) 結合抵抗は，その特性および回路トポロジーは(3.40)のような表現が可能なものに限られる。

次にN_a, N_bをそれぞれの木枝とリンク枝に分割する。この際木枝の優先順序は，電圧源，電圧制御形抵抗，（結合抵抗，線形非結合抵抗），電流制御形抵抗，電流源の順にとり，電圧源は全て木枝に，電流源は全てリンク枝に含まれるものとする。N, N_a, およびN_bの木枝，リンク枝の集合を表3・2のように定める。このとき，N_aはNからN_bに属する枝を開放除去して得られ，N_bはNからN_aに属する枝を短絡除去して得られることに注意すると，

$$\tau = \tau_a \cup \tau_b$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_a \cup \mathcal{L}_b$$

表3・2　木枝，リンク枝の集合

	N	N_a	N_b
木枝の集合	τ	τ_a	τ_b
リンク枝の集合	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}_a$	$\mathcal{L}_b$

であり，さらに，$\mathcal{L}_a$に属すリンク枝は，Nにおいてτ_aに属す木枝とのみ基本ループを成すことがわかる。このことと木枝の優先順序から基本ループ行列は，次のような特殊な形であらわされる。

$$B_f = [I \ \ F] \triangleq \begin{bmatrix} I & O & O & O & F_{aa'} & F_{aa} & O & O \\ O & I & O & O & F_{a'a'} & F_{a'a} & O & O \\ O & O & I & O & F_{ba'} & F_{ba} & F_{bb'} & F_{bb} \\ O & O & O & I & F_{b'a'} & F_{b'a} & F_{b'b'} & F_{b'b} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

$$F_{aa} \triangleq \begin{bmatrix} A_{vv} & O \\ A_{av} & A_{aa} \end{bmatrix}, \quad F_{bb} \triangleq \begin{bmatrix} B_{bb} & O \\ B_{cb} & B_{cc} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

但し，Fに対する添字は表3・3のように定め，A，Bに対する添字は表3・4のように定める。

表3・3　Fに対する添字

	1(2)番目の添字
a	$\mathcal{L}_a(\mathcal{T}_a)$に属す抵抗
a′	$\mathcal{L}_a(\mathcal{T}_a)$に属す電流(圧)源
b	$\mathcal{L}_b(\mathcal{T}_b)$に属す抵抗
b′	$\mathcal{L}_b(\mathcal{T}_b)$に属す電流(圧)源

表3・4　A，Bに対する添字

	1(2)番目の添字
v	$\mathcal{L}_a(\mathcal{T}_a)$に属す電圧制御形抵抗
a	$\mathcal{L}_a(\mathcal{T}_a)$に属すその他の抵抗
c	$\mathcal{L}_b(\mathcal{T}_b)$に属す電流制御形抵抗
b	$\mathcal{L}_b(\mathcal{T}_b)$に属すその他の抵抗

電圧vおよび電流iを次のように分割する。

$$v \triangleq \begin{bmatrix} v_{a\ell} \\ v_{a'\ell} \\ v_{b\ell} \\ v_{b'\ell} \\ v_{a't} \\ v_{at} \\ v_{b't} \\ v_{bt} \end{bmatrix}, \quad i \triangleq \begin{bmatrix} i_{a\ell} \\ i_{a'\ell} \\ i_{b\ell} \\ i_{b'\ell} \\ i_{a't} \\ i_{at} \\ i_{b't} \\ i_{bt} \end{bmatrix} \qquad (3.43)$$

このとき，KVL：$Bv=\theta$，KCL：$[-F^{tr}\ I\ ]i=\theta$　の一部から

$$\begin{cases} v_{a\ell} + F_{aa}v_{at} = -F_{aa'}v_{a't} \\ v_{b\ell} + F_{ba}v_{at} = -F_{ba'}v_{a't} - F_{bb'}v_{b't} \end{cases} \qquad (3.44)$$

$$\begin{cases} -F_{aa}^{tr}i_{a\ell} - F_{ba}^{tr}i_{b\ell} + i_{at} = F_{a'a}^{tr}i_{a'\ell} + F_{b'a}^{tr}i_{b'\ell} \\ -F_{bb}^{tr}i_{b\ell} + i_{bt} = F_{b'b}^{tr}i_{b'\ell} \end{cases} \qquad (3.45)$$

を得る。さて今，

$$\hat{i}_a \triangleq \begin{bmatrix} i_{a\ell} \\ i_{at} \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_a \triangleq \begin{bmatrix} v_{a\ell} \\ v_{at} \end{bmatrix}, \quad \hat{i}_b \triangleq \begin{bmatrix} i_{b\ell} \\ i_{bt} \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_b \triangleq \begin{bmatrix} v_{b\ell} \\ v_{bt} \end{bmatrix} \qquad (3.46)$$

となることに注意する。そして，

$$F_{ba} \triangleq \begin{bmatrix} S_{bv} & S_{ba} \\ S_{cv} & S_{ca} \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

$$v_{a\ell} \triangleq \begin{bmatrix} \zeta_{v\ell} \\ \eta_{a\ell} \end{bmatrix}, \quad v_{at} \triangleq \begin{bmatrix} \zeta_{vt} \\ \eta_{at} \end{bmatrix}, \quad i_{b\ell} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{b\ell} \\ \hat{\zeta}_{c\ell} \end{bmatrix}, \quad i_{bt} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{bt} \\ \hat{\zeta}_{ct} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

$$i_{a\ell} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_{v\ell} \\ \hat{\eta}_{a\ell} \end{bmatrix}, \quad i_{at} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_{vt} \\ \hat{\eta}_{at} \end{bmatrix}, \quad v_{b\ell} \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{b\ell} \\ \zeta_{c\ell} \end{bmatrix}, \quad v_{bt} \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{bt} \\ \zeta_{ct} \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$-F_{aa'}v_{a't} \triangleq \begin{bmatrix} e_v \\ e_a \end{bmatrix}, \quad -F_{ba'}v_{a't} - F_{bb'}v_{b't} \triangleq \begin{bmatrix} e_b \\ e_c \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

$$F_{a'a}^{tr}\, i_{a'\ell} + F_{b'a}^{tr}\, i_{b'\ell} \triangleq \begin{bmatrix} j_v \\ j_a \end{bmatrix}, \quad F_{b'b}^{tr}\, i_{b'\ell} \triangleq \begin{bmatrix} j_b \\ j_c \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$\left.\begin{aligned} & C_{11} \triangleq \begin{bmatrix} B_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -A_{aa}^{tr} \end{bmatrix}, \quad C_{21} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -A_{av}^{tr} \\ B_{cb} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & C_{22} \triangleq \begin{bmatrix} -A_{vv}^{tr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{cc} \end{bmatrix}, \\ & C \triangleq \begin{bmatrix} I & C_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_{21} & C_{22} & I \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

$$S \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S_{ba} & S_{bv} & \mathbf{0} \\ -S_{ba}^{tr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_{ca}^{tr} \\ -S_{bv}^{tr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_{cv}^{tr} \\ \mathbf{0} & S_{ca} & S_{cv} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = -S^{tr} \tag{3.53}$$

$$\eta \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{b\ell} \\ \hat{\eta}_{at} \\ \eta_{bt} \\ \hat{\eta}_{a\ell} \end{bmatrix}, \quad \zeta \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_{v\ell} \\ \zeta_{ct} \\ \hat{\zeta}_{vt} \\ \zeta_{c\ell} \end{bmatrix}, \quad x \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{b\ell} \\ \eta_{at} \\ \zeta_{vt} \\ \hat{\zeta}_{c\ell} \end{bmatrix}, \quad u \triangleq \begin{bmatrix} e_b \\ j_a \\ j_v \\ e_c \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

とすると，(3.44)，(3.45)，(3.47)〜(3.54)から

$$C \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + Sx = u \tag{3.55}$$

および

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} \triangleq C^{tr} x + y \tag{3.56}$$

を得る。但し，

$$\hat{\eta} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{bl} \\ \eta_{at} \\ \hat{\eta}_{bt} \\ \eta_{al} \end{bmatrix}, \quad \hat{\zeta} \triangleq \begin{bmatrix} \zeta_{vl} \\ \hat{\zeta}_{ct} \\ \zeta_{vt} \\ \hat{\zeta}_{cl} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

$$y \triangleq [\,\mathbb{O}^{tr}, \theta^{tr}, j_b^{tr}, e_a^{tr}, e_v^{tr}, j_c^{tr}, \theta^{tr}, \theta^{tr}\,]^{tr}$$

ここで，(3.40)，(3.46)，(3.48)，(3.49)，(3.52)，(3.54)，(3.56)および(3.57)を参照して，

$$\eta \triangleq f(\hat{\eta}) = f\left(\begin{bmatrix} I & \mathbb{O} \\ C_{11}^{tr} & C_{21}^{tr} \end{bmatrix} x + y_\eta\right),\ f \in C \tag{3.58}$$

$$\zeta \triangleq g(\hat{\zeta}) = g\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O} & C_{22}^{tr} \\ \mathbb{O} & I \end{bmatrix} x + y_\zeta\right),\ g \in C \tag{3.59}$$

を得る。但し，

$$y \triangleq \begin{bmatrix} y_\eta \\ y_\zeta \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} y_\eta &\triangleq [\,\theta^{tr}, \theta^{tr}, j_b^{tr}, e_a^{tr}\,]^{tr} \\ y_\zeta &\triangleq [\,e_v^{tr}, j_c^{tr}, \theta^{tr}, \theta^{tr}\,]^{tr} \end{aligned} \tag{3.60}$$

従って，(3.52)，(3.55)，(3.58)〜(3.60)から

$$\begin{bmatrix} I & C_{11} \\ \mathbb{O} & C_{21} \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} I & C_{11} \\ \mathbb{O} & C_{21} \end{bmatrix}^{tr} x + y_\eta\right) + \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ C_{22} & I \end{bmatrix} g\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ C_{22} & I \end{bmatrix}^{tr} x + y_\zeta\right)$$
$$+ Sx = u \tag{3.61}$$

を得る。

方程式(3.61)に関しては，次の結果が成り立つ。

［系3・6］ 方程式(3.61)において $C_{21}C_{21}^{tr}$ は正則とする。次の条件：

$$\exists m > 0,\ \kappa_2(f; \xi, \tilde{\xi}) \geqq m > 0,\ \forall \xi, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d_1},\ \xi \neq \tilde{\xi};$$

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \kappa_2(g; z, \tilde{z}) \leqq k,\ \forall z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^{d_2},\ z \neq \tilde{z};$$

$$m\left\{-\mu_2\left(-\begin{bmatrix} I & C_{11} \\ \mathbb{O} & C_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & C_{11} \\ \mathbb{O} & C_{21} \end{bmatrix}^{tr}\right) - |k| \cdot \| I + C_{22} C_{22}^{tr} \|_2 > 0\right.$$

が成り立てば，方程式 (3, 61) は任意の $(u, y_r, y_s) \in \mathbb{R}^{d_3} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_1}$ に対して唯一解 $x^*(u, y_r, y_s) \in \mathbb{R}^{d_3}$ を有する。さらに，$(u, y_r, y_s) \mapsto x^*$ は連続である。

（証明）

$$A \triangleq \begin{bmatrix} I & C_{11} \\ \mathbb{O} & C_{21} \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ C_{22} & I \end{bmatrix}$$

とする。$S = -S^{tr}$ に注意すると補題2・11と仮定から

$$\eta_2(Af(A^{tr}\cdot + y_r) + Bg(B^{tr}\cdot + y_s) + S;\, x, \tilde{x})$$

$$= \frac{\langle f(A^{tr}x + y_r) - f(A^{tr}\tilde{x} + y_r),\, A^{tr}x - y_r - [A^{tr}\tilde{x} - y_r]\rangle}{\langle x - \tilde{x},\, x - \tilde{x}\rangle}$$

$$+ \frac{\langle g(B^{tr}x + y_s) - g(B^{tr}\tilde{x} + y_s),\, B^{tr}x - y_s - [B^{tr}\tilde{x} - y_s]\rangle}{\langle x - \tilde{x},\, x - \tilde{x}\rangle}$$

$$\geq m \frac{\langle x - \tilde{x},\, AA^{tr}(x - \tilde{x})\rangle}{\langle x - \tilde{x},\, x - \tilde{x}\rangle} - k \frac{\langle x - \tilde{x},\, BB^{tr}(x - \tilde{x})\rangle}{\langle x - \tilde{x},\, x - \tilde{x}\rangle}$$

$$\geq m\{-\mu_2(-AA^{tr})\} - |k| \cdot \|BB^{tr}\|_2$$

$$= m\{-\mu_2(-AA^{tr})\} - |k| \cdot \|I + C_{22}C_{22}^{tr}\|_2$$

$$\triangleq \hat{m} > 0, \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^{d_3},\ x \neq \tilde{x}$$

を得る。従って，定理3・5から結論を得る。（証明終）

さて次に，対象する回路が，単調非減少な特性を有する2端子対抵抗と電源からなる場合を考えよう。この場合は，(3, 61) の導出と同様にして

$$\left.\begin{aligned} &Q_a \triangleq [-F_{aa}^{tr} \ \ I], \quad B_b \triangleq [I \ \ F_{bb}] \\ &C \triangleq \begin{bmatrix} Q_a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B_b \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (3, 62)$$

$$S \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{O} & -F_{ab}^{tr} \\ F_{ab} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = -S^{tr} \quad (3, 63)$$

$$y \triangleq \begin{bmatrix} -F_{aa'}V_{a't} \\ \theta \\ \theta \\ F_{bb}^{tr} i_{b'l} \end{bmatrix}, \quad u \triangleq \begin{bmatrix} F_{b'a}^{tr} i_{b'l} \\ -F_{ba'}V_{a't} \end{bmatrix} \quad (3, 64)$$

とすると，

$$Ch\,(C^{tr}x+y)+Sx=u \tag{3.65}$$

なる直流方程式を得る。

［系3・7］　直流方程式（3.65）において，$h:\mathbb{R}^{\hat{d}}\to\mathbb{R}^{\hat{d}}$ は連続とする。もし，次の条件：

$$\exists m\in\mathcal{M}_0^*,\ \lambda_2(h;\xi,\tilde{\xi})\geq m(|\xi-\tilde{\xi}|_2),\quad \forall\xi,\tilde{\xi}\in\mathbb{R}^{\hat{d}},\ \xi\neq\tilde{\xi}$$

が成り立つならば，任意の $(u,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{\hat{d}}$ に対して，方程式（3.65）は唯一解 $x^*(u,y)$ を有する。さらに $(u,y)\mapsto x^*$ は連続である。

（証明）　系3・6の証明，又は（3.34）と同様にして

$$\lambda_2(\,Ch\,(C^{tr}\cdot+y);x,\tilde{x})\geq m(\sqrt{1+k}\cdot|x-\tilde{x}|_2), \tag{3.66}$$

$$k\triangleq\max\{\mu_2(F_{aa}F_{aa}^{tr}),\ \mu_2(F_{bb}^{tr}F_{bb})\},\quad \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^d,\ x\neq\tilde{x}$$

を得るから，定理3・5によって結論を得る。　　　　（証明終）

さらに抵抗の特性に結合がない場合には，

$$h[C^{tr}x+y]\triangleq\begin{bmatrix} h_1(-F_{aa}\xi+e_a)\\ h_2(\xi)\\ h_3(\eta)\\ h_4(F_{bb}^{tr}\eta+j_b)\end{bmatrix},\quad x\triangleq\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}. \tag{3.67}$$

$$e_a\triangleq -F_{aa'}v_{a'x},\quad j_b\triangleq F_{b'b}^{tr}i_{b'x}$$

とおける。従って，

$$Ch[C^{tr}x+y]=\begin{bmatrix}h_2(\xi)\\ h_3(\eta)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-F_{aa}^{tr} & 0\\ 0 & F_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1(-F_{aa}\xi+e_a)\\ h_4(F_{bb}^{tr}\eta+j_b)\end{bmatrix}$$

となるから，

$$f(x)\triangleq\begin{bmatrix}h_2(\xi)\\ h_3(\eta)\end{bmatrix},\quad g(z)\triangleq\begin{bmatrix}h_1(z_1)\\ h_4(z_2)\end{bmatrix},\quad z\triangleq\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} \tag{3.68}$$

$$A\triangleq\begin{bmatrix}-F_{aa}^{tr} & 0\\ 0 & F_{bb}\end{bmatrix},\quad \gamma\triangleq\begin{bmatrix}e_a\\ j_b\end{bmatrix}$$

とすると，

$$f(x) + Ag[A^{tr}x + \tilde{y}] + Sx = u \tag{3.65}$$

なる直流方程式を得る。

［系３・８］　方程式 (3.65) において，写像 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^{\tilde{d}} \to \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ は連続とする。もし，次の条件：

$$^{\exists}m > 0,\ \alpha_x(f + Ag[A^{tr}\cdot + \tilde{y}];\ x, \tilde{x}) \geq m,\ \ ^{\forall}x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d,\ ^{\forall}y \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$$

が成り立てば，方程式 (3.65) は任意の $(u, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ に対し唯一解 $x^*(u, y)$ を有する。さらに，$(u, y) \mapsto x^*$ は連続である。

（証明）　定理３・５から明らか。　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

［例２］　直流方程式：$Af(x) + Bx = u$.

p 個の非線形トランジスタ，q 個の非線形ダイオード，線形時間不変抵抗，および独立電圧源，電流源からなる電気回路を考える。今，ノートンの定理によって，図３―１に示す等価回路が得られたとする。そして，トランジスタ；ダイオードのモデルは図３―２に示される。

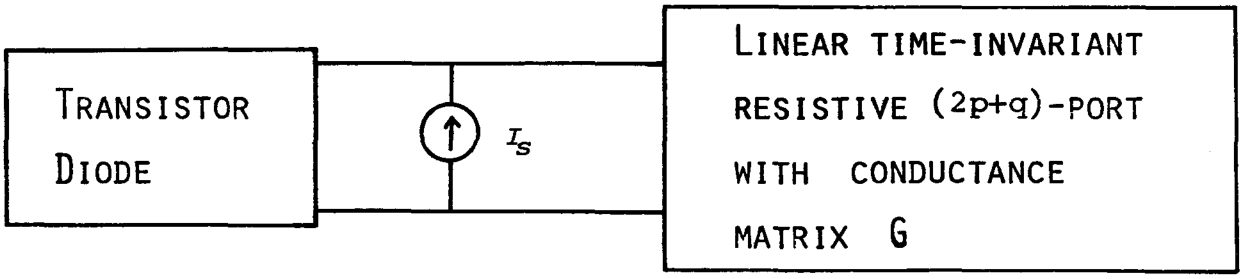
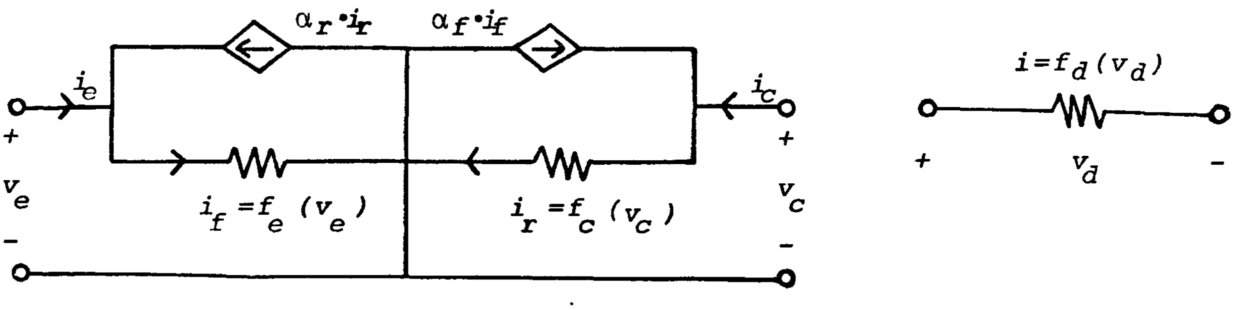


図３―１　　　　等価回路



(a)　トランジスタモデル　　　　　　　(b)　ダイオードモデル

図３―２　　　　トランジスタ，ダイオードモデル

今，

$$x \triangleq [v_{e1}, v_{c1}, \cdots, v_{ep}, v_{cp}, v_{d1}, \cdots, v_{dq}]^{tr} \in \mathbb{R}^{2p+q}$$

$$y \triangleq [i_{e1}, i_{c1}, \cdots, i_{ep}, i_{cp}, i_{d1}, \cdots, i_{dq}]^{tr} \in \mathbb{R}^{2p+q}$$

とすると図3—1から

$$y = -Bx + u \qquad (3.66)$$

を得る。一方，図3・2から

$$\begin{bmatrix} i_{ek} \\ i_{ck} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r^{(k)} \\ -\alpha_f^{(k)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ek}(v_{ek}) \\ f_{ck}(v_{ck}) \end{bmatrix}, \quad k \in \overline{p}$$

となるから，

$$T_k \triangleq \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r^{(k)} \\ -\alpha_f^{(k)} & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \overline{p}$$

$$A \triangleq diag\,(T_1, \cdots, T_p, I_q) \in \mathbb{R}^{(2p+q)\times(2p+q)}$$

$$f(x) \triangleq [f_{e1}(v_{e1}), \cdots, f_{cp}(v_{cp}), f_{d1}(v_{d1}), \cdots, f_{dq}(v_{dq})]^{tr}$$

とすると

$$y = Af(x)$$

が成り立つ。上式と(3.66)から，

$$Af(x) + Bx = u$$

なる直流方程式が得られる。(3.67)に対しては次の結果が成り立つ。

［系3.9］　方程式(3.67)において，$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は連続とする。もし次の条件のうちいずれか一方が成り立てば，(3.67)は唯一解 $x^*(u)$ を有する。さらに，$u \mapsto x^*$ は連続である。

i)　$\exists m > 0$,

$$\lambda(f_{ek}; \alpha, \beta) \geqq m, \quad {}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq \beta, \ k \in \overline{p};$$

$$\lambda(f_{ck}; \alpha, \beta) \geqq m, \quad {}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq \beta, \ k \in \overline{p};$$

$$\lambda(f_{dk}; \alpha, \beta) \geqq m, \quad {}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq \beta, \ k \in \overline{q};$$

$$\exists D \in \mathcal{D}_+, \ DA \in SCSD, \ DB \in WCSD;$$

ii)

$$\lambda(f_{ek}; \alpha, \beta) \geqq 0, \quad {}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq \beta, \ k \in \overline{p};$$

$$\lambda(f_{ck}; \alpha, \beta) \geqq 0, \quad {}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq \beta, \ k \in \overline{p};$$

$$\eta(f+k;\alpha,\beta) \geqq 0 \ , \ {}^{\forall}\alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \beta \ ,\ k \in \bar{g}\ ;$$

$${}^{\exists}D \in \mathcal{D}_+ \ ,\ DA \in WCSD,\ DB \in SCSD.$$

(証明)　まずi)が成り立つ場合を考える。

$$|x|_D \triangleq |Dx|_1 \ ,\ x \in \mathbb{R}^d$$

とすると，定理2・2，(i)，(f)，(C)，および補題2・6から，

$$\eta_D(Af+B;x,y) \geqq \varepsilon m > 0 \ ,\ {}^{\forall}x, y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y$$

を得る．但し，$\varepsilon \triangleq -\mu_1(-DAD^{-1}) > 0$．

従って，定理3・3から結論を得る。ii)が成り立つ場合にも同様にして示される。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

(注3・6)　${}^{\exists}D \in \mathcal{D}_+,\ DA \in SCSD,\ DB \in WCSD\ (DA \in WCSD,\ DA \in SCSD)$ なる条件が満足されるためには，$(A, B) \in \mathcal{D}$ であれば十分であり，そのための必要十分条件は，Mitra と So[60] によって示されている。

(注3・7)　この例2は，Willson, Jr.[30] によって与えられた。

3・5　結　言

この章では，平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について考察し，従来知られている結果を，二，三の例外を除いて，全て含むようなシャープな結果を得た。又，3・4においてその応用例を示したが，以下の第5章，第6章，第7章においても応用される。

第4章　非線形常微分方程式の可解性および安定性 (63),(82),(83)

4・1　緒　言

この章では，非線形常微分方程式の可解性および安定性について考察する。まず4・2では，大域的な条件の下に，i)初期値問題，ii)初期状態，入力およびパラメータに関する連続性について考察する。得られた結果はよく知られた岡村の結果(37),(38)の実用的な十分条件となっている。

次に4・3では，まず4・3・1において，安定性について整理し，次いで4・3・2では，安定性を考慮することによって，局所的な条件の下に，非線形常微分方程式の可解性について考察する。

最後に4・4では，上で得られた結果を周期系に対して応用する。ここでは，まず最初に一般的な形で周期系における周期解の存在およびその安定性について論じ，さらにそこで得られた結果を，非線形ＲＬＭＣ回路，非線形トランジスタ・ダイオードを含む電気回路，および鉄共振などにおいて現われるDuffing方程式に対し応用する。

4・2　非線形常微分方程式の可解性

4・2・1　解の存在と一意性

対象とする非線形常微分方程式系のうち最も一般的なものは，次式で与えられる。

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, v, t, p) + u \qquad (4.1)$$

但し，$\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$，$J \subset \mathbb{R}$，$\Omega \subset \mathbb{R}^l$，$\tilde{f} \in C$；$u: J \to \mathbb{R}^d$，$v: J \to \mathbb{R}^r$，$u, v \in P_C$.

さてここでは，パラメータ $p^0 \in \Omega$ を任意に固定し，次の微分方程式系

$$\dot{x} = f(x, v, t) + u \qquad (4.2)$$

を考える．但し，$f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times J \to \mathbb{R}^d$，$f \in C$ は，

$$f(x, v, t) \triangleq \tilde{f}(x, v, t, p^0) \qquad (4.3)$$

で与えられる。

まず最初に，$u, v \in C \subset \mathcal{P}_c$ の場合について考える。この場合（4.2）の解は次のように定められる。

［定義 4.1］ 任意に $u, v \in C$，$x^0 \in \mathbb{R}^d$，$t_0, T \in \mathcal{J}$，$t_0 < T$ を与える。

$x(\cdot) = x(\cdot\,; x^0, t_0, u_{[t_0,T]}, v_{[t_0,T]}) \in C^d[t_0, T]$* は，点 (x^0, t_0) から右に出る（4.2）の解である。

$\Longleftrightarrow$ $x \in C^d[t_0, T]$ が次の3条件を満足する。

i) $x(t_0) = x^0$；

ii) $\forall t \in (t_0, T)$，$\dot{x}(t) = f[x(t), v(t), t] + u(t)$；

iii) $\dot{x}_+(t_0) = f[x^0, v(t_0), t_0] + u(t_0)$，

$\dot{x}_-(T) = f[x(T), v(T), T] + u(T)$．

ところで，u, v は時間関数だから，一度 u, v を与えると，$\hat{f}: \mathbb{R}^d \times \mathcal{J} \to \mathbb{R}^d$，$\hat{f} \in C$ を，

$$\hat{f}(x, t) \triangleq f[x, v(t), t] + u \qquad (4.4)$$

で定め，（4.2）のかわりに，

$$\dot{x} = \hat{f}(x, t) \qquad (4.5)$$

について考えても同じであることに注意しよう。

微分方程式系（4.5）の局所的な解の存在については，次の結果が知られている。

［補題 4.1］（Peanoの定理[(37),(38),(46),(81)]）

$D_0 \triangleq \{(x, t) \in \overline{B}[x^0, b] \times [t_0, T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{J},\ b > 0,\ t_0 < T\}$

とする。

$M_0 \triangleq \max\{|\hat{f}(x, t)|,\ (x, t) \in D_0\}$，

$a_0 \triangleq \min\{T - t_0,\ b/M_0\}$

とすると，点 (x^0, t_0) から右に出る（4.5）の解 $x(\cdot) = x(\cdot\,; x^0, t_0)$ が少なくとも1つ区間 $[t_0, t_0 + a]$ で存在して D 内にある。

---

* $C^d[t_0, T] \triangleq \{x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d \mid |x|_\infty = \sup_t |x(t)| < \infty\}$.

(注4・1)　この補題から次のことがわかる。任意に$x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \in \mathcal{T}$を与えると，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解$x^0(\cdot)$が少なくとも1つ区間$[t_0, t_1]$，$t_1 \triangleq t_0 + a_0$において存在する。次に，$x^1 = x^0(t_1)$として，M_1, a_1をM_0, a_0と同様に定めると，点(x^1, t_1)から右に出る(4.5)の解$x^1(\cdot)$が少なくとも1つ区間$[t_1, t_2]$，$t_2 \triangleq t_1 + a_1$において存在する。この操作をくり返して行うと，点(x^i, t_i)，$i \in \mathbb{Z}_+$から右に出る(4.5)の解$x^i(\cdot)$が少なくとも1つ区間$[t_i, t_{i+1}]$，$t_{i+1} = t_i + a_i$において存在することがわかる。そして，

$$x(t) = x^i(t) \quad , \; t \in [t_i, t_{i+1}] \quad , \; i \in \mathbb{Z}_+$$

とすると，$x(\cdot)$は，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の1つの解となることがわかる。ところで，$t_\infty \triangleq \lim_{i\to\infty} t_i$は，$t_\infty < T$となるかもしれない*。そしてこのとき，上に定めた$x(\cdot)$は，区間$[t_0, t_\infty)$でしか定義されない。なぜなら，もし$x(\cdot)$が$[t_0, t_\infty]$で存在するとすると，補題4・1からある$\hat{a} > 0$が存在して，点$(x(t_\infty), t_\infty)$から右に出る(4.5)の解$\hat{x}(\cdot)$が区間$[t_\infty, t_\infty + \hat{a}]$で存在することになり，これは$t_\infty$の定義に矛盾するからである。

さて，我々が得たい結果は，大域的な解の存在，すなわち，任意に$x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$を与えたとき，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解$x(\cdot)$が少なくとも1つ区間$[t_0, T]$において存在することであるから補題4.1だけでは不十分である。

[定義4.2]　点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解$x(\cdot)$が区間$[t_0, a)$で存在するとする。もし，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解$x^*(\cdot)$が区間$[t_0, a]$で存在して，$x(t) = x^*(t)$，$t \in [t_0, a)$となるならば解$x(\cdot)$は$t = a$で接続可能(continuable)であるという**。

---

*　例えば，$f(x) = x^2$, $x^0 = 1$，$t_0 = 0$，$T = 2$とすると$t_\infty = 1$である。

**　この定義は，文献(38)の定義と若干異っているが，この方がわかり易いのでこういう定義にする。

[補助定理4・1]　任意に$x^0\in\mathbb{R}^d$, $t_0, T\in\mathcal{T}$, $t_0<T$を与える。任意の$a\in(t_0, T]$に対して，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解が，$t=a$で接続可能ならば，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解$x(\cdot)$が区間$[t_0, T]$において存在する。

(証明)　注4・1から明らか。　(証明終)

[補題4・2][38]　微分方程式系(4.5)において，リアプノフ関数$V: D\to\mathbb{R}_+$, $D\triangleq\{(x, t)\in\mathbb{R}^d\times\mathcal{T},\ |x|\geqq L>0\}$が存在して，

i)　$^\forall t\in\mathcal{T}$, $V(\cdot, t)\in\mathcal{F}_{\ell L}$;

ii)　$^\exists m>0$, $m|x|\leqq V(x, t)$, $^\forall(x, t)\in D$;

iii)
$$V'_{(4.5)}(x, t)\triangleq\overline{\lim_{\alpha\downarrow 0}}\frac{V(x+\alpha\hat{f}(x, t), t+\alpha)-V(x, t)}{\alpha}$$
$$\leqq 0,\quad ^\forall(x, t)\in \mathrm{Int}(D)$$

を満足するならば，任意に$x^0\in\mathbb{R}^d$, $t_0, T\in\mathcal{T}$, $t_0<T$を与えたとき，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解$x(\cdot)$は，任意の$a\in(t_0, T]$で接続可能である。従って，点(x^0, t_0)から右に出る(4.5)の解$x(\cdot)$が少なくとも1つ区間$[t_0, T]$において存在する*。

次に，解の唯一性については次の結果が知られている。

[補題4・3][38]　微分方程式系(4.5)において，リアプノフ関数$\tilde{V}: \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{T}\to\mathbb{R}_+$が存在して，

iv)　$^\forall t\in\mathcal{T}$, $\tilde{V}(\cdot, \cdot, t)\in\mathcal{F}_{\ell L}$;

v)　$x=y\implies\tilde{V}(x, y, t)=0$, $^\forall t\in\mathcal{T}$;

vi)　$x\neq y\implies\tilde{V}(x, y, t)>0$, $^\forall t\in\mathcal{T}$;

vii)
$$\tilde{V}'_{(4.5)}(x, y, t)\triangleq\overline{\lim_{\alpha\downarrow 0}}\frac{\tilde{V}(x+\alpha\hat{f}(x, t), y+\alpha\hat{f}(y, t), t+\alpha)-\tilde{V}(x, y, t)}{\alpha}$$
$$\leqq 0,\quad ^\forall(x, y, t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{T}$$

を満足すれば，任意に$x^0\in\mathbb{R}^d$, $t_0, T\in\mathcal{T}$, $t_0<T$を与えたとき，点(x^0, t_0)

* 補助定理4・1参照．

から右に出る（4.5）の解$x(\cdot)$が区間$[t_0, T]$で存在すれば一意である。

上に示した補題4・2，4・3から次の結果を得る。

［定理4・1］　微分方程式系（4.2）において次の条件：

$$\exists k : R_+ \times J \to R,\ k \in P_c,\ \forall t \in J,\ \forall \xi \in R^r,$$

$$\lambda(f(\cdot, \xi, t); x, y) \leqq k(|\xi|, t),\quad \forall x, y \in R^d,\ x \neq y \quad (4.6)$$

が成り立つとする。このとき，任意の$x^0 \in R^d$，$t_0, T \in J$，$t_0 < T$，$u, v \in C$に対して，点(x^0, t_0)から右に出る（4.2）の一意解$x(\cdot\,; x^0, t_0, u_{[t_0,T]}, v_{[t_0,T]})$が区間$[t_0, T]$において存在する。

（証明）　任意に$x^0 \in R^d$，$t_0, T \in J$，$t_0 < T$，$u, v \in C$を与える。$\hat{f} \in C$を（4.4）で定める。そして，任意に$L > 0$を与え，$D \triangleq \{(x, t) \in R^d \times J,\ |x| \geqq L > 0\}$とする。さらに$V : D \to R_+$を，

$$V(x, t) \triangleq \exp\left(-\int_{t_0}^{t} [|k(|v(\tau)|, \tau)| + |\hat{f}(\theta, \tau)|/L]\, d\tau\right) |x|$$

で定める。このとき，

i)　$$m \triangleq \exp\left(-\int_{t_0}^{T} [|k(|v(\tau)|, \tau)| + |\hat{f}(\theta, \tau)|/L]\, d\tau\right)$$

とすると，

$$m|x| \leqq V(x),\quad \forall (x, t) \in D$$

が成り立つ；

ii)　$$V'_{(4.5)}(x, t)$$

$$= \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \Big\{ \exp\left(-\int_{t_0}^{t+\alpha} [|k(|v(\tau)|, \tau)| + |\hat{f}(\theta, \tau)|/L]\, d\tau\right) |x + \alpha \hat{f}(x, t)|$$

$$- \exp\left(-\int_{t_0}^{t} [|k(|v(\tau)|, \tau)| + |\hat{f}(\theta, \tau)|/L]\, d\tau\right) |x| \Big\} / \alpha$$

$$\leqq [|\hat{f}(\theta, t)|/|x|]\, V(x, t)$$

$$+ \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \frac{|x + \alpha \hat{f}(x, t) - \alpha \hat{f}(\theta, t)| - |x|}{\alpha |x|} V(x, t)$$

$$+ \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \frac{\exp\left(-\int_{t}^{t+\alpha} [|k(|v(\tau)|, \tau)| + |\hat{f}(\theta, \tau)|/L]\, d\tau\right)}{\alpha} |x|$$

$$= [|\hat{f}(\theta, t)|/|x| + \lambda(f(\cdot, v(t), t; x, \theta)$$

$$- |\hat{f}(\theta, t)|/L - |k(|v(t)|, t)|]\, V(x, t)$$

$\leqq 0, \quad {}^{\forall}(x,t) \in \mathscr{I}nt(D)$

が成り立つ。従って，補題4・2によって，点(x^0, t_0)から右に出る(4.2)の解$x(\cdot)$が少なくとも1つ区間$[t_0, T]$で存在する。

次に，一意性については，$V: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{T} \to \mathbb{R}_+$を，

$$V(x, y, t) \triangleq \exp\left(-\int_{t_0}^{t} |k(|v(\tau)|, \tau)| d\tau\right) |x-y|$$

で与えると，補題4・3の条件iv)〜vii)が成り立つことがわかる。従って解$x(\cdot)$は一意である。 (証明終)

次に，$u, v \in \mathscr{P}_c$である場合について考える。この場合(4.2)の解は次のように定められる。

[定義4・3] 任意に$u, v \in \mathscr{P}_c$，$x^0 \in \mathbb{R}^d$，$t_0, T \in \mathscr{T}$，$t_0 < T$を与える。

$x(\cdot) = x(\cdot\,; x^0, t_0, u_{[t_0,T]}, v_{[t_0,T]}) \in C^d[t_0, T]$は，点$(x^0, t_0)$から右に出る(4.2)の解である。

$\Longleftrightarrow$ $D_T \triangleq \{t_i \in (t_0, T),\ i \in \overline{m} \mid t_{i+1} > t_i,\ i \in \overline{m}\}$をuまたはvの不連続点とするとき，$x(\cdot)$が次の4条件を満足する。

i) $x(t_0) = x^0$；

ii) ${}^{\forall} t \in (t_0, T) - D_T$，$\dot{x}(t) = f[x(t), v(t), t] + u(t)$；

iii) ${}^{\forall} t \in D_T$，$\dot{x}_+(t) = f[x(t), v(t+0), t] + u(t+0)$，

$\dot{x}_-(t) = f[x(t), v(t-0), t] + u(t-0)$；

iv) $\dot{x}_+(t_0) = f[x^0, v(t_0+0), t_0] + u(t_0+0)$，

$\dot{x}_-(T) = f[x(T), v(T-0), T] + u(T-0)$，

さてこのように解を定義すると，定理4・1から直ちに次の結果を得る。

[定理4・2] 微分方程式系(4.2)において，条件(4.6)が満足されるとす。とこのとき，任意の$x^0 \in \mathbb{R}^d$，$t_0, T \in \mathscr{T}$，$t_0 < T$，$u, v \in \mathscr{P}_c$に対して，点(x^0, t_0)から右に出る(4.2)の一意解$x(\cdot\,; x^0, t_0, u_{[t_0,T]}, v_{[t_0,T]})$が区間$[t_0, T]$において存在する。

(証明) $f^k: \mathbb{R}^d \times [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}^d$，$k = 0, 1, \cdots, m$；$t_{m+1} = T$を，

$$f^k(x,t) \triangleq \begin{cases} f[x, v(t_k+0), t_k] + u(t_k+0), & t = t_k \\ f[x, v(t), t] + u(t), & t \in (t_k, t_{k+1}) \\ f[x, v(t_{k+1}-0), t_{k+1}] + u(t_{k+1}-0), & t = t_{k+1} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

で定める。このとき，$f \in C$，$u, v \in \mathcal{P}_c$ だから，f^k は $\mathbb{R}^d \times [t_k, t_{k+1}]$ において連続となる。従って，各 $k \in \{0, 1, \cdots, m\}$ に対し，微分方程式系：

$$\dot{x} = f^k(x, t)$$

は定義4・1の意味で，任意の $x^k \in \mathbb{R}^d$ に対し，点 (x^k, t_k) から右に出る一意解 $x^k(\cdot)$ を区間 $[t_k, t_{k+1}]$ で持つ。今，

$$x^k = x^{k-1}(t_k), \ k \in \overline{m} \ ; \quad x^0 : 既知$$

とすると，$x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ を，

$$x(t) = x^k(t), \ t \in [t_k, t_{k+1}], \ k \in \{0, 1, \cdots, m\}$$

で与えると，$x(\cdot)$ は定義4・3の意味で，点 (x^0, t_0) から右に出る (4.2) の一意解で，区間 $[t_0, T]$ で定義されることがわかる。　（証明終）

4・2・2　初期状態，入力，パラメータに関する連続性

前節では，非線形常微分方程式の初期値問題について考え，一意解が存在するための条件を明らかにしたが，この節では，その条件の下に，解が初期状態，入力，およびパラメータに関して連続となることを示す。

まず連続性を定義しよう。

［定義4・4］　微分方程式系 (4.1) を考える。任意に $x^0, \tilde{x}^0 \in \mathbb{R}^d$，$t_0, T \in \mathcal{T}$，$t_0 < T$，$u, \tilde{u}, v, \tilde{v} \in \mathcal{P}_c$，$p, \tilde{p} \in \Omega$ を与える。今，点 (x^0, t_0) および $(\tilde{x}^0, t_0)$ から右に出る (4.1) の一意解 $x(\cdot) \triangleq x(\cdot\,; x^0, t_0, u_{[t_0,T]}, v_{[t_0,T]})$ および $\tilde{x}(\cdot) \triangleq x(\cdot\,; \tilde{x}^0, t_0, \tilde{u}_{[t_0,T]}, \tilde{v}_{[t_0,T]})$ が区間 $[t_0, T]$ において存在するとする。もし，

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ \max\{|x^0 - \tilde{x}^0|, |u - \tilde{u}|_\infty, |v - \tilde{v}|_\infty, |p - \tilde{p}|\} < \delta,$$
$$|x - \tilde{x}|_\infty < \varepsilon$$

が成り立つならば，系 (4.1) の解は，初期状態，入力，およびパラメータに関し連続であるという。但し，$|\cdot|_\infty$ は，

$$|U|_\infty \triangleq \sup\{\,|u(t)|\,,\ t\in[t_0,T]\,\}$$
で与えられる。

［補題4・4］（比較定理[38]）　次の微分方程式

$$\dot{\varphi}=g(\varphi,t)\ ,\ \varphi(t_0)=\varphi^0 \qquad (4.7)$$

但し，$g: D\to \mathbb{R}$，$D\triangleq B[0,A]\times[t_0,T]\subset\mathbb{R}^2$，$A>0$，$t_0<T$；$g\in C$．
（4.7）の最大解 $\varphi_M(\cdot)$ が区間 $[t_0,T]$ において，D内に留まるとする。
もし，連続関数 $\psi(\cdot)$，$\psi(t_0)=\varphi^0$ が，

$$\dot{\psi}_+(t)\leqq g(\psi(t),t)\ ,\ {}^\forall(\psi(t),t)\in D$$

を満足するならば，

$$\psi(t)\leqq\varphi_M(t)\ ,\ {}^\forall t\in[t_0,T]$$

となる。

補題4・4，定理4・2を用いて次の結果を得る。

［定理4・3］　微分方程式系（4.1）を考える。もし，次の条件：

$${}^\exists k:\mathbb{R}_+\times\mathcal{T}\to\mathbb{R},\ k\in\mathcal{P}_C,\ {}^\forall t\in\mathcal{T},\ {}^\forall\xi\in\mathbb{R}^r,\ {}^\forall p\in\Omega,$$

$$\lambda(\tilde{f}(\cdot,\xi,t,p);x,y)\leqq k(|\xi|,t)\ ,\ {}^\forall x,y\in\mathbb{R}^d,\ x\neq y \qquad (4.8)$$

が満足されるならば，任意の $x^0\in\mathbb{R}^d$，$t_0,T\in\mathcal{T}$，$t_0<T$，$u,v\in\mathcal{P}_C$，$p\in\Omega$ に対し，点 (x^0,t_0) から右に出る（4.1）の一意解 $x(\cdot)$ が存在し，初期状態：x^0，入力：u,v およびパラメータ：p に関し連続である。

（証明）　一意解が存在することは定理4・2から明らか．従って連続性のみ示す。任意に $x^0\in\mathbb{R}^d$，$t_0,T\in\mathcal{T}$，$t_0<T$，$u,v\in\mathcal{P}_C$，$p\in\Omega$ を与え，

$$x(t)\triangleq x(t;x^0,t_0,u_{[t_0,T]},v_{[t_0,T]})\ ,\ t\in[t_0,T]$$

$$\psi(t)\triangleq|x(t)|\ ,\ t\in[t_0,T]$$

とすると，（4.8）から定理4・1の証明と同様にして

$$\psi(t_0)=|x^0|$$

$$\dot{\psi}_+(t)\leqq k(|v(t)|,t)\psi(t)+|\tilde{f}(0,v(t),t,p)+u(t)|$$

$$\leqq\beta\psi(t)+\gamma$$

を得る。但し，$\beta\triangleq|k(|v(\cdot)|,\cdot)|_\infty$，$\gamma\triangleq|\tilde{f}(0,v(\cdot),\cdot,p)+u(\cdot)|_\infty$．
従って，比較定理（補題4・4）から，

$$\psi(t) \leqq \exp[\beta(t-t_0)]|x^0| + \{\exp[\beta(t-t_0)]-1\}\gamma/\beta$$
$$\leqq B \triangleq \exp[\beta(T-t_0)]\cdot(|x^0|+\gamma/\beta)-\gamma/\beta, \quad \forall t\in[t_0,T]$$
$$(4.9)$$

を得る。一方，ノルムの等価性から，

$$\exists C>0,\ |(\eta,\xi,t,p)| \leqq C\max\{|\eta|,|\xi|,|t|,|p|\},$$
$$\forall(\eta,\xi,t,p)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$$

が成り立つ。従って，(4.9) から $|x(\cdot)|_\infty \leqq B$ となることに注意すると，$\tilde{f}\in C$ であるから，

$$\forall\hat{\delta}>0,\ \exists\delta_1'(\hat{\delta})>0,\ \max\{|v-\tilde{v}|_\infty,\ |p-\tilde{p}|\}<\delta_1',$$
$$|\tilde{f}[x(t),v(t),t,p]-\tilde{f}[x(t),\tilde{v}(t),t,\tilde{p}]|<\hat{\delta},$$
$$\forall t\in[t_0,T] \quad (4.10)$$

を得る。一方，ある $\delta_1''>0$ に対し，

$$\tilde{\beta}\triangleq\max\{|k(|\xi|,t)|,\ \xi\in\overline{B}[\theta;|V|_\infty+\delta_1''],\ t\in[t_0,T]\}$$
$$|x-\tilde{x}^0|<\delta_0\triangleq\exp[-\tilde{\beta}(T-t_0)]\cdot\epsilon/3 \quad (4.11)$$
$$|u-\tilde{u}|_\infty<\delta_2\triangleq\exp[-\tilde{\beta}(T-t_0)]\cdot\beta\cdot\epsilon/3 \quad (4.12)$$

とし，(4.10) が，$\hat{\delta}=\delta_2$ に対して成り立つように $\delta_1'(\delta_2)$ を定め，

$$|v-\tilde{v}|_\infty<\delta_1,\ \delta_1\triangleq\min\{\delta_1'(\delta_2),\ \delta_1''\} \quad (4.13)$$
$$|p-\tilde{p}|<\delta_1 \quad (4.14)$$

とする。このとき，

$$\tilde{x}(t)\triangleq x(t;\tilde{x}^0,t_0,\tilde{u}_{[t_0,T]},\tilde{v}_{[t_0,T]},\tilde{p}),\quad t\in[t_0,T]$$
$$\zeta(t)\triangleq|x(t)-\tilde{x}(t)|,\quad t\in[t_0,T]$$

とすると，(4.8) から，

$$\zeta(t_0)=|x^0-\tilde{x}^0|$$
$$\dot{\zeta}_+(t)\leqq\lambda(\tilde{f}(\cdot;\tilde{v}(t),t,\tilde{p};x(t),\tilde{x}(t))\,|x(t)-\tilde{x}(t)|$$
$$+|\tilde{f}(x(t),v(t),t,p)-\tilde{f}(\tilde{x}(t),\tilde{v}(t),t,\tilde{p})|$$
$$\leqq\tilde{\beta}\zeta(t)+\delta_2,\quad\forall t\in[t_0,T]$$

を得る。従って，比較定理から，

$$|x(t)-\tilde{x}(t)|<\epsilon,\quad\forall t\in[t_0,T] \quad (4.15)$$

を得る。(4.11)〜(4.15)から,

$$\delta \triangleq \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$$

とすると,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon),\ \max\{|x^0-\tilde{x}^0|, |u-\tilde{u}|_\infty, |v-\tilde{v}|_\infty, |p-\tilde{p}|\} < \delta,$$
$$|x-\tilde{x}|_\infty < \varepsilon$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

この定理から直ちに次の系を得る。

[系4・1]　微分方程式系(4.1)において次の条件:

$$\exists k: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+,\ k \in \mathcal{P}_c,\ \forall t \in \mathcal{T},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^r,\ \forall p \in \mathcal{B},$$
$$|\tilde{f}(x;\xi, t, p) - \tilde{f}(y;\xi, t, p)| \leqq k(|\xi|, t)\, |x-y|,$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y \qquad (4.16)$$

が成り立てば,任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$, $u, v \in \mathcal{P}_c$, $p \in \mathcal{B}$ に対し,点 (x^0, t_0) から右に出る(4.1)の一意解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ において存在し,初期状態,入力,およびパラメータに関し連続である。

(証明)　定理2・2,(b)から,(4.16)が満足されるとき,(4.8)が満足されることがわかる。従って,定理4・3によって結論を得る。

(証明終)

[系4・2]　次の微分方程式系:

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, v, p) + u \qquad (4.17)$$

を考える。但し,$\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^d$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{\tau}$, $\tilde{f} \in C$; $v: \mathcal{T} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$, $u: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^d$, $u, v \in \mathcal{P}_c$.

もし,次の条件のうちいずれか一方が成立すれば,任意の $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$, $u, v \in \mathcal{P}_c$, $p \in \mathcal{B}$ に対し,点 (x^0, t_0) から右に出る(4.17)の一意解 $x(\cdot)$ が区間 $[t_0, T]$ において存在し,初期状態,入力,およびパラメータに関し連続である。

i)　$\exists k: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ k \in \mathcal{P}_c,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^r,\ \forall p \in \mathcal{B},$
$$|\tilde{f}(x, \xi, p) - \tilde{f}(y, \xi, p)| \leqq k(|\xi|)\, |x-y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d;$$

ii)　$\exists k: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ k \in \mathcal{P}_c,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^r,\ \forall p \in \mathcal{B},$

$$\lambda(\tilde{f}(\cdot,\xi,p);x,y) \leq k(|\xi|),\quad {}^{\forall}x,y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y.$$

(証明)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(省略)

［系4・3］　次の微分方程式系：

$$\dot{x} = \tilde{f}(x,t,p) + u \qquad (4.18)$$

で考える。但し，$\tilde{f}: \mathbb{R}^d \times \mathcal{T} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}^d$，$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^r$，$\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$；$\tilde{f} \in C$；$u: \mathcal{T} \to \mathbb{R}^d$，$u \in \mathcal{P}c$.

もし，次の条件のうちいずれか一方が成り立てば，任意の$x^0 \in \mathbb{R}^d$，$t_0 \in \mathcal{T}$，$t_0 < T$，$u \in \mathcal{P}c$，$p \in \mathcal{S}$に対し，点(x^0, t_0)から右に出る(4.18)の一意解$x(\cdot)$が区間$[t_0, T]$において存在し，初期状態，入力，およびパラメータに関し連続である。

i)　$^{\exists}k: \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$，$k \in \mathcal{P}c$，$^{\forall}t \in \mathcal{T}$，$^{\forall}p \in \mathcal{S}$，

$$|\tilde{f}(x,t,p) - \tilde{f}(y,t,p)| \leq k(t)\,|x-y|,\quad {}^{\forall}x,y \in \mathbb{R}^d;$$

ii)　$^{\exists}k: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$，$k \in \mathcal{P}c$，$^{\forall}t \in \mathcal{T}$，$^{\forall}p \in \mathcal{S}$，

$$\lambda(\tilde{f}(\cdot,t,p);x,y) \leq k(t),\quad {}^{\forall}x,y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y.$$

(証明)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(省略)

4・3　安定性と可解性

4・3・1　安定性

安定性には，大別してリアプノフの意味の安定性と入出力安定性の2つがある。そしてリアプノフの安定性は，大ざっぱにいえば，安定，漸近安定，指数安定の3つの概念に分けられる。漸近安定性に関しては第7章で詳しく検討するので，この節では主に安定と指数安定について考える。又入出力安定性については，第6章で詳しく検討するのでこの節ではあまりふれず，それの特殊な場合に含まれる有界入力有界状態安定（以下BIBS安定と略す）についてのみ考える。

まずリアプノフの安定性についてその定義を示そう。

［定義4・5］　微分方程式系(4.2)において，

$$^{\exists}x^* \in \mathbb{R}^d,\ ^{\exists}\xi^* \in \mathbb{R}^r,\ f(x^*,\xi^*,t) = \theta,\ ^{\forall}t \in \mathcal{T} \qquad (4.19)$$

が成り立つとする。このとき，$u(\cdot)\equiv 0$，$v(\cdot)\equiv \xi^*$ とすると，$x^*(t)=x^*$，$t\in\mathcal{T}$ は (4.2) の1つの解である。

1) 平衡点 x^* は安定である。

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$，$\forall t_0\in\mathcal{T}$，$\exists\delta(t_0,\varepsilon)>0$，$\forall x^0\in B[x^*,\delta]$，

$|x(t)-x^*|<\varepsilon$，$\forall t\geq t_0$.

但し，$x(\cdot)\triangleq x(\cdot\,;x^0,t_0,\theta,\xi^*)$.

2) x^* は一様安定である。

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall t_0\in\mathcal{T}$，$\forall x^0\in B[x^*,\delta]$，

$|x(t)-x^*|<\varepsilon$，$\forall t\geq t_0$.

3) x^* は漸近安定である。

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ i) x^* は安定；

ii) $\forall t_0\in\mathcal{T}$，$\exists\delta(t_0)>0$，$\forall x^0\in B[x^*;\delta]$，$\forall\varepsilon>0$，

$\exists T(t_0,x^0,\varepsilon)>0$，$|x(t)-x^*|<\varepsilon$，$\forall t\geq T+t_0$.

4) x^* は一様漸近安定である。

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ i) x^* は一様安定；

ii) $\exists\delta>0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists T(\varepsilon)>0$，$\forall x^0\in B[x^*;\delta]$，

$\forall t_0\in\mathcal{T}$，$|x(t)-x^*|<\varepsilon$，$\forall t\geq T+t_0$.

5) x^* は指数安定である。

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ $\exists m>0$，$\exists\delta>0$，$\forall t_0\in\mathcal{T}$，$\exists K(t_0)>0$，$\forall x^0\in B[x^*,\delta]$，

$|x(t)-x^*|\leq K(t_0)\exp[-m(t-t_0)]\cdot|x^0-x^*|$，$\forall t\geq t_0$.

6) x^* は大域漸近安定である。

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ i) x^* は安定；

ii) $\forall t_0\in\mathcal{T}$，$\forall x^0\in\mathbb{R}^d$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists T(t_0,x^0,\varepsilon)>0$，

$|x(t)-x^*|<\varepsilon$，$\forall t\geq T+t_0$.

7) x^* は一様大域漸近安定である。

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ i) x^* は一様安定；

ii) $\forall r>0$，$\exists\beta(r)>0$，$\forall t_0\in\mathcal{T}$，$\forall x^0\in B[x^*;r]$，

$|x(t)-x^*|<\beta$，$\forall t\geq t_0$；

iii) $\forall r>0,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists T(r,\varepsilon)>0,\ \forall x^0\in B[x^*;r],$

$\forall t_0\in \mathcal{T},\ |x(t)-x^*|<\varepsilon,\ \forall t\geq T+t_0.$

8) x^*は大域指数安定である.

$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\exists m>0,\ \forall t_0\in\mathcal{T},\ \exists K(t_0)>0,\ \forall x^0\in\mathbb{R}^d,$

$$|x(t)-x^*|\leqq K(t_0)\exp[-m(t-t_0)]\,|x^0-x^*|,\quad \forall t\geq t_0.$$

(注4・2) 上の諸定義の間には次の関係が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{一様大域漸近安定} & \Longrightarrow & \text{一様漸近安定} & \Longrightarrow & \text{一様安定} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{大域漸近安定} & \Longrightarrow & \text{漸近安定} & \Longrightarrow & \text{安定} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \\
\text{大域指数安定} & \Longrightarrow & \text{指数安定} & &
\end{array}$$

[定義4・6] 微分方程式系(4.2)はBIBS安定である.

$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\forall t_0\in\mathcal{T},\ \exists K(t_0)>0,\ \forall r>0,\ \exists \beta(t_0,r)>0,\ \forall x^0\in\bar{B}[\theta;r],$

$\forall u,v\in \mathcal{P}_c,\ |x(t;x^0,t_0,u,v)|$

$$\leqq K(t_0)|x^0|+\beta(t_0,r)\{|u|_\infty+|f(\theta,v,\cdot)|_\infty\},\quad \forall t\geq t_0.$$

[定理4・4] 微分方程式系(4.2)において,(4.19)が満足されるとする. $u(\cdot)\equiv\theta,\ v(\cdot)\equiv\xi^*$ とする.

(a) $\exists r^*>0,\ \forall t\in\mathcal{T},$

$$\lambda(f(\cdot,\xi^*,t);x,x^*)\leqq 0,\quad \forall x\in B^*\triangleq B[x^*;r^*],\ x\neq x^*$$

が成り立つならば,

$$\forall t_0\in\mathcal{T},\ \forall x^0\in B^*,\ |x(t)-x^*|\leqq|x^0-x^*|,\ \forall t\geq t_0$$

となる. 従って, x^*は安定である. 但し, $x(\cdot)\triangleq x(\cdot;x^0,t_0,\theta,\xi^*)$;

(b) $\exists r^*>0,\ \exists m>0,\ \forall t\in\mathcal{T},$

$$\lambda(f(\cdot,\xi^*,t);x,x^*)\leqq -m,\quad \forall x\in B^*,\ x\neq x^* \qquad (4.20)$$

が成り立つならば,

$\forall t_0 \in \mathcal{T}$, $\forall x^0 \in B^*$

$$|x(t) - x^*| \leqq \exp[-m(t-t_0)]\,|x^0 - x^*| \;,\quad \forall t \geqq t_0$$

が成り立つ。従って，x^*は指数安定かつ一様漸近安定である；

(c) 条件 (4.20) が成り立つならば，

$\forall t_0 \in \mathcal{T}$, $\forall x^0 \in B^*$, $\forall \delta \in (0, r^*)$, $\forall u \in \mathcal{P}_c$, $|u|_\infty \leqq m(r^* - \delta)$

$$|x(t; x^0, t_0, u, \xi^*) - x^*| \leqq \hat{r} \triangleq r^* - \delta \;,\quad \forall t \geqq t_0$$

が成り立つ。

(証明)　まず(a)から示す。任意に $t_0 \in \mathcal{T}$, $x^0 \in B^*$ を与える。

$$\psi(t) \triangleq |x(t) - x^*| \;,\quad t \geqq t_0$$

とすると，定理4・1の証明と同様にして，

$$\psi(t_0) = |x^0 - x^*| < r^*$$

$$\dot{\psi}_+(t) = \lambda(f(\cdot, \xi^*, t); x, x^*)\,|x - x^*|$$

$$\leqq 0 \;,\quad \forall t \geqq t_0$$

を得る。従って，比較定理（補題4・4）から (a) を得る。

(b)．(a) と同様にして示される。

(c)．任意に $t_0 \in \mathcal{T}$, $x^0 \in B^*$, $\delta \in (0, r^*)$, $u \in \mathcal{P}_c$, $|u|_\infty \leqq m\hat{r}$, $\hat{r} \triangleq r^* - \delta$ を与える。

$$\psi(t) \triangleq |x(t; x^0, t_0, u, \xi^*) - x^*| \;,\quad t \geqq t_0$$

とすると，定理4・1の証明と同様にして，

$$\psi(t_0) = |x^0 - x^*| < \hat{r}$$

$$\dot{\psi}_+(t) \leqq -m\psi(t) + |u(t)|$$

$$\leqq -m\psi(t) + m\hat{r} \;,\quad \forall t \geqq t_0$$

を得る。従って，比較定理から，

$$\psi(t) \leqq \exp[-m(t-t_0)]\,\psi(t_0) + [-m(t-t_0)]\,\hat{r}$$

$$\leqq \hat{r} \;,\quad \forall t \geqq t_0$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

［定理4・5］　微分方程式系 (4.2) において，(4.19) が満足されるとする。$u(\cdot) \equiv \theta$，$v(\cdot) \equiv \xi^*$とする。

(a) $\exists k: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathcal{P}_c$: $\lim_{t\to\infty} \int_0^t k(\tau)d\tau = \infty$, $\forall t \in \mathcal{J}$,

$\lambda(f(\cdot, \xi^*, t); x, x^*) \leqq -k(t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq x^*$

が成り立つならば，x^*は大域漸近安定である；

(b) $\exists k: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathcal{P}_c$: $\exists m > 0$, $\exists a \in \mathbb{R}$, $\int_0^t k(\tau)d\tau \geqq mt - a$,

$\forall t \geqq 0$, $\lambda(f(\cdot, \xi^*, t); x, x^*) \leqq -k(t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq x^*$

が成り立つならば，x^*は大域指数安定である。

（証明）　まず(a)から示す。任意の$t_0 \in \mathcal{J}$，$x^0 \in \mathbb{R}^d$を与える。仮定から定理4・4の証明と同様にして

$$
\begin{aligned}
&|x(t; x^0, t_0, \theta, \xi^*) - x^*| \\
&\leqq \exp[-\int_{t_0}^t k(\tau)d\tau]\,|x^0 - x^*| \\
&\leqq \exp[\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau] \cdot \exp[-\int_0^t k(\tau)d\tau] \cdot |x^0 - x^*| , \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \geqq t_0
\end{aligned}
$$

を得る。従って，x^*は大域指数安定となる。

(b)．(a)と同様にして示される。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

［定理4・6］　微分方程式系（4.2）において次の条件：

$\exists k: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathcal{P}_c$: $\exists m > 0$, $\int_0^t k(\tau)d\tau \geqq mt$, $\forall t \geqq 0$,

$\forall \xi \in \mathbb{R}^r$, $\forall t \in \mathcal{J}$,

$$\lambda(f(\cdot, \xi, t); x, \theta) \leqq -k(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, x \neq \theta$$

が成り立つならば，（4.2）はBIBS安定である。

（証明）　任意に$t_0 \in \mathcal{J}$，$x^0 \in \mathbb{R}^d$，$u, v \in \mathcal{P}_c$を与える。

$$\psi(t) \triangleq |x(t; x^0, t_0, u, v)| , \quad t \geqq t_0$$

とすると，定理4・1の証明と同様にして，

$$
\begin{aligned}
&\psi(t_0) = |x^0| , \\
&\dot{\psi}_+(t) \leqq \lambda(f(\cdot, v(t), t); x(t), \theta)\psi(t) + |f(\theta, v(t), t) + u(t)| \\
&\qquad\quad \leqq -k(t)\psi(t) + A \qquad\qquad\qquad\qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

を得る。但し，$A \triangleq |f(\theta, v(\cdot), \cdot) + u(\cdot)|_\infty$．

比較定理（補題4・4）と（4.21）から，

$$\begin{aligned}\psi(t) &\leqq \exp[-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau]\psi(t_0) + \int_{t_0}^{t}\exp[-\int_{\tau}^{t} k(s)ds]\cdot A d\tau \\ &\leqq \exp[-mt]\exp[\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau]\psi(x^0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t}\exp[\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau - \int_0^{s} k(\tau)d\tau] A\,ds \\ &\leqq \exp[\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau]\psi(t_0) \\ &\quad + \exp[\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau] A\cdot\int_{t_0}^{t}\exp(-ms)ds \\ &\leqq K(t_0)|x^0| + B(t_0)[|f(\theta, v(\cdot), \cdot)|_\infty + |u|_\infty], \quad {}^\forall t \geqq t_0\end{aligned}$$

を得る。但し,

$K(t_0) \triangleq \exp[\int_0^{t_0} k(\tau)d\tau]$, $B(t_0) = K(t_0)\cdot\exp(-mt_0)/m$.

(証明終)

4・3・2 安定性と可解性

前節4・2においては,大域的な条件の下に非線形常微分方程式の可解性について考えたが,ここでは安定性を考慮することによって,局所的な条件の下に可解性について考える。

[定理4・7] 微分方程式系(4.1)において次の3条件:

i) ${}^\exists x^* \in \mathbb{R}^d$, ${}^\exists \xi^* \in \mathbb{R}^r$, $\hat{f}(x^*, \xi^*, t, p) = \theta$, ${}^\forall t \in \mathcal{T}$, ${}^\forall p \in \mathcal{S}\mathcal{B}$;

ii) ${}^\exists r^* > 0$, ${}^\exists k: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, ${}^\forall t \in \mathcal{T}$, ${}^\forall p \in \mathcal{S}\mathcal{B}$,

$\alpha(\hat{f}(\cdot, \xi^*, t, p); x, y) \leqq k(t)$, ${}^\forall x, y \in \bar{B}^* \triangleq \bar{B}[x^*; r^*]$, $x \neq y$;

iii) ${}^\exists m > 0$, ${}^\forall t \in \mathcal{T}$, ${}^\forall p \in \mathcal{S}\mathcal{B}$,

$\alpha(\hat{f}(\cdot, \xi^*, t, p); x, x^*) \leqq -m$, ${}^\forall x \in \bar{B}^*$, $x \neq x^*$

が満足されるとする。この時,任意に $\delta \in (0, r^*)$, $t_0, T \in \mathcal{T}$, $t_0 < T$, $x^0 \in \hat{B} \triangleq \bar{B}[x^*; \hat{r}]$, $\hat{r} \triangleq r^* - \delta$, $u \in \mathcal{P}_c$, $|u|_\infty < m\hat{r}$ を与え, $v(\cdot) \equiv \xi^*$とすると,点(x^0, t_0)から右に出る(4.1)の一意解 $x(\cdot) \triangleq x(\cdot; x^0, t_0, u_{[t_0,T]}, \xi^*, p)$ が区間$[t_0, T]$において存在する。さらに, $x(\cdot)$ は, x^0, u, pに関し連続である。

(証明) まず $u \in C$の場合について考える。

$$M^* \triangleq \max\{|\hat{f}(x,\xi^*,t,p)|+\|u\|_\infty,\ x\in\bar{B}^*,\ t\in I\triangleq[t_0,T]\},$$
$$a^*\triangleq\min\{T-t_0,\ \delta/M^*\}$$
とする。このとき,
$$\bar{B}[x;\delta]\subset\bar{B}^*,\quad {}^\forall x\in\hat{B}$$
であるから,
$$M(x,s)\triangleq\max\{|\hat{f}(y,\xi^*,t,p)|+\|u\|_\infty,\ y\in\bar{B}[x,\delta],\ t\in[s,T]\},$$
$$a(x,s)\triangleq\min\{T-s,\ \delta/M(x,s)\}$$
とすると,
$$a(x,s)\geqq a^*,\quad {}^\forall x\in\hat{B},\quad {}^\forall s\in[t_0,T) \tag{4.22}$$
であることに注意する。

補題4.1と(4.22)から,任意に$x^k\in\hat{B}$, $t_k\in I$を与えると点(x^k,t_k)から右に出る(4.1)の解$x^k(\cdot)$が区間$[t_k,t_k+a^*]$において少なくとも1つ存在し,$\bar{B}[x^k;\delta]\subset\bar{B}^*$にとどまることがわかる。

まず,この$x^k(\cdot)$が一意であることを示す。2つの解$x^k(\cdot)$, $y^k(\cdot)$が存在したとする$(x^k(t_k)=y^k(t_k)=x^k)$, $\psi:[t_k,t_k+a^*]\to\mathbb{R}$を,
$$\psi(t)\triangleq\exp\left[-\int_{t_k}^{t}|k(\tau)|d\tau\right]|x^k(t)-y^k(t)|,\quad t\in[t_k,t_k+a^*]$$
とすると,条件i), ii)から,定理4.1の証明と同様にして,
$$\psi(t_k)=0,$$
$$\dot{\psi}_+(t)\leqq[\lambda(\hat{f}(\cdot,\xi^*,t,p);x^k(t),y^k(t))-|k(t)|]\psi(t)$$
$$\leqq 0,\quad {}^\forall t\in[t_k,t_k+a^*]$$
が得られる。従って,比較定理によって,
$$|x^k(t)-y^k(t)|\leqq\exp\left[+\int_{t_k}^{t_k+a^*}|k(\tau)|d\tau\right]\psi(t)=0,$$
$${}^\forall t\in[t_k,t_k+a^*]$$
となり,$x^k(\cdot)$は一意であることがわかる。

一方,定理4.4,(c)から,
$$|x^k(t)-x^*|\leqq\hat{r},\quad {}^\forall t\in[t_k,t_k+a^*]$$
となるから,$x^0\in\hat{B}$に対し,点(x^0,t_0)から右に出る(4.1)の一意解$x^0(\cdot)$が区間$[t_0,t_0+a^*]$において存在し,$\hat{B}$内に留まることがわかる。

以下

$$x^k = x^{k-1}(t_k), \quad t_k = t_0 + k \cdot a^*, \quad k = 1, 2, \cdots$$

とすると，点 (x^k, t_k) から右に出る（4.1）の一意解 $x^k(\cdot)$ が区間 $[t_k, t_{k+1}]$ において存在し，$\hat{B}$ 内に留まる。又，$a^* > 0$ であるから，ある $k \in \mathbb{N}$ に対して，$t_{k+1} \geqq T$ となる。従って，

$$x(t) \triangleq x^k(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \cap [t_0, T], \quad k = 0, 1, \cdots, K$$

とすると，$x(\cdot)$ は点 (x^0, t_0) から右に出る（4.1）の一意解で，区間 $[t_0, T]$ において $\hat{B}$ 内に留まっている。

次に，$u \in \mathcal{P}c$ の場合は，上の結果を用いると定理4・2と同様にして証明できる。

又，x^0，u，p に関する連続性は，定理4・3と同様にして証明できるので省略する。（証明終）

4・4 周期系への応用

4・4・1 周期解の存在と安定性

この節では，前節の結果を応用して周期系における周期解の存在とその安定性について考える。

対象する周期系は次式で与えられる。

$$\dot{x} = f(x, v, t) + u \tag{4.23}$$

但し，$f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$，$f \in C$；$v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^r$，$u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$，$u, v \in \mathcal{P}c$。

系（4.23）において次の仮定（A−1）が満足されるものとする。

A−1：　$\exists \omega > 0$，$\forall x \in \mathbb{R}^d$，$\forall \xi \in \mathbb{R}^r$，

$$f(x, \xi, t+\omega) = f(x, \xi, t), \quad v(t+\omega) = v(t),$$

$$u(t+\omega) = u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

まず次の補題を示す。この補題は，なかば自明のことであるが，非線形系においては線形系や準線形系の場合と異なり連続な周期関数からなるバ

ナッハ空間を構成することが困難であるため以下の議論において重要な役割を果している。

[補題4.5] 仮定(A-1)の下に系(4.23)を考える。系(4.23)の解の存在と一意性が保証されるならば，次の2条件は同値である。

i) $^\forall t_0 \in \mathbb{R}_+$, $^\exists x^* \in \mathbb{R}^d$, $x(t+\omega; x^*, t_0) = x(t; x^*, t_0)$, $^\forall t \geq t_0$;

ii) $^\exists \hat{x}^* \in \mathbb{R}^d$, $\hat{x}^* = x(\omega; \hat{x}^*, 0)$.

(証明) i) ⇨ ii). 明らか.

ii) ⇨ i). まず ii) ⇨ $x(t+\omega; \hat{x}^*, 0) = x(t; \hat{x}^*, 0)$, $^\forall t \geq 0$ を示す。

$$\phi(t) \triangleq x(t; \hat{x}^*, 0), \quad t \geq 0,$$
$$\psi(t) \triangleq x(t+\omega; \hat{x}^*, 0), \quad t \geq 0$$

とすると，仮定(A-1)から，

$$\dot{\phi}(t) = f[\phi(t), v(t), t] + u(t), \quad \phi(0) = \hat{x}^*,$$
$$\dot{\psi}(t) = f[\psi(t), v(t+\omega), t+\omega] + u(t+\omega)$$
$$= f[\psi(t), v(t), t] + u(t), \quad \psi(0) = \hat{x}^*$$

仮定から解の存在と一意性が保証されているから，

$$\phi(t) = \psi(t), \quad ^\forall t \geq 0$$
$$\therefore \quad x(t+\omega; \hat{x}^*, 0) = x(t; \hat{x}^*, 0), \quad ^\forall t \geq 0$$

を得る。

一方，解の存在と一意性は区間$[0, \infty)$において保証されているから，任意の$t_0 \geq 0$に対し，$x^* \triangleq x(t_0; \hat{x}^*, 0)$とすればi)が成り立つ。

(証明終)

[定理4.8] 仮定(A-1)の下に系(4.23)を考える。系(4.23)において次の2条件のうちいずれか一方が満足されれば，系(4.23)は唯一の周期解を有し，それは大域指数安定である。

i) $^\exists m > 0$, $^\forall \xi \in \mathbb{R}^r$, $^\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$\lambda(f(\cdot, \xi, t); x, y) \leq -m, \quad ^\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \ x \neq y;$$

ii) $^\exists k: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $k \in \mathcal{P}_c: k(t+\omega) = k(t)$, $^\forall t \geq 0$;

$\exists m > 0$, $\int_0^\omega k(\tau)d\tau \geqq m\omega$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^r$,

$\lambda(f(\cdot, \xi, t); x, y) \leqq -k(t)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$.

（証明） i) ⟹ ii)は明らかであるから，ii)が満足されるとする。このとき，定理4・3によって，系(4.23)の解の存在と一意性，および，初期状態に関する連続性が保証される。従って，写像$T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，$T \in C$：

$$T(x^0) = x(\omega; x^0, 0) \tag{4.24}$$

が定義できる。今，$x(\cdot) \triangleq x(\cdot; x^0, 0)$，$y(\cdot) \triangleq x(\cdot; y^0, 0)$をそれぞれ点$(x^0, 0)$，$(y^0, 0)$から右に出る(4.23)の解とし，

$$z(t) \triangleq x(t) - y(t), \quad t \geqq 0 \tag{4.25}$$

とすると，

$$\dot{z}(t) = f(y+z, v, t) - f(y, v, t) \tag{4.26}$$

となる。そして，$y(\cdot), v(\cdot)$は時間関数と考えていいから，$\hat{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$，$\hat{f} \in C$を，

$$\hat{f}(z, t) \triangleq f[y(t)+z, v(t), t] - f[y(t), v(t), t], \tag{4.27}$$

で定めると，(4.26)，(4.27)から，

$$\dot{z} = \hat{f}(z, t) \tag{4.28}$$

が成り立つ。一方，ii)と(4.27)から

$$\lambda(\hat{f}(\cdot, t); x, y) \leqq -k(t), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \; x \neq y \tag{4.29}$$

が成り立っている。

$$\psi(t) = |z(t)|, \quad t \in [0, \omega]$$

とすると，(4.29)から，

$$\psi(0) = |x^0 - y^0|$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_+(t) &= \lambda(f(\cdot, v(t), t); y(t)+z(t), y(t)) \cdot \psi(t) \\ &\leqq -k(t)\psi(t), \quad \forall t \in [0, \omega]\end{aligned}$$

となり，比較定理とii)によって

$$\begin{aligned}|z(t)| &\leqq \exp\left[-\int_0^\omega k(\tau)d\tau\right]\psi(0) \\ &\leqq \exp(-m\omega)|x^0 - y^0|\end{aligned} \tag{4.30}$$

を得る。従って，(4.24)，(4.25)，と(4.30)から，

$$|T(x^0)-T(y^0)| \leqq \gamma\, |x^0-y^0|, \quad {}^\forall x^0, y^0 \in \mathbb{R}^d,$$
$$\gamma \triangleq \exp(-m\omega) < 1$$
を得る。上式と縮小写像原理（補題2・13）から，Tは唯一の不動点$\hat{x}^*$を有する。このとき，
$$\hat{x}^* = x(\omega\,;\hat{x}^*, 0)$$
であるから，補題4・5によって，系（4.23）は唯一の周期解を有することがわかる。

一方，$k(\cdot)$が周期関数であることに注意すると，ii)から，
$$\int_0^t k(\tau)\,d\tau \geqq mt - \int_0^\omega [m+|k(\tau)|]\,d\tau, \quad {}^\forall t \geqq 0$$
が成り立つから，（4.28），（4.29）と定理4・5から，$z(t) \equiv \theta$ は大域指数安定となる。従って，周期解は大域指数安定となる。　　（証明終）

［定理4・9］　仮定（A−1）の下に系（4.23）を考える。系（4.23）において，次の2条件が満足されるとする。

i)　${}^\exists x^* \in \mathbb{R}^d, {}^\exists \xi^* \in \mathbb{R}^r, f(x^*, \xi^*, t) = \theta, \quad {}^\forall t \in \mathbb{R}_+$；

ii)　${}^\exists r^* > 0, {}^\exists m > 0, {}^\forall t \in \mathbb{R}_+,$
$$\lambda(f(\cdot, \xi^*, t)\,; x, y) \leqq -m, \quad {}^\forall x, y \in \bar{B}^* \triangleq \bar{B}[x^*; r^*], \ x \neq y.$$

今，任意に$\delta \in (0, r^*)$を与えて，$\hat{r} \triangleq r^* - \delta$とする。このとき，
$$v(t) = \xi^*, \quad {}^\forall t \in \mathbb{R}_+,$$
$$|u(t)| < m\hat{r}, \quad {}^\forall t \in \mathbb{R}_+$$
ならば，系（4.23）は，$\hat{B} \triangleq \bar{B}[x^*; \hat{r}]$内に留まる唯一の周期解を有し，任意の$x^0 \in \hat{B}$，$t_0 \geqq 0$に対し，点$(x^0, t_0)$から右に出る（4.23）の解$x^*$は指数的に周期解軌道に近づく。

（証明）　定理4・7，4・4，および縮小写像原理を用いると定理4・8の証明と同様にして証明できる。　　（証明終）

（注4・3）　この定理4・8および4・9は，リアプノフ関数を用いて一般的な形で得られている吉沢の結果[38]の実用的な十分条件となっている。

4・4・2 応用例

ここでは，4・4・1で得られた結果に対し，3つの応用例を示す。

[例1] 非線形RLMC回路

非線形時間不変結合抵抗，線形時間不変キャパシタ，線形時間不変結合インダクタ，および独立電圧源，電流源からなる電気回路網を考える。

与えられたRLMC回路において，次の仮定A～Cが満足されるものとする。

[仮定A] 適当なノーマル木で次の（A'－1）～（A'－3）を満足するものが存在する。

（A'－1）：

$$\begin{bmatrix} v_R \\ i_G \end{bmatrix} = f(i_R, v_G) \;,\; f:\mathbb{R}^{n_R}\times\mathbb{R}^{n_G}\to\mathbb{R}^{n_R}\times\mathbb{R}^{n_G} \;,\; f\in\mathcal{F}_L \;;$$

$$\exists m>0 \;,\; \mathcal{N}_2(f;x,y)\geqq m>0 \;,\; \forall x,y\in\mathbb{R}^{n_R}\times\mathbb{R}^{n_G} \;,\; x\neq y \;;$$

（A'－2）：

$$\begin{bmatrix} q_C \\ q_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_C v_C \\ C_S v_S \end{bmatrix} , \quad \begin{array}{l} C_C = diag(C_{C1},\cdots,C_{Cn_C}) \;,\; C_{Ci}>0 \;,\; \forall i\in\overline{n_C} \;; \\ C_S = diag(C_{S1},\cdots,C_{Sn_S}) \;,\; C_{Si}>0 \;,\; \forall i\in\overline{n_S} \;; \end{array}$$

（A'－3）：

$$\begin{bmatrix} \phi_L \\ \phi_\Gamma \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} i_L \\ i_\Gamma \end{bmatrix} \;,\; L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \in\mathbb{R}^{(n_L+n_\Gamma)\times(n_L+n_\Gamma)} \;,$$

$$-\mu_2(-L)>0 \;,\; L = L^{tr}.$$

[仮定B] 基本ループ行列（3.18）から得られる。

$$\beta \triangleq \begin{bmatrix} -F_{RC} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & F_{LG}^{tr} \end{bmatrix} \in\mathbb{R}^{(n_R+n_G)\times(n_C+n_L)}$$

のランクは

$$rank(\beta) = n_L + n_L$$

である。

[仮定C] 入力 v_E，$i_J\in\mathcal{P}_C$ は，直流か又は周期 ω の周期関数である。

仮定A～Cが満足されるとき，与えられたRLMC回路は，唯一の大域

指数安定な同期ωの周期解を有する。

このことを示そう。仮定Aが満足されるとき、3・4・1における条件(A－1)〜(A－3)が満足されるから、全く同様にして、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_c v_c - F_{SC}^{tr} C_S(-F_{SC} v_c - F_{SE} v_E) \\ [L_{LL}+F_{L\Gamma}L_{\Gamma L},\ L_{L\Gamma}+F_{L\Gamma}L_{\Gamma\Gamma}]\begin{bmatrix} i_L \\ F_{L\Gamma}^{tr} i_L + F_{J\Gamma}^{tr} i_T \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= -\beta^{tr}\left(f(\cdot) - \begin{bmatrix} \mathbb{O} & -F_{RG} \\ F_{RG}^{tr} & \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\beta\begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{RE} v_E \\ F_{JG}^{tr} i_G \end{bmatrix}\right)$$

$$+\begin{bmatrix} \mathbb{O} & F_{LC}^{tr} \\ -F_{LE} & \mathbb{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{JC}^{tr} i_T \\ -F_{LE} v_E \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

を得る。今、

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{C} &\triangleq [I\ \ F_{SC}^{tr}]\begin{bmatrix} C_c & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & C_S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ F_{SC} \end{bmatrix} \\ \mathcal{L} &\triangleq [I\ \ F_{L\Gamma}]\ L\begin{bmatrix} I \\ F_{L\Gamma}^{tr} \end{bmatrix} \\ A &= \mathrm{diag}[\mathcal{C},\ \mathcal{L}] \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

とすると、(A'－2)、(A'－3)からAは対称かつ正定値な行列となり[84]、$\mathbb{Q}^{-1}\cdot\mathbb{Q}^{-1}=A$ なる対称かつ正定値な行列$\mathbb{Q}$が存在する。[91] 従って、

$$x \triangleq \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

$$p \triangleq \begin{bmatrix} F_{SC}^{tr} C_S F_{SE} v_E \\ (L_{L\Gamma}+F_{L\Gamma}L_{\Gamma\Gamma})F_{J\Gamma}^{tr} i_T \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

$$\xi \triangleq \mathbb{Q}^{-1}x + \mathbb{Q}p \tag{4.35}$$

$$K \triangleq \mathbb{Q}\beta^{tr}$$

$$v = -\mathbb{Q}^2 p + \begin{bmatrix} -F_{RE} v_E \\ F_{JG}^{tr} i_T \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

$$S = \mathbb{Q}\begin{bmatrix} \mathbb{O} & F_{LC}^{tr} \\ -F_{LC} & \mathbb{O} \end{bmatrix}\mathbb{Q} = -S^{tr} \tag{4.37}$$

$$u \triangleq -Q\begin{bmatrix} \mathbb{O} & F_{LC}^{tr} \\ -F_{LC} & \mathbb{O} \end{bmatrix} Q^2 p + \begin{bmatrix} F_{JC}^{tr} i_J \\ -F_{LE} v_E \end{bmatrix} \qquad (4.38)$$

$$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{O} & -F_{RG} \\ F_{RG}^{tr} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = -\alpha^{tr} \qquad (4.39)$$

とすると，(4.31)～(4.39)から，

$$Q^{-1}\dot{\xi} = -Q^{-1}K(f(\cdot)-\alpha)^{-1}(K^{tr}\xi+v)+Q^{-1}S\xi+Q^{-1}u$$

$$\therefore \quad \dot{\xi} = -K(f(\cdot)-\alpha)^{-1}(K^{tr}\xi+v)+S\xi+u \qquad (4.40)$$

を得る。ところで

$$f(x^i)-\alpha x^i = y^i \quad , i \in \mathbb{I}$$

とすると，補題2・11から，任意の$y^1, y^2 \in \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_G}$，$y^1 \neq y^2$に対し

$$\begin{aligned} \eta_2([f(\cdot)-\alpha]^{-1}; y^1, y^2) &= \frac{\langle x^1-x^2, f(x^1)-\alpha x^1-f(x^2)+\alpha x^2 \rangle}{|f(x^1)-f(x^2)-\alpha(x^1-x^2)|_2^2} \\ &= \frac{\langle x^1-x^2, f(x^1)-f(x^2) \rangle}{|f(x^1)-f(x^2)-\alpha(x_1-x_2)|_2^2} \quad * \\ &\geq \frac{m|x^1-x^2|_2^2}{(\ell+\|\alpha\|_2)^2|x^1-x^2|_2^2} \quad ** \\ &\geq m/(\ell+\|\alpha\|_2)^2 \qquad (4.41) \end{aligned}$$

が成り立つ。一方，仮定Bから，

$$\mathrm{rank}\,(K) = \mathrm{rank}\,(\beta) = n_C + n_L$$

となることに注意すると，(4.41)と補題2・11から

$$\begin{aligned} &\eta_2(-K[f(\cdot)-\alpha]^{-1}(K^{tr}\cdot+v)+S; \xi, \hat{\xi}) \\ &= \eta_2(-K[f(\cdot)-\alpha]^{-1}(K^{tr}\cdot+v); \xi, \hat{\xi}) \quad *** \\ &= -\frac{\langle [f(\cdot)-\alpha]^{-1}(K^{tr}\xi+v)-[f(\cdot)-\alpha]^{-1}(K^{tr}\hat{\xi}+v), K^{tr}(\xi-\hat{\xi}) \rangle}{\langle \xi-\hat{\xi}, \xi-\hat{\xi} \rangle} \end{aligned}$$

---

* (4.39)より $\alpha = -\alpha^{tr}$

** ℓは$f(\cdot)$リプシッツ定数

*** (4.37)より $S = -S^{tr}$

$$\leqq -\frac{m}{(\ell+\|d\|_2)^2}\cdot\frac{\langle \xi-\hat{\xi},\ KK^{tr}(\xi-\hat{\xi})\rangle}{\langle \xi-\hat{\xi},\ \xi-\hat{\xi}\rangle}$$

$$\leqq -\frac{m\{-\mu_2(-KK^{tr})\}}{(\ell+\|d\|_2)^2},\quad \forall \xi,\hat{\xi}\in \mathbb{R}^{n_c}\times\mathbb{R}^{n_L},\ \xi\neq\hat{\xi} \qquad (4.43)$$

を得る。ここで，(4.42)から

$$-\mu_2(-KK^{tr})>0 \qquad (4.44)$$

となることに注意する。

一方，(4.34)，(4.36)，(4.38)と仮定Cから，p, v, uは周期ωの周期関数となる。

従って，(4.43)，(4.44)と定理4・8から，系(4.40)は，大域指数安定な唯一の周期解を有することがわかる。よって，(4.35)，(4.33)から，与えられたRLMC回路が大域指数安定な周期解を有することがわかる。

［例2］　非線形トランジスタ・ダイオードを含む電気回路網

p個の非線形トランジスタ，q個の非線形ダイオード，r個の線形時間不変キャパシタ，s個の非線形時間不変インダクタ，線形時間不変抵抗および独立電圧源，電流源からなる電気回路を考える。今，テブナン・ノートンの定理によって，図4・1に示す等価回路が得られたとする。

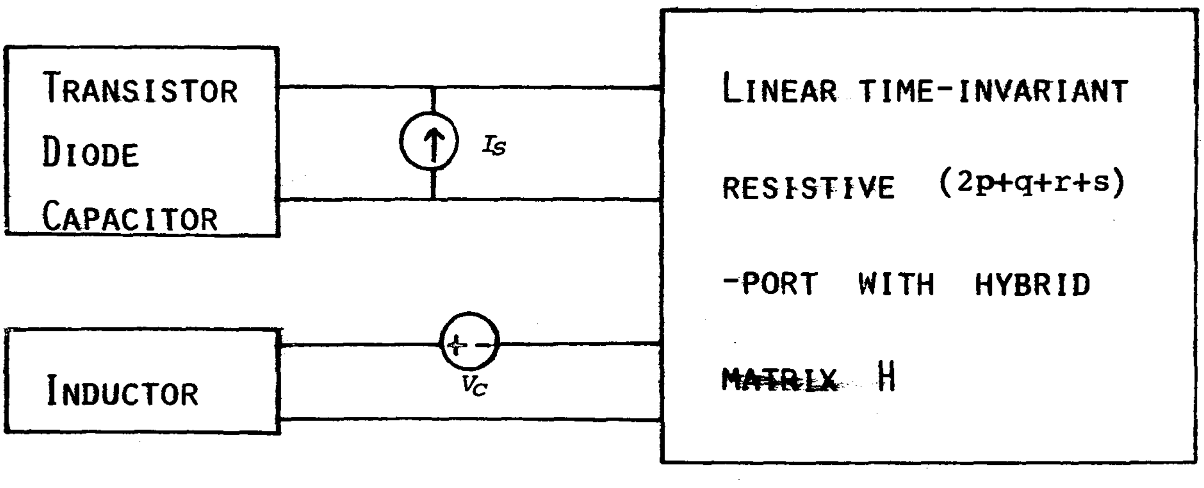


図4－1　半導体を含む一般的な電気回路

$$\xi \triangleq [v_{t_1}^{tr}, \cdots, v_{t_p}^{tr}, v_{d_1}, \cdots, v_{d_q}, v_{c_1}, \cdots, v_{c_r}, i_{L_1}, \cdots, i_{L_s}]^{tr} \in \mathbb{R}^{2p+q+r+s}$$

$$\eta \triangleq [i_{t_1}^{tr}, \cdots, i_{t_p}^{tr}, i_{d_1}, \cdots, i_{d_q}, i_{c_1}, \cdots, i_{c_r}, v_{L_1}, \cdots, v_{L_s}]^{tr} \in \mathbb{R}^{2p+q+r+s}$$

$$v_{t_k} \triangleq \begin{bmatrix} v_{te_k} \\ v_{tc_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad i_{t_k} \triangleq \begin{bmatrix} i_{te_k} \\ i_{tc_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad k \in \overline{p}$$

とすると，図4－1から，

$$\eta = -H\xi + u, \quad u \triangleq \begin{bmatrix} i_s \\ v_c \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

が得られる。又，図4－2に示すGummel-Koehler型のモデルを用いると，

$$i_{t_k} = T_k \begin{bmatrix} f_{te_k}(v_{te_k}) \\ f_{tc_k}(v_{tc_k}) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_{te_k} v_{te_k} + \tau_{e_k} f_{te_k}(v_{te_k}) \\ C_{tc_k} v_{tc_k} + \tau_{c_k} f_{tc_k}(v_{tc_k}) \end{bmatrix}, \quad k \in \overline{p} \tag{4.46}$$

および，

$$i_{d_j} = f_{d_j}(v_{d_j}) + \frac{d}{dt}[C_{d_j} v_{d_j} + \tau_{d_j} f_{d_j}(v_{d_j})], \quad j \in \overline{q} \tag{4.47}$$

を得る。但し，

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r^{(k)} \\ -\alpha_f^{(k)} & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_r^{(k)}, \alpha_f^{(k)} \in (0,1), \quad k \in \overline{p} \tag{4.48}$$

そして線形コンデンサおよび線形インダクタは，それぞれ，

$$q_j = f_{c_j}(v_{c_j}), \quad i_{c_j} = \dot{q}_j, \quad j \in \overline{r} \tag{4.49}$$

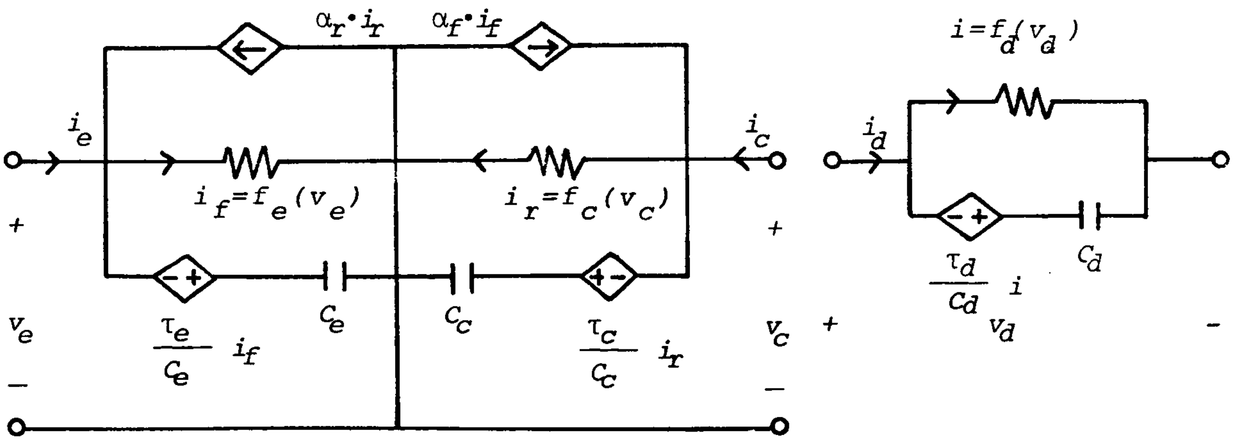


図4－2　Gummel-Koehler型トランジスタ・ダイオードモデル

および，

$$\phi_j = f_{Lj}(i_{Lj}),\ v_{Lj} = \dot{\phi}_j,\ j \in \overline{s} \tag{4.50}$$

で与えられるとする。さらに，

$$x_j \triangleq \begin{cases} C_{te_k} v_{te_k} + \tau_{e_k} f_{te_k}(v_{te_k}), & j = 2k-1,\ k \in \overline{p} \\ C_{tc_k} v_{tc_k} + \tau_{c_k} f_{tc_k}(v_{tc_k}), & j = 2k,\ k \in \overline{p} \\ C_{d_k} v_{d_k} + \tau_{d_k} f_{d_k}(v_{d_k}), & j = 2p+k,\ k \in \overline{q} \\ f_{c_k}(v_{c_k}), & j = 2p+q+k,\ k \in \overline{r} \\ f_{L_k}(i_{L_k}), & j = 2p+q+r+k,\ k \in \overline{s} \end{cases} \tag{4.51}$$

とし，これから写像 $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，$d = 2p+q+r+s$ を，

$$x = g(\xi),\quad x_j = g_j(\xi_j),\ j \in \overline{d} \tag{4.52}$$

で定める。又，

$$T \triangleq \mathrm{diag}(T_1, \cdots, T_p, I_q, O_{r+s}) \tag{4.53}$$

I_q： $q \times q$ 単位行列，O_{r+s}：$(r+s)\times(r+s)$ 零行列

とし，写像 $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を，

$$F = [f_1(\cdot), \cdots, f_d(\cdot)]^{tr}$$

$$f_j(\xi) \triangleq \begin{cases} f_{te_k}(v_{te_k}), & j = 2k-1,\ k \in \overline{p} \\ f_{tc_k}(v_{tc_k}), & j = 2k,\ k \in \overline{p} \\ f_{d_k}(v_{d_k}), & j = 2p+k,\ k \in \overline{q} \\ 0, & j = 2p+q+k,\ k \in \overline{r+s} \end{cases} \tag{4.54}$$

で定めると，(4.46)～(4.54) から

$$\begin{aligned} \eta &= TF(\xi) + \dot{x} \\ x &= g(\xi) \end{aligned} \tag{4.55}$$

を得る。さて今，次の条件 (D−1)～(D−4) が満足されるとする。

D−1： $C_{te_k}, C_{tc_k}, \tau_{e_k}, \tau_{c_k} > 0$，$\forall k \in \overline{p}$，

$\lambda(f_{te_k}; \alpha, \beta) > 0$，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha \neq \beta$，$k \in \overline{p}$，

$\lambda(f_{tc_k}; \alpha, \beta) > 0$，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha \neq \beta$，$k \in \overline{p}$；

D－2：　$c_{d_j}>0,\ j\in\bar{q}$,

$\lambda(f_{d_j};\alpha,\beta)>0,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\beta,\ j\in\bar{q}$;

D－3：　$\exists m_{c1}, m_{c2}>0,\ \forall j\in\bar{r}$,

$0<m_{c1}\leqq\lambda(f_{c_j};\alpha,\beta)\leqq m_{c2},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\beta$;

D－4：　$\exists m_{L1}, m_{L2}>0,\ \forall j\in\bar{s}$

$0<m_{L1}\leqq\lambda(f_{L_j};\alpha,\beta)\leqq m_{L2},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\beta$.

このとき，

$c_t\triangleq\min\{c_{te_k}, c_{tc_k}, k\in\bar{p}\}>0$

$c_d\triangleq\min\{c_{d_j}, j\in\bar{q}\}>0$

$m\triangleq\min\{c_t, c_d, m_{c1}, m_{L1}\}>0$

とすると，

$$\lambda_i(g;\xi,\hat{\xi})\geqq m>0,\ \forall\xi,\hat{\xi}\in\mathbb{R}^d,\ \xi\neq\hat{\xi} \qquad (4.56)$$

となり，定理3.3から$g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$は同相写像となる。今，$\hat{g}\triangleq g^{-1}$とすると，(4.45)，と(4.55)から

$$\dot{x}=-TF[\hat{g}(x)]-H\hat{g}(x)+u \qquad (4.57)$$

が得られる。

系(4.57)に対し次の結果が得られる。

条件(D－1)～(D－4)に加えて，次の条件(D－5)が満足されるとする。

D－5：　$\exists D=\mathrm{diag}(D_1,D_2)\in\mathcal{D}_+,\ D_1\in\mathbb{R}^{n\times n},\ D_2\in\mathbb{R}^{m\times m}$,

$n\triangleq 2p+q,\ m\triangleq r+s$,

$\mu_1(-D_1\tilde{T})<0$

$\mu_1(-DH)<0$

但し，$\tilde{T}\triangleq\mathrm{diag}(T_1,\cdots,T_p,I_q)\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

このとき，入力uが周期ωの周期関数ならば，系(4.57)は唯一の大域指数安定な周期ωの周期解を有する。

これを証明しよう。

$$\hat{T}=(\hat{t}_{ij})\triangleq D_1\tilde{T}\in\mathbb{R}^{n\times n} \qquad (4.58)$$

$$\hat{H} = (\hat{h}_{ij}) \triangleq DH \in \mathbb{R}^{d\times d} \tag{4.59}$$

とおく。このとき、条件(D−5)から、

$$\exists \delta_1 > 0 \ , -\hat{f}_{jj} + \Sigma_{i\neq j} |\hat{f}_{ij}| \leqq -\delta_1 < 0 \ , \ \forall j \in \overline{n} \tag{4.60}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \ , -\hat{h}_{jj} + \Sigma_{i\neq j} |\hat{h}_{ij}| \leqq -\delta_2 < 0 \ , \ \forall j \in \overline{d} \tag{4.61}$$

が成り立つ。又、

$$(\hat{c}_j, \hat{\tau}_j) \triangleq \begin{cases} (c_{tek}, \tau_{ek}) \ , \ j = 2k-1 \ , \ k \in \overline{p} \\ (c_{tck}, \tau_{ek}) \ , \ j = 2k \ , \ k \in \overline{p} \\ (c_{dk}, \tau_{dk}) \ , \ j = 2p+k \ , \ k \in \overline{q} \end{cases}$$

とおく。このとき、条件(D−1)、(D−2)から、

$$\hat{c}_j > 0 \ , \ \hat{\tau}_j > 0 \ , \ j \in \overline{n} \tag{4.62}$$

が成り立つ。ところで、

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_d)$$

とし、$\hat{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を、

$$\hat{F}(x) \triangleq [\hat{f}_1(x_1), \cdots, \hat{f}_d(x_d)]^{tr} ,$$

$$\hat{f}_j(x_j) \triangleq f_j[\hat{q}_j(d_j^{-1} x_j)] \ , \ j \in \overline{d} \tag{4.63}$$

で定める。任意の $j \in \overline{d}$ 、$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$、$\beta_1 \neq \beta_2$ に対し、

$$\alpha_i^j \triangleq \hat{q}_j(\beta_i) = q_j^{-1}(\beta_i) \ , \ i \in \overline{2} \tag{4.64}$$

とすると、(4.63)、(4.64)、(4.54)、(4.51)と(4.52)から、

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{f}_j ; d_j\beta_1, d_j\beta_2) &= \frac{\hat{f}_j(d_j\beta_1) - \hat{f}_j(d_j\beta_2)}{d_j\beta_1 - d_j\beta_2} \\ &= \frac{f_j(\alpha_1^j) - f_j(\alpha_2^j)}{d_j\{q_j(\alpha_1^j) - q_j(\alpha_2^j)\}} \\ &= \frac{1}{d_j} \cdot \frac{\lambda(f_j ; \alpha_1^j, \alpha_2^j)}{\lambda(q_j ; \alpha_1^j, \alpha_2^j)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{d_j} \cdot \dfrac{\lambda(f_j ; \alpha_1^j, \alpha_2^j)}{\hat{c}_j + \hat{\tau}_j \lambda(f_j ; \alpha_1^j, \alpha_2^j)} \ , \ j \in \overline{n} \\ 0 \ , \ j \in \overline{d} \ , \ j \geqq n+1 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.65}$$

を得る。同様に、

$$\lambda(\hat{g}_j[d_j^{-1}\cdot\,];d_j\beta_1,d_j\beta_2)$$
$$=\begin{cases}\hat{c}_j+\hat{\tau}_j\lambda(f_j;d_1 i,d_2 i) & ,j\in\overline{n}\\ \lambda(g_j;d_1 i,d_2 i) & ,j\in\overline{d},\ j\geqq n+1\end{cases} \tag{4.66}$$

を得る。このとき，(4.62)，(4.65)，(4.66)，と条件 (D−1)，(D−2)から

$$\exists\gamma>0,\ \min\{\lambda(\tilde{f}_j;d_j\beta_1,d_j\beta_2),\ \lambda(\hat{g}_j;d_j\beta_1,d_j\beta_2)\}\geqq\gamma>0,$$
$$\forall j\in\overline{n},\ \forall\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R},\ \beta_1\neq\beta_2 \tag{4.67}$$

が成り立つ。又，(4.66)と条件 (D−3)，(D−4)から，

$$\exists\hat{\gamma}>0,\ \lambda(\hat{g}_j[d_j^{-1}\cdot\,];d_j\beta_1,d_j\beta_2)\geqq\hat{\gamma}\triangleq\min\{1/m_{c2},\ 1/m_{L2}\},$$
$$\forall j\in\overline{d},\ j\geqq n+1,\ \beta_1,\beta_2\in\mathbb{R},\ \beta_1\neq\beta_2 \tag{4.68}$$

が成り立つ。従って，$a_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$i,j\in\overline{d}$ を，

$$a_{ij}(x_j)\triangleq\begin{cases}-\hat{t}_{ij}\tilde{f}_j(x_j)-\hat{h}_{ij}\hat{g}_j[d_j^{-1}x_j], & i\in\overline{n},\ j\in\overline{n}\\ -\hat{h}_{ij}\hat{g}_j[d_j^{-1}x_j], & \text{その他}\end{cases} \tag{4.69}$$

とすると，(4.60)，(4.61)，(4.67)〜(4.69)から，

$$\lambda(a_{jj};d_j\alpha,d_j\beta)+\sum_{i\neq j}|\lambda(a_{ij};d_j\alpha,d_j\beta)|\leqq-m_0<0,$$
$$\forall j\in\overline{d},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\beta \tag{4.70}$$

が成り立つ。但し，

$$m_0\triangleq\min\{\delta_1\gamma,\ \delta_2\gamma,\ \delta_2\hat{\gamma}\}$$

一方，$\psi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ を

$$\psi(x)\triangleq-TF[\hat{g}(x)]-H\hat{g}(x) \tag{4.71}$$

で定め，$\tilde{\psi}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ を

$$\tilde{\psi}(x)=[\tilde{\psi}_1(x),\cdots,\tilde{\psi}_d(x)]^{tr}$$
$$=-D\psi[D^{-1}x] \tag{4.72}$$

で定めると，(4.69)，(4.71)と(4.72)から

$$\tilde{\psi}_i(x)=\sum_{j=1}^{d}a_{ij}(x_j) \tag{4.73}$$

となる。又，$|x|_D\triangleq|Dx|_1$ とすると，定理2・2.(i) (4.71)〜(4.73)

と(4.70)から補題2・6と同様にして，

$$\begin{aligned}\lambda_D(\Psi;x,y)&=\lambda_1(D\Psi D^{-1};Dx,Dy)\\&=\lambda_1(\tilde{\Psi};Dx,Dy)\\&\leqq -m_0,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^d,\ x\neq y\end{aligned}\tag{4.74}$$

を得る。従って，(4.71)，(4.74)と定理8・8から，系(4.57)が大域指数安定な周期ωの周期解を有することがわかる。

(注4・4)　この例題は，Sandberg[87]が，集積回路とそれに抵抗，インダクタ，キャパシタ，電源などの外部素子を加えた電気回路において，入力uが直流の場合に大域指数安定な直流解が存在するための十分条件として示したものである。

以上2つの電気回路の例を示したが，これらはいずれも大域的な条件の下に周期解の存在が保証されている。最後に，局所的な条件を満たす例を示そう。

［例3］　Duffing方程式

鉄共振現象などにおいてあらわれる次の系を考える。

$$\ddot{y}+2b\dot{y}+k^2y+ay^3=v(t)\tag{4.75}$$

但し，$a>0$，$b>0$，$k>0$；$v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，$v\in\mathcal{P}_c$．

系(4.75)において次の変換：

$$y=x_1,\quad \dot{y}=-bx_1+cx_2,\quad c=b+k-\epsilon>0$$

を行うと

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-bx_1+cx_2\\\{(b^2-k^2)x_1-ax_1^3\}/c-bx_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\v(t)/c\end{bmatrix}\tag{4.76}$$

が得られる。上式を改めて，

$$\dot{x}=f(x)+u\tag{4.77}$$

と示すと，

$$f'(x)=\begin{bmatrix}-b & c\\(b^2-k^2-3ax_1^2)/c & -b\end{bmatrix}\tag{4.78}$$

を得る。今，

$$\mu_2[f'(x)] = \max_{i \in I} \lambda_i \left(\frac{f'(x) + [f'(x)]^{tr}}{2} \right) \leqq -m < 0 \qquad (4.89)$$

なる領域を求めることを考える。(4.89)が成り立つためには,

$$(b-c)^2 + 2cm - k^2 \leqq 3ax_i^2 \leqq (b+c)^2 - k^2 - 2cm \qquad (4.90)$$

が満足されればよい。

$$(b-c)^2 + 2cm - k^2 = 0 \qquad (4.91)$$

の下で,

$$g(c, m) \triangleq (b+c)^2 - k^2 - 2cm \qquad (4.92)$$

を最大にすることを考えると,(4.91),(4.92)から

$$g(c, m) = 2(b^2 + c^2 - k^2) \qquad (4.93)$$

となり,gはc(>0)の増加関数である。$c>0$,$m>0$より

$$2cm = k^2 - (b-c)^2 > 0$$

$$\therefore\ b-k < c < b+k$$

$\varepsilon > 0$として,

$$c \triangleq b + k - \varepsilon > 0 \qquad (4.94)$$

とすると,(4.91)から,

$$m = \frac{\varepsilon(2k - \varepsilon)}{2(b+k-\varepsilon)} \qquad (4.95)$$

(4.94)を(4.93)へ代入して,

$$\begin{aligned} g(c, m) &= 2\{b^2 + (b+k-\varepsilon)^2 - k^2\} \\ &= 2\{\varepsilon^2 + 2(b+k)(b-\varepsilon)\} \end{aligned} \qquad (4.96)$$

$g(c,m) > 0$であるためには,

$$\begin{aligned} &0 < \varepsilon < b + k - \sqrt{k^2 - b^2}, \quad b < k \\ &0 < \varepsilon < b + k, \quad b \geqq k \end{aligned} \qquad (4.97)$$

でなければならない。さて今,定理4.9を適用するために,$x^* = 0$とし(4.90),(4.92),(4.96)から

$$r^* \triangleq \left\{ \frac{2\{\varepsilon^2 + 2(b+k)(b-\varepsilon)\}}{3a} \right\}^{1/2}$$

とする。そして，任意に$\delta \in (0, r^*)$を与えて，

$$\sup\{|v(t)|/c,\ t\in[0,\omega]\} \leqq m\hat{r},\ \hat{r} \triangleq r^*-\delta$$

すなわち，

$$\sup\{|v(t)|,\ t\in[0,\omega]\} \leqq cm\hat{r}$$

$$= \frac{\varepsilon(2k-\varepsilon)}{2} \times \hat{r}$$

であり，vが周期ωの周期関数であれば，$\hat{B} \triangleq \bar{B}[\theta;\hat{r}]$内の任意の点から出発した解軌道は，$\hat{B}$内に留まる周期$\omega$の周期解軌道へ指数的に近づくことがわかる。（補題2・8参照）

（注4・5）　$\varepsilon>0$は（4.97）をみたす範囲で，場合に応じて適当に定めればよい。

4・5 結　論

この章では，非線形常微分方程式の可解性について考察し，2つのタイプの結果を得た。1つは，岡村の結果に沿って得られるものであるが，より実用的な結果を得ることができた。又，もう1つの結果は，安定性をも考慮するために，前者のように大域的な条件を必要としないものである。又，安定性については，指数安定性および有界入力有界出力について若干の結果を得た。そして，それらを周期系へ応用し，周期解の存在と安定性に関して実用的な結果を得ることができた。得られた結果は，いずれの場合も一定入力の下における平衡点の存在と唯一性，およびその安定性をも保証している。

第5章．平衡点方程式に対する反復法の適用および収束性 (64)(65)，(70)(88)

5・1 緒　言

平衡点方程式（直流方程式）は，非線形抵抗回路網における直流解析の他に，陰的積分公式による常微分方程式の数値解析，差分近似による偏微分方程式の数値解析，そして前章でふれた周期系における周期解を求めるに際して，それを常微分方程式の境界値問題としてとらえて，それを差分近似して数値解析を行う場合などに現われる。

まず5・2では，非線形ヤコビ法および非線形SOR法について考察する。そのために，5・2・1では，基礎となる線形方程式に対する収束性を検討し，従来知られている結果を整理，拡張する。そして，5・2・2では，その結果が非線形方程式に対してもほぼそのまま成り立つことを示す。

又，5・3では，Sandbergの反復法(43)を，もう少し使い易い形に変形した反復法を提案し，その収束性について検討する。

そして5・4では，それらの結果の応用例を示す。まず5・4・1では非線形抵抗回路の直流解析においてよく見られる2つのタイプの直流方程式へ応用し，5・4・2では，周期系に対し応用する。

5・2 非線形ヤコビ法，非線形SOR法．

5・2・1 線形方程式に対する収束性

対象とする方程式は次式で与えられる。

$$Ax = b \qquad (5.1)$$

但し，$A \in \mathbb{R}^{d \times d}$，$b \in \mathbb{R}^d$．

ここでは，次の2つの反復法について考える。

(a) ヤコビ法：

$$x^{k+1} = D^{-1}[L+U]x^k + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \cdots \qquad (5.2)$$

(b) SOR法：

$$x^{k+1} = (D-\omega L)^{-1}(\omega U + (1-\omega)D)x^k + \omega(D-\omega L)^{-1}b, \quad k=0,1,\cdots \tag{5.3}$$

但し，D，L，Uは，$A = D - L - U$，

$$\left.\begin{array}{l}
A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} A_{11} & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_{NN} \end{bmatrix} \\
L = \begin{bmatrix} O & & & \\ -A_{21} & \ddots & & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -A_{N1} & \cdots & -A_{NN-1} & O \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} O & -A_{12} & \cdots & -A_{1N} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -A_{N-1N} \\ O & & & O \end{bmatrix}
\end{array}\right\} \tag{5.4}$$

で与えられる。ここに $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$，$\sum_{i=1}^{N} n_i = d$ である。

（注5.1） ヤコビ法，SOR法において，$n_i = 1$ $(i \in \overline{N},\ N = d)$ であるとき，点ヤコビ法，点SOR法と呼び，そうでないときブロックヤコビ法，ブロックSOR法という。又，SOR法では加速パラメータωは通常 $(0, 1]$，又は，$(0, 2)$ の範囲にえらばれるが，特に $\omega = 1$ である場合に，ガウス・ザイデル法と呼ばれることもある。

さてヤコビ法では，

$$G = D^{-1}[L+U], \quad \hat{b} = D^{-1}b \tag{5.5}$$

とし，SOR法では，

$$G = (D-\omega L)^{-1}[\omega U + (1-\omega)D], \quad \hat{b} = \omega(D-\omega L)^{-1}b \tag{5.6}$$

とすると，各反復法は，

$$x^{k+1} = Gx^k + \hat{b}, \quad k=0,1,\cdots \tag{5.7}$$

と表わされる。もし，AおよびDの正則性を仮定するならば，(5.1)の唯一解x^*は，(5.7)で示される反復法の唯一の不動点であることは容易にわかる。そして，反復法(5.7)が収束するための十分条件は，行列Gのノルムが1より小であることであるが，ここでは行列Aがどのような性質を有するとき，Gがそのような性質を有するかということについて考察する。

まずGが(5.5)で与えられる場合について考える。

[補題5.1]　行列Aが強優行和($A\in SRSD$)とする。このとき，

i)　$\det(D)\neq 0$;

ii)　$\|D^{-1}(L+U)\|_\infty < 1$

である。但し，$\|\cdot\|_\infty$は，l_∞ノルムによって誘導される行列ノルムを示す。

(証明)　定理2.4，3)，7)から，A_{kk}，$k\in\overline{N}$およびDの正則性は明らか，次に任意の$k\in\overline{N}$に対して，

$$B=(b_{ij})\triangleq A_{kk}\in\mathbb{R}^{r\times r},\quad r\triangleq n_k$$
$$B^{-1}=(\hat{b}_{ij})\in\mathbb{R}^{r\times r}$$
$$C=(c_{ij})\triangleq[A_{k1},\cdots,A_{kk-1}\ A_{kk+1},\cdots,A_{kN}]\in\mathbb{R}^{r\times q},\quad q\triangleq d-r$$

とすると，

$$\sum_{j=1}^{q}\Big|\sum_{s=1}^{r}\hat{b}_{is}c_{sj}\Big|<1,\quad {}^\forall i\in\overline{r} \tag{5.8}$$

を示せば，ii)が得られる。

$A\in SRSD$であるから，

$$^\exists m>0,\quad b_{ss}-\sum_{j\neq s}|b_{sj}|-\sum_{j=1}^{s}|c_{sj}|\geq m>0,\quad {}^\forall s\in\overline{r} \tag{5.9}$$

が成り立っている。従って，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q}\Big|\sum_{s=1}^{r}\hat{b}_{is}c_{sj}\Big| &\leqq \sum_{s=1}^{r}\Big(|\hat{b}_{is}|\sum_{j=1}^{q}|c_{sj}|\Big)\\ &\leqq \sum_{s=1}^{r}\Big\{|\hat{b}_{is}|\Big(b_{ss}-\sum_{j\neq s}|b_{sj}|\Big)\Big\}-m\sum_{j=1}^{r}|\hat{b}_{ij}|\end{aligned} \tag{5.10}$$

を得る。一方，$B^{-1}\cdot B=I$であるから，

$$1=\sum_{j=1}^{r}\Big|\sum_{s=1}^{r}\hat{b}_{is}b_{sj}\Big|\geqq\sum_{s=1}^{r}\Big\{|\hat{b}_{is}|\Big(b_{ss}-\sum_{j\neq s}|b_{sj}|\Big)\Big\} \tag{5.11}$$

が成り立つ。(5.10), (5.11)から,

$$\sum_{j=1}^{q} \left| \sum_{s=1}^{r} \hat{b}_{is} c_{sj} \right| \leqq 1 - m \hat{b}_{ii} \tag{5.12}$$

を得る。一方, $A \in SRSD$であるから, 定理2・4, 3), 7)から,

$$\hat{b}_{ii} = (\det \tilde{B}_{ii} / \det B) > 0 \tag{5.13}$$

となる。但し, $\tilde{B}_{ii}$はb_{ii}の余因子行列を示す。

従って, (5.12), (5.13)から, (5.8)を得る。 (証明終)

次にGが(5.6)で与えられる場合について考える。

[補題5・2] $A \in SRSD$とする。このとき,

i) $\det[D - \omega L] \neq 0$;

ii) $\| (D - \omega L)^{-1} [\omega U + (1-\omega) D] \|_\infty < 1$, $\forall \omega \in (0, 1]$

となる。

(証明) 定理2・4, 3), 7)から, A_{kk}, $k \in \overline{N}$ およびDの正則性は明らか。$D - \omega L$ の正則性はDの正則性から明らか。

次に, 任意に$\omega \in (0, 1]$を与え,

$$\tilde{L} = (\hat{l}_{ij}) \triangleq D^{-1} L$$

$$\tilde{U} = (\hat{u}_{ij}) \triangleq D^{-1} U$$

$$B = (b_{ij}) \triangleq I - \omega \tilde{L}$$

$$B^{-1} = (\hat{b}_{ij})$$

$$C = (c_{ij}) \triangleq \omega \tilde{U} + (1-\omega) I$$

とする。

$$(D - \omega L)^{-1} [\omega U + (1-\omega) D]$$

$$= (I - \omega D^{-1} L)^{-1} [\omega D^{-1} U + (1-\omega) I]$$

であるから,

$$\sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{s=1}^{d} \hat{b}_{is} c_{sj} \right| < 1, \quad \forall i \in \overline{d} \tag{5.14}$$

を示せば, ii)が得られる。

補題5・1から,

$$\| D^{-1} (L + U) \|_\infty = \| \tilde{L} + \tilde{U} \|_\infty < 1 - m\beta \tag{5.15}$$

$$\beta \triangleq \min \{ [A_{kk}^{-1}]_{ii}, i \in n_k, k \in \overline{N} \} > 0 \tag{5.16}$$

が成り立つ。但し，$[A_{RR}^{-1}]_{ii}$は，A_{RR}の逆行列A_{RR}^{-1}の(i,i)成分を示す。
(5.15)はかき直すと，

$$\sum_{j=1}^{d} |\tilde{u}_{sj}| \leqq 1 - \sum_{j \neq s} |\tilde{l}_{sj}| - m\beta, \quad {}^{\forall} s \in \bar{d} \tag{5.17}$$

となる。従って，$\omega \in (0,1]$と(5.17)から，

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d} |\sum_{s=1}^{d} \hat{b}_{is} c_{sj}| \\
&\leqq \sum_{s=1}^{d} (|\hat{b}_{is}| \sum_{j=1}^{d} |c_{sj}|) \\
&= \sum_{s=1}^{d} (|\hat{b}_{is}| \cdot \{\omega \sum_{j \neq s} |\tilde{u}_{sj}| + 1 - \omega\}) \\
&\leqq \sum_{s=1}^{d} (|\hat{b}_{is}| \cdot \{1 - \omega \sum_{j \neq s} |\tilde{l}_{sj}|\}) - \omega m \beta \quad *
\end{aligned} \tag{5.18}$$

を得る。一方，$B^{-1} \cdot B = I$から，

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{j=1}^{d} |\sum_{s=1}^{d} \hat{b}_{is} b_{sj}| \\
&\geqq \sum_{j=1}^{d} \{|\hat{b}_{is}| (b_{ss} - \sum_{j \neq s} |b_{sj}|)\} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \{|\hat{b}_{is}| (1 - \omega \sum_{j \neq s} |\tilde{l}_{sj}|)\}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

が成り立つ。従って，(5.18)，(5.19)から，

$$\sum_{j=1}^{d} |\sum_{s=1}^{d} \hat{b}_{is} c_{sj}| \leqq 1 - \omega m \beta \tag{5.20}$$

となり，(5.14)を得る。

補題5・1，5・2から次の定理を得る。

[定理5・1]　次の諸条件のうちいずれか1つが満足されれば，ヤコビ法およびSOR法($0 < \omega \leqq 1$)は，$Ax = b$の唯一解x^*へ収束する。

1)　$A \in SRSD$;

2)　$A_s \in SRSD$, $A_s \triangleq SA$, $S = \mathrm{diag}[\mathrm{sgn}(a_{11}), \cdots, \mathrm{sgn}(a_{dd})]$;

3)　$A \in SCSD$;

4)　$A_s \in SCSD$;

5)　$A \in I_r DD$;

6)　$A \in M$;

7)　$A_s \in M$;

8)　$A \in \mathcal{D}$;

9)　$A_s \in \mathcal{D}$.

さらに各条件の関係は次のようになる。

$$\begin{tikzcd} 1) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & 2) \arrow[d, Rightarrow] \\ 6) \arrow[r, Rightarrow] & 7) \\ 3) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & 4) \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 6) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & 7) \arrow[d, Rightarrow] & \\ 8) \arrow[r, Rightarrow] & 9) & 5) \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

(証明) 各条件の関係は、定理2・4から明らか。従って、9)が満足されるとする。このとき、定理2・4、1)から、

$$^{\exists}Q\in\mathcal{D}_+,\ \hat{A}=Q^{-1}SAQ\in SRSD$$

となる。今、$y=Q^{-1}x$とすると、(5.7)から、

$$y^{k+1}=\hat{G}y^{k}+\hat{b},\ \hat{G}=Q^{-1}GQ,\ \hat{b}=Q^{-1}b,\ k=0,1,\cdots \tag{5.21}$$

を得る。ところで、

$$\hat{D}\triangleq Q^{-1}DQ,\ \hat{L}\triangleq Q^{-1}LQ,\ \hat{U}\triangleq Q^{-1}UQ$$
$$\tilde{D}\triangleq Q^{-1}SDQ,\ \tilde{L}\triangleq Q^{-1}SLQ,\ \tilde{U}\triangleq Q^{-1}SUQ$$

とすると、

$$\hat{D}^{-1}(\hat{L}+\hat{U})=\tilde{D}^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U})$$
$$(\hat{D}-\omega\hat{L})^{-1}[\omega\hat{U}+(1-\omega)\hat{D}]=(\tilde{D}-\omega\tilde{L})^{-1}[\omega\tilde{U}+(1-\omega)\tilde{D}]$$

であることに注意すると、$\hat{A}\in SRSD$であるから、(5.5)、(5.6)、(5.21)、補題5・1および5・2から、$\|\hat{G}\|_\infty<1$となる。従って、$\hat{G}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ ($\hat{G}x\triangleq\hat{G}x+\hat{b}$)は、縮小写像となっている。又、写像$T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ ($Tx\triangleq Q^{-1}x$)は同相写像であるから、補題2・14によって結論を得る。

(証明終)

(注5・2) 定理5・1、2)又は5)が満足されるとき、点ヤコビ法および点ガウス・ザイデル法が収束することは、Collatz, Gringer らによって示されている[90]。又、6)が満足されるときについては、従来正則分離(regular-splitting)を用いて同じ結果が得られている[92],[91]。

5・2・2 非線形方程式における収束性

対象とする非線形方程式は次式で与えられる。

$$F(x)=[f_1^{tr}(x),\cdots,f_N^{tr}(x)]^{tr}=\theta \tag{5.22}$$

但し，$F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, $f_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{n_i}$, $f_i\in\mathcal{P}_{C^1}$, $i\in\overline{N}$; $\sum_{i=1}^N n_i=d$.

次の2つの反復法を考える．

(a)　非線形ヤコビ法：

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\omega(\bar{x}_i-x_i^k),\ i\in\overline{N},\ k=0,1,\cdots. \tag{5.23}$$

但し，$\bar{x}_i\in\mathbb{R}^{n_i}$は，

$$f_i(x_1^k,\cdots,x_{i-1}^k,\bar{x}_i,x_{i+1}^k,\cdots,x_N^k)=\theta \tag{5.24}$$

の解である．

(b)　非線形SOR法：

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\omega(\bar{x}_i-x_i^k),\ i\in\overline{N},\ k=0,1,\cdots \tag{5.25}$$

但し，$\bar{x}_i\in\mathbb{R}^{n_i}$は，

$$f_i(x_1^{k+1},\cdots,x_{i-1}^{k+1},\bar{x}_i,x_{i+1}^k,\cdots,x_N^k)=\theta \tag{5.26}$$

の解である．

(注5・3)　ここでは，(5.22)のようにFを定めたが，各n_iの大きさは任意でよい。又，各$f_i\in\mathcal{P}_{C^1}$であるから$F\in\mathcal{P}_{C^1}$となる。

さて非線形ヤコビ法，非線形SOR法の収束については，補題5・1，5・2から直ちに次の結果が得られる．

[定理5・2]　方程式(5.22)に対して，次の条件：　(5.27)

$$\exists m>0,\ -\mu_\infty[-F'(x)]\geq m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^d$$

が成り立つならば，次のことが成り立つ．

i)　$F(x)=\theta$は唯一解x^*を有する；

ii)　方程式(5.24)，(5.26)は唯一解$\bar{x}_i$を有する；

iii)　非線形ヤコビ法，非線形SOR法($0<\omega\leq1$)は，x^*に大域収束する．

(証明)　i)，(5.27)と系3・3から明らか．

ii)　(5.27)と補題2・4から

$$-\mu_\infty[-\partial_i f_i(x)]\geq m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^d$$

が成り立つから，上式と系3・3から明らか．

iii) まず非線形ヤコビ法について考える．

$$x^{k,i} \triangleq [(x_1^k)^{tr}, \cdots, (x_{i-1}^k)^{tr}, [x_i^k + (1/\omega)(x_i^{k+1} - x_i^k)]^{tr}, (x_{i+1}^k)^{tr}, \cdots, (x_N^k)^{tr}]^{tr}$$

とすると，(5.26)，(5.27)から，

$$f_i(x^{k,i}) = \theta, \quad i \in \overline{N}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

となる．一方，i)から，

$$f_i(x^*) = \theta, \quad i \in \overline{N}$$

であるから，補題2・1によって，

$$\begin{aligned}\theta &= f_i(x^{k,i}) - f_i(x^*) \\ &= [\int_0^1 f_i'(\tau x^{k,i} + (1-\tau)x^*)d\tau][x^{k,i} - x^*], \quad i \in \overline{N}\end{aligned}$$

を得る．従って，

$$x^k \triangleq [(x_1^k)^{tr}, \cdots, (x_N^k)^{tr}]^{tr}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

$$A_{ij}^k \triangleq \int_0^1 \partial_j f_i(\tau x^{k,i} + (1-\tau)x^*)d\tau, \quad j, i \in \overline{N}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

とすると，

$$\begin{aligned}\theta = &[A_{i1}^k, \cdots, A_{i\,i-1}^k, (1 - 1/\omega)A_{ii}^k, A_{i\,i+1}^k, \cdots, A_{iN}^k][x^k - x^*] \\ &+ (1/\omega)[\mathbb{O}, \cdots, \mathbb{O}, A_{ii}^k, \mathbb{O}, \cdots, \mathbb{O}][x^{k+1} - x^*], \\ &\qquad\qquad \forall i \in \overline{N}, \quad k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，$A_k \triangleq (A_{ij}^k)$ に対し，D_k，L_k，U_k を(5.4)のように定めると，

$$D_k[x^{k+1} - x^*] = [\omega(L_k + U_k) + (1-\omega)D_k][x^k - x^*], \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.28}$$

を得る．一方，(5.27)と補題2・4に注意すると，

$$-\mu_\infty(-D_k) \geqq -\mu_\infty(-A_k) \geqq m > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

となり，補題5・1によって，

$$\|D_k^{-1}(L_k + U_k)\|_\infty \leqq 1 - m\beta_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\beta_k = \min\{[A_{jj}^{-1}]_{ii}, i \in n_j, j \in \overline{n}\}$$

が成り立つ．従って，

$$\|D_k^{-1}[\omega(L_k + U_k) + (1-\omega)D_k]\|_\infty$$

$$\leqq \omega(1-m\beta_k)+(1-\omega)$$
$$= 1-\omega m\beta_k,\ k\in\mathbb{N} \tag{5.29}$$
を得る。(5.28)と(5.29)から，
$$|x^{k+1}-x^*|_\infty \leqq (1-\omega m\beta_k)|x^k-x^*|_\infty,\ k\in\mathbb{N} \tag{5.30}$$
が成り立つ。今，(5.23)，(5.24)によって定まるx^kとx^{k+1}の対応によって写像$G:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$（$x^{k+1}=G[x^k]$）を定めると，任意の$x^0\in\mathbb{R}^d$に対して閉球$\overline{B_0}\triangleq\overline{B}[x^*;|x^0-x^*|_\infty]$を定めるとき，(5.30)から，$G$は$\overline{B_0}$からそれ自身の中への写像となることがわかる。一方 はコンパクトであるから，
$$\exists\beta^*>0,\ \beta_k\geqq\beta^*>0,\ {}^\forall x^0\in\overline{B_0},\ k\in\mathbb{N}$$
となる。従って，(5.30)から，
$$|G(x)-G(x^*)|\leqq\alpha|x-x^*|,\ {}^\forall x\in\overline{B_0} \tag{5.31}$$
$$\alpha\triangleq 1-\omega m\beta^*<1$$
を得る。一方，(5.30)と同様にして，ある$\hat{\alpha}\in(0,1)$に対して
$$|G(x)-G(y)|_\infty\leqq\hat{\alpha}|x-y|_\infty,\ {}^\forall x,y\in\overline{B_0}$$
を得るから，Gは連続である。従って，非線形ヤコビ法は，x^*へ大域収束することがわかる。

非線形SOR法についても，補題5・2を用いて同様に証明できる。

（証明終）

（注5・4）　さてここでは，非線形ヤコビ法および非線形SOR法の収束性を考えるにあたって，(5.24)および(5.26)が完全に解かれることを仮定してきた。しかし，これらは原理的には無限回の操作を必要としている。一方実際的には有限回で計算を打ち切って次の反復を行う必要がある。このように有限回で打ち切って反復計算を行う場合の"収束性"については，系2・3によって*，各ステップにおける打ち切り誤差が十分小であれば，それぞれの反復法によって得られる数値解と真の解との誤差もまた十分小さいことが保証される。

---

*　この場合は，T＝Iである。

さて次に，方程式 (5.22) において，$F'(x)$ が対称である場合について考えよう。Fがアファイン写像，すなわち，$F(x)=Ax+b$ の場合については，オストロフスキー・ライクの定理[90][91]が知られているが，ここではそれがある程度非線形方程式に対して拡張できることを示す。

まず次の補題を示す。

［補題5・3］（対称性原理[12]）　写像 $F:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，$F \in Pc^1$ を与える。このとき，任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し，$F'(x)$ が対称ならば，$g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，$g \in C^1$ が存在して，$[g'(x)]^{tr} \equiv F'(x)$ となる。さらに g は，

$$g(x)=\int_0^1 \langle x-x^0, F[x^0+t(x-x^0)] \rangle dt$$

で与えられる。但し，$x^0 \in \mathbb{R}^d$ は任意に固定された点である。

さて $F:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ が補題5・3の条件を満足し，さらに次の条件：

$$^{\exists}m>0,\quad -\mu_2[-F'(x)] \geq m > 0,\quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^d \tag{5.32}$$

が成り立つとする。このとき，系3・3から，$F(x)=\theta$ は唯一解 x^* を有すが，この x^* を用いて，$g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を，

$$g(x) \triangleq \int_0^1 \langle x-x^*, F[x^*+t(x-x^*)] \rangle dt \tag{5.33}$$

で定める。補題2・1を用いると，(5.32)から，

$$\begin{aligned} g(x) &= \langle x-x^*, [\int_0^1\int_0^1 F'[x^*+ts(x-x^*)]dsdt][x-x^*] \rangle \\ &\geq m\,|x-x^*|_2^2,\quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

となり，

$$g(x) \geq 0,\quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^d$$

$$g(x)=0 \iff x=x^*$$

であること，および g が一様凸関数（uniformly convex function）となることがわかる[12]　一方，(5.25)，(5.26)で定義された非線形SOR法は，一般に加速パラメータ ω を各ステップにおいて変化させるとき，

$$y^{Nk+i} \triangleq [(x_1^{k+1})^{tr},\cdots,(x_i^{k+1})^{tr},(x_{i+1}^{k})^{tr},\cdots,(x_N^{k})^{tr}]^{tr}$$

$$i \in \overline{N},\quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.34}$$

とすると，

$$y^{Nk+i} = y^{Nk+i-1} - \omega_{k,i} P_i \xi_{k,i}, \quad i \in \overline{N}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{5.35}$$
$$f_i(y^{Nk+i-1} - P_i \xi_{k,i}) = \theta, \quad i \in \overline{N}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{5.36}$$
のように表わせる。但し，$P_i \in \mathbb{R}^{d \times n_i}$，$\xi_{k,i} \in \mathbb{R}^{n_i}$は，
$$P_i^{tr} \triangleq [\theta_{r_i}, e^1, \cdots, e^{n_i}, \theta_{q_i}]$$
ここに，$\theta_{r_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i}$，$r_i \triangleq n_1 + \cdots + n_{i-1}$，$\theta_{q_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$，$q_i = n_{i+1} + \cdots + n_N$は零行列を示し，$e^i \in \mathbb{R}^{n_i}$は座標ベクトルを示す。

以上のことから次の結果を得る。

［定理5・3］　方程式(5.22)に対して，次の条件：

i)　任意の$x \in \mathbb{R}^d$に対して，$F'(x)$は対称；

ii)　$\exists m > 0, \ -\mu_2[-F'(x)] \geq m > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^d$ (5.32)

が満足されるとする。このとき，各ステップにおいて$\omega_{k,i}$を区間$(0, \delta_{k,i})$内にえらぶならば，非線形SOR法は，(5.22)の唯一解x^*へ大域収束する。ここに$\delta_{k,i}$は，
$$\delta_{k,i} \triangleq 1 + \sqrt{m_{k,i}/M_{k,i}} \tag{5.37}$$
$$M_{k,i} \triangleq \sup_{t \in [0,2]} \| \partial_i f_i(y^{Nk+i-1} - tP_i \xi_{k,i}) \|_2 \tag{5.38}$$
$$m_{k,i} \triangleq \inf_{t \in [0,1]} -\mu_2[-\partial_i f_i(y^{Nk+i-1} - tP_i \xi_{k,i})] \tag{5.39}$$

で与えられる。

（証明）　(5.22)が唯一解x^*を有することは，(5.32)と系3・3から明らかである。$g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$を(5.33)で定める。(5.35)，(5.36)から，
$$\begin{aligned} & g(y^{Nk+i}) - g(y^{Nk+i-1}) \\ &= \left[\int_0^1 g'(\tau y^{Nk+i} + (1-\tau) y^{Nk+i-1}) d\tau\right][y^{Nk+i} - y^{Nk+i-1}] & {}^{*} \\ &= \left\langle \int_0^1 F(y^{Nk+i-1} - \tau\omega_{k,i} P_i \xi_{k,i}) d\tau, -\omega_{k,i} P_i \xi_{k,i} \right\rangle & {}^{**} \\ &= -\omega_{k,i} \left\langle \int_0^1 f_i(y^{Nk+i-1} - \tau\omega_{k,i} P_i \xi_{k,i}) d\tau, \xi_{k,i} \right\rangle \end{aligned} \tag{5.40}$$

を得る。一方，補題2・1から

* 補題5・3から，$g \in C^1 \subset \mathcal{P}_{C^1}$となり補題2・1を用いる。

** 補題5・3から，$[g'(x)]^{tr} \equiv F(x)$.

$$
\begin{aligned}
&f_i(y^{NR+i-1}-\tau\omega_{R,i}P_i\xi_{R,i})\\
&= f_i(y^{NR+i-1}-\tau\omega_{R,i}P_i\xi_{R,i})-f_i(y^{NR+i-1}-P_i\xi_{R,i})\\
&= \left[\int_0^1 \partial_i f_i(y^{NR+i-1}-(1-s+s\tau\omega_{R,i})P_i\xi_{R,i})ds\right](1-\tau\omega_{R,i})\xi_{R,i}
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

となる。又，(5.32)から，

$$
-\mu_2[-\partial_i f_i(x)] \geqq m > 0, \quad {}^{\forall}x \in R^d, \; {}^{\forall}i \in \overline{N} \tag{5.42}
$$

が成り立つ。従って，$\omega_{R,i} \in (0,1]$ のとき，(5.40)〜(5.42)から

$$
\begin{aligned}
&g(y^{NR+i})-g(y^{NR+i-1})\\
&\leqq -\omega_{R,i}\cdot m\int_0^1\int_0^1(1-\tau\omega_{R,i})ds\,d\tau\,|\xi_{R,i}|_2^2\\
&= -(m/2)\,\omega_{R,i}(2-\omega_{R,i})|\xi_{R,i}|_2^2\\
&\leqq -(m/2)\,|y^{NR+i}-y^{NR+i-1}|_2^2
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

を得る。一方，$\omega_{R,i} \in (1,\delta_{R,i})$ のとき，$M_{R,i}$, $m_{R,i}$ を(5.38)，(5.39)で定め，

$$
\begin{aligned}
&\beta_{R,i} \triangleq \delta_{R,i}-1=\sqrt{m_{R,i}/M_{R,i}} > 0\\
&\gamma_{R,i} \triangleq \omega_{R,i}-1 > 0\\
&\varepsilon_{R,i} \triangleq \beta_{R,i}-\gamma_{R,i}=\delta_{R,i}-\omega_{R,i} > 0
\end{aligned}
$$

とすると，(5.40)〜(5.42)から

$$
\begin{aligned}
&g(y^{NR+i})-g(y^{NR+i-1})\\
&\leqq -\omega_{R,i}\cdot m_{R,i}\int_0^1\int_0^{1/\omega_{R,i}}(1-\tau\omega_{R,i})d\tau\,ds\,|\xi_{R,i}|_2^2\\
&\quad + \omega_{R,i}M_{R,i}\int_0^1\int_{1/\omega_{R,i}}^1(1-\tau\omega_{R,i})d\tau\,ds\,|\xi_{R,i}|_2^2\\
&= -(1/2)\{m_{R,i}-M_{R,i}(\omega_{R,i}-1)^2\}|\xi_{R,i}|_2^2\\
&= -(m_{R,i}/2)\{1-(\gamma_{R,i}/\beta_{R,i})^2\}|\xi_{R,i}|_2^2\\
&= -(m_{R,i}/2)\{(\beta_{R,i}+\gamma_{R,i})(\beta_{R,i}-\gamma_{R,i})/\beta_{R,i}^2\}|\xi_{R,i}|_2^2\\
&= -(m_{R,i}/2)(\varepsilon_{R,i}/\beta_{R,i})\{2-(\varepsilon_{R,i}/\beta_{R,i})\}|\xi_{R,i}|_2^2\\
&\leqq -(m/2)\,\eta_{R,i}\,|y^{NR+i}-y^{NR+i-1}|_2^2 \quad *
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

を得る。但し，

---

* $\omega_{R,i} \in (1,\delta_{R,i}) \subset (1,2)$ より $\omega_{R,i}^2 < 4$, $m \leqq m_{R,i}$.

$$\eta_{k,i} \triangleq (\varepsilon_{k,i}/\beta_{k,i})\{2-(\varepsilon_{k,i}/\beta_{k,i})\}/4 \qquad (5.45)$$

一方，レベルセット $L(x^0)$ を，

$$L(x^0) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) \leqq g(x^0)\}$$

で定めると，g は一様凸関数であるから，$L(x^0)$ はコンパクトである[12]．従って，

$$\beta \triangleq \min_{x \in L(x^0)} \min_{i \in \overline{N}} \left[\frac{m}{\|\partial_i f_i(x)\|_2}\right]^{1/2} > 0$$

であるから，

$$\beta_{k,i} \geqq \beta, \quad \forall i \in \overline{N},\ k \in \mathbb{N}$$

$$\delta_{k,i} \geqq 1+\beta > 0, \quad \forall i \in \overline{N},\ k \in \mathbb{N}$$

となり，$\varepsilon_{k,i}$ は，常にある $\varepsilon > 0$ より大きくとることができる。このとき，

$$\eta_{k,i} \geqq \varepsilon(2-\varepsilon)/4 \quad ^{*} \qquad (5.46)$$

となる。従って，$\omega_{k,i} = \delta_{k,i} - \varepsilon \in (0, \delta_{k,i})$ にとるならば，(5.43)～(5.46) から，ある $\hat{m} > 0$ が存在して，

$$g(y^{Nk+i}) - g(y^{Nk+i-1}) \leqq -\hat{m}\,|y^{Nk+i} - y^{Nk+i-1}|_2^2,$$

$$\forall i \in \overline{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad (5.47)$$

が成り立つ。一方，(5.34) から，

$$x^k = y^{Nk}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

となり，このとき，$\{x^k\}$ は，加速パラメータ $\omega_{k,i}$ を $(0, \delta_{k,i})$ の範囲内で選んだ場合に非線形SOR法によって生成される数列であり，(5.47) から，

$$0 = g(x^*) \leqq g(x^k) \leqq -\hat{m} \sum_{i=0}^{k-1} |x^{i+1} - x^i|_2^2 + g(x^0)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (5.48)$$

を満足する**。従って，$\{x^i\}$ はコーシー列となり，ある $\tilde{x}^*$ に収束する。そして，$\tilde{x}^* = x^*$ であることは，(5.22) の解が一意であることから明らかである。

(証明終)

---

* $\varepsilon \leqq [\varepsilon_{k,i}/\beta_{k,i}] < 1$．

** l_2 ノルムであるから，$|x^{i+1} - x^i|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} |y^{Nk+i} - y^{Nk+i-1}|_2^2$．

（注5・5）　$F(x)=Ax+b$ の場合は，（5.40），（5.41）から

$$g(y^{NR+i})-g(y^{NR+i-1})$$
$$=-\omega_{R,i}\int_0^1\int_0^1(1-\tau\omega_{R,i})\,d\tau ds<\xi_{R,i},A_{ii}\xi_{R,i}>$$

となり，$\omega_{R,i}\in(0,2)$ ならば，

$$g(y^{NR+i})-g(y^{NR+i-1})$$
$$\leqq-(m/2)\,\omega_{R,i}(2-\omega_{R,i})|\xi_{R,i}|_2^2$$
$$\leqq-(m/2)\,|y^{NR+i}-y^{NR+i-1}|_2^2$$

が得られる。但し，

$$m=\min\{-\mu_2(-A_{ii})>0,\ i\in\bar{N}\}.$$

従って，（5.48）が得られ，オストロフスキー・ライクの定理の十分性が示される。

（注5・6）　加速パラメータ ω を $(0,\delta_{R,i})$ の範囲にとれるということは，（5.26）が完全に解かれなくても，各ステップにおいて（5.26）の真の解との誤差が十分小さければ，収束性には影響がないことを意味している。

5・3　Sandbergの反復法

前節では，非線形方程式（5.22）の1つの解法として非線形ヤコビ法と非線形SOR法を取り上げその収束性を検討したが，この節ではSandbergの反復法を取り上げ，それについて考察する。さて対象とする方程式は，

$$F(x)=\theta \qquad (5.49)$$

で与えられる。ここで $F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ は準リプシッツ連続（方程式（5.22）の場合と異なり F は区分的に連続微分可能でなくともよい）とする。

Sandbergの反復法は次式で与えられる。

$$x^{i+1}=Gx^i\ ,\ i\in\mathbb{Z}_+\ ;\ Gx=x+\alpha_0(u-Fx) \qquad (5.50)$$

もし，$F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ が $\mathbb{R}^d$ 上でリプシッツ連続でかつ，

$$-\mu[-F;\theta,r]\geqq m>0\ ,\ \forall r>0$$

なる条件が満足されるならば，（2.12）で定められる $\alpha\mapsto\tilde{\pi}(\alpha;-F,\theta,r)$

の連続性から，

$$\exists \alpha_0,\ m_0>0,\ -\kappa(\alpha_0;-F,\theta,r)\geqq m_0>0,\ \forall r>0 \qquad (5.51)$$

が成り立つ。そして上式は，

$$|(I-\alpha_0F)x-(I-\alpha_0F)y|\leqq(1-\alpha_0m_0)|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^d$$

と等価である。従って，(5.49)で与えられる $G:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ は $\mathbb{R}^d$ 上で縮小写像となる。これがSandbergの反復法の本質であり，Sandberg(43)は，l_2 ノルムの場合には，$\alpha_0=m/l_0$，$m_0=m/(1+\sqrt{1-(m/l_0)^2})$ となることを示した。但し，l_0 はFのリプシッツ定数である。

ところで，一般のノルムに対しては，(5.51)を満足するような を見い出すことは容易でない。そこでこの節では，Sandbergの反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を考える。

さて，補題3・4の証明に示したように，もし，

$$\exists m>0,\ \lambda(F;x,y)\geqq m,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^d,\ x\neq y \qquad (5.52)$$

が満足されるならば，任意の $k>0$ に対し，写像 $H:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ を

$$Hx\triangleq(kI+F)^{-1}(u+kx) \qquad (5.53)$$

で定めると，Hは $\mathbb{R}^d$ 上で縮小写像となり，唯一の不動点 x^* を有する。そして，この x^* は，(5.49)の唯一解であることも容易にわかる。一方，方程式：$(kI+F)y=v$ は，$k=l_0+\beta$，$\beta>0$ とすると，$\alpha_0=1/k$，$m_0=\beta$ にとるとき，(5.51)を満足することになり，Sandbergの反復法によって解くことができる。以上がこの節で考える反復法の概要であるが，以下においては，これをもう少し詳しく検討する。

上述したことから，次の反復法を考える。

$$x^{i+1}=Hx^i,\ i\in\mathbb{Z}_+;\ x^0=z^0 \qquad (5.54)$$

$$y_i^{j+1}=G_iy_i^j,\ j\in\mathbb{Z}_+;\ y_i^0=x^i,\ i\in\mathbb{Z}_+ \qquad (5.55)$$

但し，Hおよび G_i，$i\in\mathbb{Z}_+$ は次式で与えられる。

$$Hx\triangleq T^{-1}(u+kx),\ Tx\triangleq(kI+F)x, \qquad (5.56)$$

$$G_iy\triangleq y+(1/k)(u+kx^i-Ty)$$
$$=(1/k)(u+kx^i-Fy) \qquad (5.57)$$

以下の議論においては，次の仮定Aが満足されるものとする。

A：　$F\in\mathcal{F}_{gL}$ かつ，(5.52)が満足される。

まず反復法(5.54)について考える。

［補題5・4］　仮定Aが満足されるとする。このとき，任意の$k>0$に対して，(5.56)で定義される$T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$は同相写像となる。そして，任意の$x^0\in\mathbb{R}^d$に対して，(5.54)によって生成される数列$\{x^i\}$は，方程式(5.49)の唯一解$x^*$に収束する。

（証明）　定理2・2，(d)と(5.52)から，

$$\lambda(T;x,y)=k+\lambda(F;x,y)\geqq k+m>0,$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}^d,\ x\neq y \qquad (5.58)$$

が成り立つ。従って，定理3・3から，$T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$は同相写像となる。又(5.58)と定理2・2，(h)から

$$\begin{aligned}|Hx-Hy|&=|T^{-1}(u+kx)-T^{-1}(u+ky)|\\&\leqq[1/(k+m)]\,|kx-ky|\\&\leqq[k/(k+m)]\,|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^d\end{aligned} \qquad (5.59)$$

が成り立つ。従って，縮小写像原理（補題2・13）からHは唯一の不動点x^*を有し，$\{x^i\}$はx^*へ収束する。又，

$$Hx^*=x^* \iff F(x^*)=u$$

であるから結論を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

次に反復法(5.55)について考える。

［補題5・5］　仮定Aが満足されるとする。

$$r^*\triangleq|u-F(x^0)|/m \qquad (5.60)$$
$$l_0\triangleq\|F;x^0,2r^*\|, \qquad (5.61)$$
$$k\triangleq l_0+\beta,\ \beta>0 \qquad (5.62)$$

とし，$\{x^i\}$を(5.54)によって生成される数列とする。このとき，各$i\in\mathbb{Z}_+$に対し，(5.55)によって生成される数列を$\{y_i^j\}$とすると，$\{y_i^j\}$は，G_iの唯一の不動点x^{i+1}に収束する。さらに，

$$\{y_i^j,\ j\in\mathbb{Z}_+\}\subset\overline{B}_i\triangleq\overline{B}[x^{i+1};\alpha\delta^i r^*]\subset\overline{B}^*\triangleq\overline{B}[x^0;2r^*]$$

となる。但し，

$$\alpha \triangleq m/(k+m) \tag{5.63}$$

$$\delta \triangleq k/(k+m) \tag{5.64}$$

（証明） 補題5・4に示したように，$T:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$は同相写像となるから，各$i \in \mathbb{Z}_+$に対し，$x^{i+1}$は$G_i$の唯一の不動点となる。（5.59）から，

$$\begin{aligned}|x^{i+1} - x^i| &\leqq \delta\, |x^i - x^{i-1}| \\ &\leqq \delta^i\, |x^1 - x^0|\,, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+\end{aligned} \tag{5.65}$$

を得る。一方（5.54），（5.56）から

$$\begin{aligned}T x^1 - T x^0 &= T\, T^{-1}(u + k z^0) - (kI + F)(z^0) \\ &= u - F z^0\end{aligned} \tag{5.66}$$

となる。定理2・2，(9)，（5.58），（5.66），（5.60），（5.63）から

$$(k+m)\,|x^1 - x^0| \leqq |\, u - F z^0 \,|$$

$$\therefore \quad |x^1 - x^0| \leqq \alpha\, r^* \tag{5.67}$$

を得る。従って（5.65）と（5.67）から

$$|x^{i+1} - x^i| \leqq \alpha\, \delta^i\, r^*\,, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.68}$$

および，

$$\begin{aligned}|x^{i+1} - z^0| &\leqq |x^{i+1} - x^i| + |x^i - x^{i-1}| + \cdots + |x^1 - x^0| \\ &\leqq \alpha\,(\delta^i + \delta^{i-1} + \cdots + 1)\, r^* \\ &\leqq r^*\,, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+\end{aligned} \tag{5.69}$$

を得る。（5.69）から，各$i \in \mathbb{Z}_+$に対し，$\overline{B_i} \subset \overline{B}^*$となることがわかるから

$$\begin{aligned}|G_i y - x^{i+1}| &= |G_i y - G_i x^{i+1}| \\ &= (1/k)\,|F y - F x^{i+1}| \\ &\leqq (l_0/k)\,|y - x^{i+1}| \\ &= [\,l_0/(l_0+\beta)\,]\,|y - x^{i+1}|\,, \\ &\qquad \forall y \in \overline{B_i} \subset \overline{B}^*\end{aligned} \tag{5.70}$$

となる。従って，（5.55），（5.68），（5.70）から結論を得る。（証明終）

上に示した補題5・4，5・5によって，仮定Aが満足されるとき，反復法（5.54），（5.55）は，（5.49）の唯一解x^*へ収束することがわかった

が，実際には，ステップにおいて反復法(5.55)は有限回で打ち切る必要がある。今，i ステップを $N(i)$ 回で打ち切ることにすると，

$$\tilde{x}^{i+1}=\tilde{y}_i^{N(i)}\ ;\ \tilde{y}_i^{j+1}=\tilde{G}_i\tilde{y}_i^j,\ j=0,1,\cdots,N(i)\ ;\ \tilde{y}_i^0=\tilde{x}^i,$$
$$i=0,1,\cdots\ ;\ \tilde{x}^0=z^0 \qquad (5.71)$$

$$\tilde{G}_i y \triangleq y+(1/k)(u+k\tilde{x}^i-Ty)$$
$$=(1/k)(u+k\tilde{x}^i-\bar{T}y) \qquad (5.72)$$

なる反復法が得られる。これについて考えよう。

［定理5・4］　仮定Aが満足されるとする。r^*，l_0，k，α および δ を(5.60)～(5.64)で定める。$\varepsilon>0$ を

$$\varepsilon \leqq mr^*/(3k+m) \qquad (5.73)$$

をみたすようにえらぶ。各 $i\in\mathbb{Z}_+$ に対し，$N(i)$ を，

$$\gamma^{N(i)}(|u-\bar{T}\tilde{x}^i|/m)\leqq\varepsilon \qquad (5.74)$$

となるように十分大きく選ぶ。ここで $\gamma\in(0,1)$ は，

$$\gamma\triangleq l_0/k=l_0/(l_0+\beta)\quad ,\ \beta>0 \qquad (5.75)$$

で与えられる。このとき，$\{\tilde{x}^i\}$ を(5.71)によって生成される数列とすると，

$$|\tilde{x}^i-x^*|\leqq(\varepsilon/\alpha)+\gamma^i\cdot r^*,\quad \forall i\in\mathbb{N} \qquad (5.76)$$

が成り立つ。ここで x^* は，(5.49)の唯一解を示す。

（証明）　補題5・4に示したように，$T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ は同相写像となるから方程式

$$Ty=u+k\tilde{x}^i\quad ,\ i\in\mathbb{Z}_+ \qquad (5.77)$$

は唯一解 $\tilde{y}_i^*$ を有する。従って，(5.72)で定められる $\tilde{G}_i$ は唯一の不動点 $\tilde{y}_i^*$ を有する。$\{x^i\}$，$\{\tilde{x}^i\}$，および $\{\tilde{y}_i^*\}$ を，それぞれ，(5.54)，(5.71)および(5.77)によって生成される数列とする。(5.58)と定理2・2，(g)から，次式を得る。

$$|x^{i+1}-\tilde{y}_i^*|=|T^{-1}(u+kx^i)-T^{-1}(u+k\tilde{x}^i)|$$
$$\leqq[k/(k+m)]\,|x^i-\tilde{x}^i|$$
$$=\delta\,|x^i-\tilde{x}^i|,\quad\forall i\in\mathbb{Z}_+ \qquad (5.78)$$

さて次に，数学的帰納法によって，

$$\bar{B}[\tilde{y}^*_i; r_i] \subset \bar{B}^* \triangleq \bar{B}[\tilde{x}^0; 2r^*] \quad , r_i \triangleq |\tilde{y}^*_i - \tilde{x}^i| \ , i \in Z_+ \qquad (5.79)$$

が成り立つことを示す。

1) $i = 0$．　$\tilde{x}^0 = x^0 = \bar{x}^0$ から，$\tilde{y}^*_0 = x^1$ となることに注意すると，補題5・5から，$\bar{B}[\tilde{y}^*_0; r_0] = \bar{B}[x^1; |x^1 - x^0|] \subset \bar{B}[x^1; \alpha r^*] \subset \bar{B}^*$ となる*．

2) $i \leqq n$ に対して，$\bar{B}[\tilde{y}^*_i; r_i] \subset \bar{B}^*$ となるとする。

$i = n+1$，任意に $l \leqq n$ を与えると，仮定から，$\tilde{x}^l \in \bar{B}^*$ であるから，

$$\begin{aligned} |\tilde{y}^1_l - \tilde{y}^*_l| &= |\tilde{G}_l \tilde{x}^l - \tilde{G}_l \tilde{y}^*_l| \\ &\leqq (1/k)\ |F\tilde{x}^l - F\tilde{y}^*_l| \\ &\leqq \gamma\ |\tilde{x}^l - \tilde{y}^*_l| \end{aligned}$$

となり，$\tilde{y}^1_l \in \bar{B}[\tilde{y}^*_l; r_l] \subset \bar{B}^*$ であるから，

$$\begin{aligned} |\tilde{y}^2_l - \tilde{y}^*_l| &\leqq \gamma\ |\tilde{y}^1_l - \tilde{y}^*_l| \\ &\leqq \gamma^2\ |\tilde{x}^l - \tilde{y}^*_l| \end{aligned}$$

を得る。以下これをくり返して，(5.71)，(5.73) から次式を得る。

$$\begin{aligned} |\tilde{x}^{l+1} - \tilde{y}^*_l| &= |\tilde{y}^{N(l)}_l - \tilde{y}^*_l| \\ &\leqq \gamma^{N(l)}\ |\tilde{x}^l - \tilde{y}^*_l| \\ &\leqq \gamma^{N(l)}\ |u - F\tilde{x}^l|/m \qquad *** \\ &\leqq \varepsilon \quad , \forall l \leqq n \end{aligned} \qquad (5.80)$$

(5.78) と (5.80) から，

$$\begin{aligned} |x^{l+1} - \tilde{x}^{l+1}| &\leqq |x^{l+1} - \tilde{y}^*_l| + |\tilde{y}^*_l - \tilde{x}^{l+1}| \\ &\leqq \delta\ |x^l - \tilde{y}^*_l| + \varepsilon, \quad \forall l \leqq n \end{aligned} \qquad (5.81)$$

となり，(5.81)，(5.80)，(5.63) と (5.64) から

$$\begin{aligned} |x^{l+1} - \tilde{x}^{l+1}| &\leqq (1 + \delta + \cdots + \delta^{l-1}) \cdot \varepsilon + \delta^l |x^1 - \tilde{x}^1| \\ &= (1 + \delta + \cdots + \delta^{l-1}) \varepsilon + \delta^l \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

---

*　(5.67) から　$|x^1 - x^0| \leqq \alpha r^*$

**　(5.72)，(5.77) から，$\tilde{y}^*_i = \tilde{G}_i \tilde{y}^*_i$，$i \in Z_+$ 　(5.82)

***　(5.58) と定理 2・2 (ﾛ) から，

$|\tilde{x}^l - \tilde{y}^*_l| = |T^{-1} \cdot T\tilde{x}^l - T^{-1}(u + k\tilde{x}^l)| \leqq |k\tilde{x}^l + F\tilde{x}^l - u - k\tilde{x}^l| / (k+m)$

$$\leqq \varepsilon/(1-\delta)$$
$$= \varepsilon/\alpha, \quad {}^\forall l \leqq n \tag{5.82}$$

を得る。(5.78), (5.68), (5.82)から,

$$r_{n+1} = |\tilde{y}^*_{n+1} - \tilde{x}^{n+1}|$$
$$\leqq |\tilde{y}^*_{n+1} - x^{n+2}| + |x^{n+2} - x^{n+1}| + |x^{n+1} - \tilde{x}^{n+1}|$$
$$\leqq \delta |x^{n+1} - \tilde{x}^{n+1}| + \alpha \delta^{n+1} r^* + |x^{n+1} - \tilde{x}^{n+1}|$$
$$\leqq (1+\delta)(\varepsilon/\alpha) + \alpha\delta^{n+1} r^* \tag{5.83}$$

および,

$$|\tilde{y}^*_{n+1} - z^0| \leqq |\tilde{y}^*_{n+1} - x^{n+2}| + |x^{n+2} - x^{n+1}| + \cdots + |x^1 - x^0|$$
$$\leqq \delta |x^{n+1} - \tilde{x}^{n+1}| + \alpha r^* (\delta^{n+1} + \delta^n + \cdots + 1)$$
$$\leqq \delta(\varepsilon/\alpha) + \alpha r^* (1-\delta^{n+2})/(1-\delta) \tag{5.84}$$

を得る。従って, (5.83), (5.84), (5.63), (5.64), (5.73)から

$$|\tilde{y}^*_{n+1} - z^0| + r_{n+1} \leqq (1+2\delta)(\varepsilon/\alpha) + [\alpha r^*/(1-\delta)](1-\delta^{n+2})$$
$$+ \alpha\delta^{n+1} r^*$$
$$\leqq (1+2\delta)(\varepsilon/\alpha) + r^* [1-(k-m)\delta^{n+1}/(k+m)]$$
$$\leqq r^* + (1+2\delta)\varepsilon/\alpha$$
$$\leqq 2r^* \tag{5.85}$$

が成り立つことがわかる。(5.85) から $\bar{B}[\tilde{y}^*_{n+1}; r_{n+1}] \subset \bar{B}^*$ となることがわかる。従って, 帰納法によって, (5.79) が示された。このとき, (5.82) と同様にして,

$$|x^i - \tilde{x}^i| \leqq \varepsilon/\alpha, \quad {}^\forall i \in N \tag{5.86}$$

を得る。一方, (5.54), (5.59) と (5.75) から

$$|x^i - x^*| \leqq \gamma^i |x^0 - x^*|, \quad {}^\forall i \in N \tag{5.87}$$

が成り立つ。ところで, x^*は, Hの不動点であり, 従って, (5.49)の唯一解であるから,

$$F x^* - F z^0 = u - F z^0$$

となり, 定理2.2.(9), と (5.52)から,

$$|x^0 - x^*| \leqq |u - F z^0| / m = r^* \tag{5.88}$$

が成り立つ。従って，(5.86)～(5.88)から，

$$|\tilde{x}^i - x^*| \leqq |\tilde{x}^i - x^i| + |x^i - x^*|$$
$$\leqq (\varepsilon/\alpha) + \gamma^i \rho^*$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

(注5・7)　この定理5・4は，そのまま一般のバナッハ空間においても成り立つ[70][71]

5・4 応用例

5・4・1 直流解析への応用

ここでは，非線形抵抗回路の直流解析においてあらわれる典型的な2つのタイプの方程式に対して上の結果を応用する。

［例1］　直流方程式：$f(x) + \hat{A}x = \tilde{u}$

3・4・2，例2において，非線形トランジスタ・ダイオード，線形時間不変抵抗，および独立電圧源，電流源からなる電気回路の直流方程式として，

$$Af(x) + Bx = u \tag{5.89}$$

が得られた*。但し，$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，$f \in C$；$A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$；$u \in \mathbb{R}^d$．

今，Aが正則とすると，

$$f(x) + A^{-1}Bx = A^{-1}u$$

なる方程式が得られる．

$$\hat{A} \triangleq A^{-1}B \quad , \tilde{u} \triangleq A^{-1}u \tag{5.90}$$

とすると

$$f(x) + \hat{A}x = \tilde{u} \tag{5.91}$$

が得られる。(5.91)に対し，定理5・2を適用すると次の結果を得る。

［系5・1］　方程式(5.91)において，$f \in \mathcal{P}_{C^1}$が

$$f(x) = [f_1(x_1), \cdots, f_d(x_d)]^{tr}$$

で与えられ，

---

*　(3.67)参照。

$$^{\forall} i \in \overline{d},\ ^{\exists}\varepsilon_i > 0,\ f_i'(\alpha) \geqq \varepsilon_i > 0,\ ^{\forall}\alpha \in \mathbb{R} \tag{5.92}$$

なる条件が満足されるとする。このとき，

$$D = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$$

として，$D + \widetilde{A}$が次の諸条件のうちのいずれか1つを満足するならば，非線形ヤコビ法および非線形SOR法（$0 < \omega \leqq 1$）は，（5.92）の唯一解に大域収束する。

i）　$(D + A) \in SRSD$；

ii）　$(D + A) \in SCSD$；

iii）　$(D + A) \in M$；

iv）　$(D + A) \in \mathcal{D}$．

（証明）　定理2・4から，i）$\Rightarrow$ iii），ii）$\Rightarrow$ iii），iii）$\Rightarrow$ iv）が成り立つから，iv）が満足されるとする。このとき，定理2・4から，

$$^{\exists}\hat{D} \in \mathcal{D}_+,\ \hat{D}^{-1}(D + A)\hat{D} \in SRSD$$

が成り立つ。従って，

$$\left.\begin{aligned} T(x) &\triangleq \hat{D}x \\ F(x) &\triangleq f(x) + \widetilde{A}x - \widetilde{u} \\ \hat{F}(x) &\triangleq (T^{-1} \circ F \circ T)(x) \end{aligned}\right\} \tag{5.93}$$

とすると，

$$^{\exists}m > 0,\ -\mu_\infty[-\hat{F}'(x)] \geqq m > 0,\ ^{\forall}x \in \mathbb{R}^d \tag{5.94}$$

が成り立つ。一方，方程式：$F(x) = \theta$を非線形ヤコビ（SOR）法で解くことによって得られる数列$\{x^k\}$が，

$$x^{k+1} = Gx^k,\ k \in \mathbb{Z}_+;\ x^0：既知$$

によって生成されるとし，方程式：$\hat{F}(x) = \theta$を非線形ヤコビ（SOR）法で解くことによって生成される数列$\{\hat{x}^k\}$が，

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{G}\hat{x}^k,\ k \in \mathbb{Z}_+;\ \hat{x}^0 = T^{-1}(x^0) = \hat{D}^{-1}x^0$$

によって生成されるとすると，$\hat{x}^k = T^{-1}x^k,\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \hat{G} = T^{-1}GT$となることに注意すると，定理5・2補題2・14から結論が得られる。（証明終）。

(注5・8)　Sandberg と Willson. Jr[31] は，$\omega=1$ に限る場合について条件 i) が成り立てば，非線形ヤコビ法が x^* へ大域収束することを示している。又，Ortega と Reinhold[12] は，P-contraction という概念を用いて条件 iii) の下に同じ結果を得ている。

(注5・7)　ここでは，定理5・2を適用するために，$f \in \mathcal{P}_{C^1}$ ということを仮定したが，(5.91)に限っていえば，この条件は本質でなく，条件(5.92)を次の条件：

$$\forall i \in \bar{d},\ \exists \varepsilon_i > 0,\ \lambda(f_i;\alpha,\beta) \geq \varepsilon_i,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \beta$$

に置き換えても系5・1の結果はそのまま成り立つ。

[例2]　方程式：$f(x)+Ag(A^{tr}x+y)+Sx=u$

3・4・2，例1において，電圧制御形非線形抵抗，電流制御形非線形抵抗，線形抵抗および直流電圧源，電流源からなる電気回路において抵抗の特性に結合がない場合には，その直流方程式として，

$$f(x)+Ag(A^{tr}x+y)+Sx=u \tag{5.95}$$

が得られた*．但し，$f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$；$A \in \mathbb{R}^{d\times n}$，$S \in \mathbb{R}^{d\times d}$，$y \in \mathbb{R}^n$，$u \in \mathbb{R}^d$．

さて今，(5.95)を次のようなアルゴリズムで解くことを考える。

第1段階：ピースマン・ラッチフォード法（以下P－R法と略す）

$$\begin{cases} x^{k+\frac{1}{2}} = [\lambda I+F_H]^{-1}[\lambda I-F_V]x^k \\ x^{k+1} = [\lambda I+F_V]^{-1}[\lambda I-F_H]x^{k+\frac{1}{2}} \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.96}$$

但し，λ は正の定数で，

$$\begin{cases} F_H(x) \triangleq f(x)+Ag(A^{tr}x+y), \\ F_V(x) \triangleq Sx-u \end{cases} \tag{5.97}$$

第2段階．　非線形方程式：

$$[\lambda I+F_H]x^{k+\frac{1}{2}} = [\lambda I-F_V]x^k \tag{5.98}$$

は，非線形SOR法を用いて解く。又，線形方程式：

---

*　(3.65)参照

$$[\lambda I + F_V]x^{k+1} = [\lambda I - F_H]x^{k+\frac{1}{2}}$$

は，直接計算して

$$x^{k+1} = [\lambda I + S]^{-1}\{u + [\lambda I - F_H]x^{k+\frac{1}{2}}\} \qquad (5.99)$$

で与える。

以下においては，(5.96)～(5.99) によって定められる反復法を，P－R－SOR法と呼ぶことにする。

［補題5.6］ (Kellog [12])．写像 $F_H, F_V \in \mathcal{F}_{qL}$ に対し，

$$\exists m > 0,\ \lambda_2(F_H; x, \tilde{x}) \geq m > 0,\quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d,\ x \neq \tilde{x};$$

$$\lambda_2(F_V; x, \tilde{x}) \geq 0,\quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d,\ x \neq \tilde{x}$$

が満足されるならば，P－R 法 (5.96) は，$(F_H + F_V)(x) = \theta$ の唯一解へ大域収束する。

この補題5・6と定理5・3から次の結果が得られる。

［系5・2］ 方程式 (5.95) において，$f, g \in P_{C^1}$ が

$$f(x) = [f_1(x_1), \cdots, f_d(x_d)]^{tr}$$

$$g(\xi) = [g_1(\xi_1), \cdots, g_n(\xi_n)]^{tr}$$

で与えられるとする。もし

$$\exists m > 0,\ -\mu_2(-[f'(x) + Ag'(A^{tr}x + y)A^{tr}]) \geq m > 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$-\mu_2(-S) \geq 0$$

が満足されるとする。このとき，任意に $\lambda > 0$ を与え，加速パラメータ ω を定理5・3のようにとるならば，R－R－SOR法は，(5.95) の唯一解 x^* へ大域収束する。

(証明) 仮定から，$F_V, F_H \in P_{C^1} \subset \mathcal{F}_{qL}$ となり，又

$$-\mu_2[-F_V'(x)] \geq m > 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

$$-\mu_2[-F_H'(x)] \geq 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つ。従って，補題2・8と，$F_V'(\cdot)$ が対称となることに注意すると定理5・3と補題5・6によって結論を得る。 (証明終)

(注5・9) P－R法 (5.96) によって定まる x^{k+1} と x^k の対応は，写像

$$Gx = [\lambda I + F_V]^{-1}[\lambda I - F_H][\lambda I + F_H]^{-1}[\lambda I - F_V]x$$

によって

$$x^{k+1}=G x^k$$

とかける。一方，$\hat{T}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$を，

$$\hat{T}x \triangleq [\lambda I+F_v]x$$

で定めると補題5・6の条件が満足されるとき$\hat{T}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$は同相写像となる。さらに，$\hat{G}=\hat{T}G\hat{T}^{-1}$とすると，

$$\forall r>0,\ \exists \gamma(r)\in(0,1)$$

$$|\hat{G}\xi-\hat{G}\eta|\leqq\gamma|\xi-\eta|,\ \forall \xi,\eta\in\bar{B}[\hat{T}x^*;r]$$

が成ることが知られている[12]。このことと系2・3から，第2段階において方程式（5.98）を非線形SOR法を用いて解く場合に，真の解$x^{k+\frac{1}{2}}$が求まらなくても，それに十分近い近似値$\tilde{x}^{k+\frac{1}{2}}$（これは有限回の反復によって求まる）を計算しておけば，それによって得られる数列$\{\tilde{x}^k\}$は，（5.95）の真の解x^*に十分近い点へ収束することがわかる。

（注5.10）　直流方程式（5.95）において，行列Sは要素が1，−1，0からなる歪対称行列である*。従って，Sは準正定値となり，系5・2の条件を満足する。

以上ここでは，非線形ヤコビ法，非線形SOR法の応用についてのみ示したが，反復法（5.71）については，系5・1，5・2のような条件が成り立てばその収束性はもちろん保証されている。

5・4・2　周期系への応用

4・4で考えた周期系：

$$\dot{x}=f(x,v,t)+u(t) \tag{5.100}$$

を考える。但し，$f:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d$，$f\in C^1$，$v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^r$，$u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d$，$v,u\in C$。

$f(x,v,\cdot)$，$v(\cdot)$，$u(\cdot)$は同じ周期ωを有するとする。

---

*　（3.63）参照

さらに，

$$^{\exists}m>0\ ,\ \mu[\partial_1 f(x,\xi,t)]\leqq -m<0\ ,$$

$$^{\forall}(x,\xi,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}_+ \qquad (5.101)$$

なる条件が成り立つとすると．補題2・8．定理4・8によって．周期系(5.100)は大域指数安定な周期ωの周期解を有することがわかる。

さて今(5.100)を後退オイラー法：

$$y_n=y_{n-1}+hf(y_n,v_n,t_n)+hu_n\ ,\ n\in\mathbb{N} \qquad (5.102)$$

$$v_n\triangleq v(t_n)\ ,\ u_n\triangleq u(t_n)\ ,\ t_n\triangleq n\cdot h\ ,\ h>0$$

によって数値積分することを考える。適当にNを与えて．$h=\omega/N$とすると．周期解を求めるためには．

$$\begin{cases} y_1=y_N+hf(y_1,v_1,t_1)+hu_1 \\ y_n=y_{n-1}+hf(y_n,v_n,t_n)+hu_n\ ,\ n=2,\cdots,N \end{cases} \qquad (5.103)$$

なる方程式の解$y^*\in\mathbb{R}^{Nd}$を求めればよい。上式は$F:\mathbb{R}^{Nd}\to\mathbb{R}^{Nd}$および$\tilde{u}\in\mathbb{R}^{Nd}$を，

$$F(y)\triangleq\begin{bmatrix} y_1-hg_1(y_1)-y_N \\ y_2-hg_2(y_2)-y_1 \\ \vdots \\ y_N-hg_N(y_N)-y_{N-1} \end{bmatrix}\ ,\ y\triangleq\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N\end{bmatrix}\ ,\ u\triangleq\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_N\end{bmatrix} \qquad (5.104)$$

$$g_n(y_n)\triangleq f(y_n,v_n,t_n)\ ,\ n\in\overline{N}$$

で定めると，

$$F(y)=\tilde{u}$$

かける。今．$\mathbb{R}^{Nd}$におけるノルム$|\cdot|_0$を．

$$|y|_0=\Sigma_{n=1}^{N}|y_n|$$

で定める。但し，$|\cdot|:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$は(5.101)が成り立っている元々指定されているノルムを示す。

このとき．補題2・9と(5.101)と補題2・3．(d)，(c)から．

$$-\mu_0[-F'(y)]\geqq hm>0\ ,\ ^{\forall}y\in\mathbb{R}^{Nd} \qquad (5.106)$$

が成り立つ。従って．補題2・8と定理5・4から次の結果を得る。

[系5・3] 周期系(5.106)において条件(5.101)が成り立つとする。このとき,(5.106)の大域指数安定な周期解の差分近似解 $y^*=(y_1^*, ---, y_N^*)$ すなわち(5.105)の解は,反復法(5.71)によって解くことができる。

(証明) (省略)

5・5 結 言

この章では,平衡点方程式に対する反復法とその収束性について考察した。まず5・2では非線形ヤコビ法,および非線形SOR法を取り挙げ,収束性に関する2つの定理を示した。このうち定理5・3は,線形方程式に対するSOR法に関してよく知られているオストロフスキー・ライクの定理をある程度非線形SOR法に対しても拡張できることを示している。又,5・4・1では,抵抗回路の直流解析においてよくみられる2つのタイプの直流方程式に応用した。そして,例1においては,定理5・2の直接的な応用を示し,従来知られている条件よりも緩い条件の下で非線形ヤコビ法および非線形SOR法が大域収束性を有していることを示した。又例2においては,定理5・3の応用を示し,ピースマン・ラッチフォード法と非線形SOR法とを組み合せた新しい反復法を提案し,それが実用的な条件の下に大域収束性を有することを示した。

又,5・3では,Sandbergの反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を提案し,それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを示した。そして,5・4・1においては,周期系における周期解を求める問題への応用を示した。

これらの反復法は,いずれも比較的緩い条件の下に大域収束性を有するから,ニュートン法のように真の解の近傍では非常に速い収束を示す反復法の初期近似値を与えるのに用いれば,非常に有効である。

第6章　フィードバック系の入出力安定解析(70),(92),(93)

6・1　緒　言

この章では，関数解析的アプローチによってフィードバック系の入出力安定解析を行う。まず6・2においては対象とするフィードバック系を明らかにし，ここでいう入出力安定性，すなわち，有界性と連続性について説明する。これらの安定性については，Sandberg(43),(51),(52)，Zames(50)，Willemes(53)，そしてDesoerとWu(54)らの結果が知られているが，これらは基本的な2つの定理，すなわち，スモールゲイン定理と受動定理とに基づいている。ところで前者は一般のノルム空間において適用できるのに対し後者は内積空間においてのみ適用できるものである。

この章の目的は，第2章において一般のノルム空間にまで拡張した受動性，単調性の概念を用いて，受動定理を一般のバナッハ空間へ拡張することである。これについては，6・3および6・4で詳しく検討する。

そして，6・5では，ここで得られた安定定理を数値積分法の安定解析に応用する。

6・2　システムの記述，有界性，連続性

ここでは，図6－1に示されるフィードバック系Sの入出力安定解析を行う。図6－1からシステム方程式は次のように与えられる。

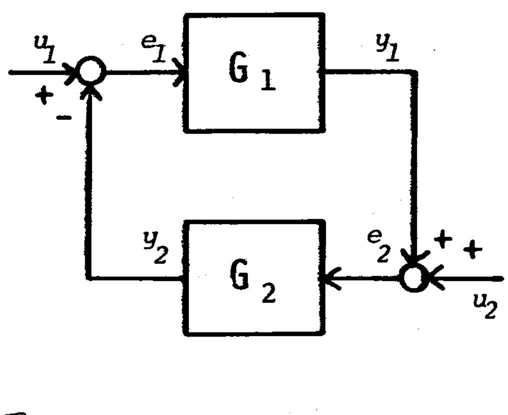


図6－1　フィードバック系S

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = u_1 - y_2,\ y_2 = G_2 e_2 \\ e_2 = u_2 + y_1,\ y_1 = G_1 e_1 \end{array}\right\} \qquad (6.1)$$

今，

$$\left.\begin{array}{l} e \triangleq (e_1, e_2) \\ u \triangleq (u_1, u_2) \\ Ge \triangleq (G_2 e_2, -G_1 e_1) \end{array}\right\} \qquad (6.2)$$

とすると，(6.1)，(6.2)から

$$(I + G)e = u \qquad (6.3)$$

が得られる。

この章を通じて、次の仮定が満足されるものとする。

[仮定6－1]　$\mathscr{X}_{1e}$, $\mathscr{X}_{2e}$ をノルム空間 $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$ の拡張空間とする*。

i) 作用素 $G_1: \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$, $G_2: \mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_1$ は因果的であり**；

ii) $G_1\theta = \theta$, $G_2\theta = \theta$ $(G\theta = \theta)$；

iii) $\forall u \in \mathscr{X}_e = (\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2)_e$, $\exists e \in \mathscr{X}_e$, $(I+G)e = u$；

iv) $(I+G)^{-1}: \mathscr{X}_e \to \mathscr{X}_e$ は因果的である。

但し、積空間 $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ のノルム $|\cdot|$ は、$\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$ のノルム $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ によって

$$|x| = |x_1|_1 + |x_2|_2 \quad , x = (x_1, x_2) \in \mathscr{X} \qquad (6.4)$$

で与えられる。

(注6・1)　ii)の $G\theta = \theta$ という仮定は、$G\theta \neq \theta$ であれば、$\hat{G}e \triangleq Ge - G\theta$, $\hat{u} \triangleq u - G\theta$ とすると、$\hat{G}\theta = \theta$, $\hat{G}e = \hat{u}$ となるから、何ら一般性を失うものではない。

(注6・2)　iii)は、$(I+G)^{-1}: \mathscr{X}_e \to \mathscr{X}_e$ が存在することを示している。

さてここでいう入出力安定性を定義しよう。

[定義6・1]　系 S は有界である***。

$\Longleftrightarrow$ i) $\forall u \in \mathscr{X}$, $\exists e(u) \in \mathscr{X}$, $(I+G)e = u$；

ii) $\exists \gamma \geq 0$, $|e| \leq \gamma |u|$, $\forall u \in \mathscr{X}$

(注6・3)　仮定6－1，定義6・1から、直ちに次の関係：

系 S は有界 $\Longleftrightarrow$ $\exists (I+G)^{-1}: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $(I+G)^{-1}$ は有界かつ因果的

なる関係が成り立つことがわかる。

[定義6・2]　系 S は連続である。

$\Longleftrightarrow$ i) 系 S は有界であり；

---

* 定義2・8参照。

** 作用素と写像は同じ意味で使っている。

*** 文献(70)，(93)では、有界入力有界出力(BIBO)という語を用いている。又、文献(92)では安定という語を用いている。

ii) $\exists \gamma \geqq 0, \ |e - e'| \leqq \gamma |u - u'|, \ \forall u, u' \in \mathscr{X}$.
但し，e，e'はそれぞれu，u'に対する（6.3）の解を示す。
（注6.3）　通常系Sが連続ということは，因果的逆作用素$(I+G)^{-1}$が有界かつ連続であることと定義されるが，ここでは，$(I+G)^{-1}$が有界かつリプシッツ連続であるときに，系Sが連続と定義している

6.3　有界性についての結果

まず次の補題を示す。
[補題6.1][53]　系Sにおいて，$G_1 \in \mathscr{F}_B$，$G_2 \in \mathscr{F}_L$とする*．次の条件：

$$\exists \varepsilon > 0, \ |(I + G_2 G_1) x|_T \geqq \varepsilon |x|_T, \ \forall x \in \mathscr{X}_{le}, \ \forall T \in \mathscr{T} \tag{6.5}$$

が成り立つならば，Sは有界である。但し，$|x|_T \triangleq |P_T x|$とする**．
これから次の定理を得る。
[定理6.1]　系Sにおいて，$G_1 \in \mathscr{F}_B$，$G_2 \in \mathscr{F}_L$とする。次の条件：

$$\exists \varepsilon > 0, \ \lambda(G_2 G_1; x, \theta) \geqq -1 + \varepsilon > -1, \ \forall x \in \mathscr{X}, \ x \neq \theta \tag{6.6}$$

が成り立てば，Sは有界である．
（証明）　定理2.2，(d)，(g)と補助定理2.2から，

$$\begin{aligned} |(I + G_2 G_1) x|_T &\geqq \lambda_T (I + G_2 G_1; x, \theta) |x|_T \\ &= \{1 + \lambda_T (G_2 G_1; x, \theta)\} |x|_T \\ &\geqq \{1 + (\varepsilon - 1)\} |x|_T \\ &= \varepsilon |x|_T, \ \forall x \in \mathscr{X}_{le}, \ x \neq \theta, \ \forall T \in \mathscr{T} \end{aligned}$$

を得る。従って，補題6.1によって結論を得る。　（証明終）
（注6.4），（6.6）は，$[(1-\varepsilon) I + G_2 G_1]$が受動的であることを示している（定義2.16参照）

---

*　G_1：有界，G_2：リプシッツ連続を示す（定義2.4，2.5参照）．
**　定義2.8参照．

［系6・1］（スモールゲイン定理[53]） 系Sにおいて，$\mathcal{G}_1 \in \mathcal{F}_B$，$\mathcal{G}_2 \in \mathcal{F}_L$とする。もし，次の条件：

$$\gamma(\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1) \leqq \delta < 1 \tag{6.7}$$

が成り立てば，Sは有界である。但し，$\gamma(\cdot)$は，次式で与えられる。

$$\gamma(\mathcal{G}) = \inf\{ a \in \mathbb{R}_+ \mid |\mathcal{G}x| \leqq a|x|,\ x \in \mathcal{X} \}. \tag{6.8}$$

（証明） 定理2・2，(b)を用いると，(6.7)から(6.6)が得られる（$\varepsilon = 1 - \delta$）。従って，定理6・1によって結論を得る。（証明終）

［系6・2］（スモールゲイン定理[51]） 系Sにおいて，$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{F}_B$とする。もし，次の条件：

$$\gamma(\mathcal{G}_1) \cdot \gamma(\mathcal{G}_2) \leqq \delta < 1 \tag{6.9}$$

が成り立てば，Sは有界である。

（証明） 系Sに等価な系$\hat{S}$（図6−2）を考える。正の数αを，

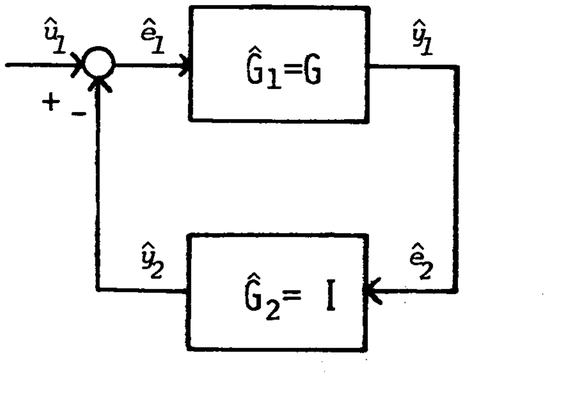
$$\max\{ \alpha^2 \gamma(\mathcal{G}_2),\ \gamma(\mathcal{G}_1)/\alpha^2 \} \leqq \delta < 1$$

をみたすようにとり，ノルム空間$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$のノルム$|\cdot|'$を

$$|x|' \triangleq \alpha |x_1|_1 + (1/\alpha)|x_2|_2,\quad x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \tag{6.10}$$

で定める。このとき

$$\begin{aligned} |\hat{\mathcal{G}}_2 \hat{\mathcal{G}}_1 x|' &= |(\mathcal{G}_2 x_2, -\mathcal{G}_1 x_1)|' \\ &= \alpha |\mathcal{G}_2 x_2|_1 + (1/\alpha)|\mathcal{G}_1 x_1|_2 \\ &\leqq \alpha \gamma(\mathcal{G}_2)|x_2|_2 + [\gamma(\mathcal{G}_1)/\alpha]|x_1|_1 \\ &\leqq \delta\ |x|',\quad \forall x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$



$$\hat{u}_1 = u = (u_1, u_2)$$
$$\hat{e}_1 = e = (e_1, e_2)$$
$$\hat{e}_2 = \hat{y}_1 = \hat{y}_2 = (-y_1, y_2)$$
$$\hat{\mathcal{G}}_1 \hat{e}_1 = \mathcal{G} e = (\mathcal{G}_2 e_2, -\mathcal{G}_1 e_1)$$

図6−2　図6−1の系Sと等価な系$\hat{S}$

を得る。系8によって，$\hat{S}$はノルム$|\cdot|'$の意味で有界となる。一方（6.4）で定めたノルムと（6.10）で定めたノルムは等価であるから，$\hat{S}$，従ってSはノルム$|\cdot|$の意味で有界となる。 (証明終)

上に示したことから分かるように，定理6・1の条件は，系6・1（系6・2）の条件を直接的に（間接的に）含むから，比較的緩い条件といえる。しかし，(G_2G_1)の性質を調べる必要がある。一方，システムによっては，G_1, G_2の性質を別々に調べる方が便利な場合もある。

以下の議論においては，仮定6－1に加えて，次の仮定6－2が満足されるものとする。

［仮定6－2］ $\mathscr{X}_1$と$\mathscr{X}_2$は同じノルム空間である。

［定理6・2］ 系Sにおいて，G_2が因果的かつリプシッツ連続な逆作用素G_2^{-1}を有するとする。このとき，次の条件：

$$^{\exists}m>0,\ \lambda_T(-G_2^{-1}(-I)+G_1;x,\theta)\geq m>0,$$
$$^{\forall}x\in\mathscr{X}_1,\ x\neq\theta,\ T\in\mathcal{T} \qquad (6.11)$$

が成り立つならば，Sは有界である。

（証明） （6.3）と，G_1，G_2^{-1}の因果性から，

$$P_T[G_1-G_2^{-1}(-I)]P_Te_1$$
$$=-P_Tu_2+P_TG_2^{-1}(P_Tu_1-P_Te_1)-P_TG_2^{-1}(-P_Te_1)$$

を得る。（6.11）と定理2・2，(g)から，

$$m|e_1|_T\leq|u_2|_T+\gamma(G_2^{-1})|u_1|_T \quad ,\ ^{\forall}T\in\mathcal{T}\ ^{*}$$
$$\therefore\ |e_1|\leq[\gamma(G_2^{-1})/m]|u_1|+(1/m)|u_2| \qquad (6.12)$$

を得る。（6.1）と（6.12）から，

$$|e_2|\leq[1+\gamma(G_2^{-1})/m]\gamma(G_2^{-1})|u_1|+[\gamma(G_2^{-1})/m]|u_2|$$

となる。従って，Sは有界である。 （証明終）

［系6・3］ $\mathscr{X}_1=\mathscr{X}_2$は内積空間とする。$G_2^{-1}$が存在して，因果的かつリプシッツ連続とする。このとき，次の条件：

---

* $\gamma(G)\triangleq\inf\{a\in\mathbb{R}_+\mid|Gx-Gy|\leq a|x-y|,\ ^{\forall}x,y\in\mathscr{X}_1\}.$

$$\langle G_1 x, x\rangle_T \geqq \varepsilon \langle x, x\rangle_T, \quad {}^\forall x \in \mathscr{X}_1, \ T \in \mathscr{T} \tag{6.13}$$

$$\langle G_2 x, x\rangle_T \geqq \delta \langle G_2 x, G_2 x\rangle_T, \quad {}^\forall x \in \mathscr{X}_1, \ T \in \mathscr{T} \tag{6.14}$$

$$\varepsilon + \delta > 0 \tag{6.15}$$

が成り立つならば，Sは有界である．

（証明）　(6.14) から

$$-\langle G_2^{-1}(-I)y, y\rangle_T \geqq \delta \langle y, y\rangle_T, \quad {}^\forall y \in \mathscr{X}_1, \ T \in \mathscr{T} \tag{6.16}$$

を得る。従って，(6.13)，(6.16)，(6.15) と定理2・2，(f) から，(6.11) を得る。従って，定理6・2によって結論を得る。　（証明終）

（注6・5）　系6・3の条件のうち，「G_2^{-1}が存在して因果的かつリプシッツ連続である」という部分を「G_1が有界」という条件に置き換えても受動定理[54][55]によって，Sは有界となる。この系6・3と受動定理の間には直接的な包含関係はない。ところで，Andersonはスモールゲイン定理と受動定理が，その有界性を判別できるクラスが理論的には同じであるという意味において，等価であることを示した[94]。そして，そのような意味では，定理6・1，6・2，系6・1，6・2は等価となる[92]。従ってその意味では，系6・3と受動定理は等価である。

6・4　連続性についての結果

連続性については，定理6・2によく似た次の結果が成り立つ。

［定理6・3］　系Sにおいて，G_2^{-1}が存在して因果的かつリプシッツ連続とする。もし，次の条件：

$$\lambda_T(G_1; x, y) \geqq \varepsilon, \quad {}^\forall x, y \in \mathscr{X}_1, \ x \neq y, \ T \in \mathscr{T} \tag{6.17}$$

$$\lambda_T(-G_2^{-1}(-I); x, y) \geqq \delta, \quad {}^\forall x, y \in \mathscr{X}_1, \ x \neq y, \ T \in \mathscr{T} \tag{6.18}$$

$$\varepsilon + \delta \triangleq m > 0 \tag{6.19}$$

が成り立てば，Sは連続である。

（証明）　Sが有界であることは，仮定と，定理2・2，(f) および定理6・2から明らかである。今，(e_1, e_2)，(e_1', e_2')をそれぞれ(u_1, u_2)，(u_1', u_2')に対する (6・3) の解とすると

$$G_1 e_1 - G_2^{-1}(-I)(e_1 - u_1) = -u_2 \tag{6.20}$$

$$G_1 e_1' - G_2^{-1}(-I)(e_1' - u_1) = -u_2' + G_2^{-1}(u_1 - e_1') - G_2^{-1}(u_1' - e_1') \tag{6.21}$$

が成り立つ．今任意に与えられた $u_1 \in \mathscr{X}_1$ に対して，$\hat{G}_2 : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_1$ を，

$$\hat{G}_2 x \triangleq -G_2^{-1}(-I)(x - u_1) + G_2^{-1}(u_1) \tag{6.22}$$

で定めると，(6.20) ～ (6.22) から，

$$P_T(G_1 + \hat{G}_2)P_T e_1 - P_T(G_1 + \hat{G}_2)P_T e_1'$$
$$= P_T(u_2' - u_1) + P_T[G_2^{-1}(P_T u_1 - P_T e_1') - G_2^{-1}(P_T u_1' - P_T e_1')] \tag{6.23}$$

を得る。一方，(6.22) から，

$$\lambda_T(\hat{G}_2; x, y) = \lambda_T(-G_2^{-1}(-I); x - u_1, y - u_1) \geqq \delta,$$
$$\forall x, y \in \mathscr{X}_1,\ x \neq y,\ T \in \mathscr{T} \tag{6.24}$$

であるから，(6.23)，(6.24)，(6.17) ～ (6.19)，定理2・2，(f) (g) から，

$$m\,|e_1 - e_1'|_T \leqq |u_2 - u_2'|_T + \gamma(G_2^{-1})\,|u_1 - u_1'|_T, \quad \forall T \in \mathscr{T}$$

$$\therefore\ |e_1 - e_1'| \leqq [\gamma(G_2^{-1})/m]\,|u_1 - u_1'| + (1/m)\,|u_2 - u_2'| \tag{6.25}$$

を得る。そして，(6.3) と (6.25) から

$$|e_2 - e_2'| \leqq [1 + \gamma(G_2^{-1})/m]\,\gamma(G_2^{-1})\,|u_1 - u_1'|$$
$$+ [\gamma(G_2^{-1})/m]\,|u_2 - u_2'|$$

が得られる。従って，S は連続である。 (証明終)

［系6・4］（受動定理[55]） $\mathscr{X}_1 = \mathscr{X}_2$ はヒルベルト空間 H とする。系 S において G_2 はリプシッツ連続とする。次の条件：

$$\exists m > 0,\ \lambda_2(G_2; x, y) \geqq m,\ \forall x, y \in H,\ x \neq y \tag{6.26}$$

$$\lambda_2(G_1; x, y) \geqq 0,\ \forall x, y \in H,\ x \neq y \tag{6.27}$$

が成り立つならば，S は連続である。

(証明) (6.26)，補助定理2・2，系3・1から，G_2 は因果的な逆作用素 G_2^{-1} を有する。さらに，(6.26) 定理2・2，(h) から，G_2^{-1} はリプシッツ連続となる。一方，補題2・11から，$y^i = G_2 x^i$，$i \in \overline{2}$ とすると，

任意の$y^1, y^2 \in H$, $y^1 \neq y^2$に対し,

$$\alpha_2(-G_2^{-1}(-I); -y^1, -y^2) = \frac{\langle -G_2^{-1}y^1 + G_2^{-1}y^2, -y^1 + y^2 \rangle}{\langle -y^1 + y^2, -y^1 + y^2 \rangle}$$

$$= \frac{\langle x^1 - x^2, G_2x^1 - G_2x^2 \rangle}{\langle G_2x^1 - G_2x^2, G_2x^1 - G_2x^2 \rangle}$$

となり, $\gamma(G_2) < \infty$ (6.26)から,

$$\alpha_2(-G_2^{-1}(-I); x, y) \geqq m/[\gamma(G_2)]^2 > 0, \quad {}^\forall x, y \in H, x \neq y$$

を得る。従って, 定理6・3によって, Sは連続となる。　(証明終)

(注6・6) 補題2・11からわかるように, (6.26), (6.27)は,

$$^\exists m > 0, \quad \langle P_T[G_2x - G_2y], P_T(x-y) \rangle \geqq m|P_T(x-y)|_2^2$$

$$^\forall x, y \in H, T \in \mathcal{T},$$

$$\langle P_T[G_1x - G_1y], P_T(x-y) \rangle \geqq 0, \quad {}^\forall x, y \in H, {}^\forall T \in \mathcal{T}$$

と等価である。

[系6・5] (スモールゲイン定理[55]) 系Sにおいて, G_1, $G_2 \in \mathcal{F}_L$とする。次の条件:

$$\gamma(G_1) \cdot \gamma(G_2) \leqq \delta < 1$$

が成り立てば, 系Sは連続である。

(証明) 系6・2の証明と同様にして示される。　(証明終)

6・5 応用例

ここでは, 常微分方程式の数値積分法の安定解析に上で得られた結果を応用することを考える。

対象とする微分方程式は, 次式で与えられる。

$$\dot{x} = f(x, t) + \hat{u}, \quad x(0) = x^0 \qquad (6.28)$$

但し, $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, $f \in C^k$; $\hat{u}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, $\hat{u} \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$.

通常数値積分法の安定解析は, 特性$f(\cdot, \cdot)$が安定である場合について行われるので, 以下では次の仮定6－3が満足されるものとする。

[仮定6－3] 系(6.28)において,

i) $f(\theta, t)=\theta$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (6.29)

ii) $\exists m>0$, $\mu[\partial_1 f(x,t)] \leqq -m$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ (6.30)

が成り立つ。

さてここでは，線形n段階公式（linear n-step method）を例にとる。線形n段階公式は，

$$y_{k+n}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i y_{k+i}+h\sum_{i=0}^{n}\beta_i[f(y_{k+i},t_{k+i})+u_{k+i}], \quad k\in\mathbb{Z}_+$$

で与えられる。ここで，hは刻み幅を示し，$t_k \triangleq k\cdot h$，$u_k \triangleq \hat{u}(t_k)$とする。又，初期値$y_0=x^0$の他に，出発値$y_1, \cdots, y_{n-1}$はあらかじめ何らかの方法で計算しなければならない。

一方 (6.28)の解を$\hat{x}(\cdot)$とし，$x_k \triangleq \hat{x}(t_k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$とすると，

$$x_{k+n}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i x_{k+i}+h\sum_{i=0}^{n}\beta_i[f(x_{k+i},t_{k+i})+u_{k+i}]+\xi_k, \quad k\in\mathbb{Z}_+ \quad (6.31)$$

が成り立つ。ここで，ξ_kは切り捨て誤差（truncation error）を示す。

又，実際の計算では丸めの誤差（round off error）r_kが生ずるから実際得られる数値解$\{\tilde{y}_k\}$は，

$$\tilde{y}_{k+n}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i \tilde{y}_{k+i}+h\sum_{i=0}^{n}\beta_i[f(\tilde{y}_{k+i},t_{k+i})+u_{k+i}]+r_k, \quad k\in\mathbb{Z}_+ \quad (6.32)$$

によって与えられる。

$$x \triangleq (x_0, x_1, \cdots), \quad \tilde{y} \triangleq (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \cdots)$$
$$u \triangleq (u_0, u_1, \cdots), \quad \xi \triangleq (\xi_0, \xi_1, \cdots)$$
$$r \triangleq (r_0, r_1, \cdots)$$
$$(\tilde{G}_1 x)_k \triangleq \gamma x_k + h f(x_k, t_k), \quad k\in\mathbb{Z}_+$$
$$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots) \triangleq \tilde{G}_1 x$$
$$\psi=(\psi_1, \psi_2, \cdots) \triangleq \tilde{G}_1 \tilde{y}$$

とし，それらのZ変換を$\hat{x}(z)$, $\hat{y}(z)$, $\hat{u}(z)$, $\hat{\xi}(z)$, $\hat{r}(z)$, $\hat{\varphi}(z)$, $\psi(z)$で示し，

$$\hat{\alpha}(z) \triangleq z^n-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i z^i, \quad \hat{\beta}(z) \triangleq \sum_{i=0}^{n}\beta_i z^i$$

$$\hat{\gamma}(z) \triangleq \hat{\alpha}(z) + \gamma\hat{\beta}(z)$$

とすると，(6.31)，(6.32)から

$$\hat{\gamma}(z)\hat{x}(z) = \hat{\beta}(z)[\hat{\varphi}(z) + \hat{u}(z)] + \hat{\varepsilon}(z) + \hat{\eta}(z) \tag{6.33}$$

$$\hat{\gamma}(z)\hat{\tilde{y}}(z) = \hat{\beta}(z)[\hat{\psi}(z) + \hat{u}(z)] + \hat{\rho}(z) + \hat{\zeta}(z) \tag{6.34}$$

を得る。但し，

$$\hat{\eta}(z) \triangleq \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{n-\ell}[(1+\gamma\beta_n)x_\ell - \beta_n(\varphi_\ell + u_\ell)]$$
$$\qquad - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{j-1} z^{j-\ell}[(\alpha_j + \gamma\beta_j)x_\ell - \beta_j(\varphi_\ell + u_\ell)]$$

$$\hat{\zeta}(z) \triangleq \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{n-\ell}[(1+\gamma\beta_n)\tilde{y}_\ell - \beta_n(\psi_\ell + u_\ell)]$$
$$\qquad - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{j-1} z^{j-\ell}[(\alpha_j + \gamma\beta_j)\tilde{y}_\ell - \beta_j(\psi_\ell + u_\ell)]$$

今，$\gamma > 0$ を $\hat{\gamma}(z) = 0$ の根が全て単位円の内部にあるように選び*，線形作用素G_2を，そのZ変換 $\hat{G}_2(z)$が，

$$\hat{G}_2(z) = \hat{\beta}(z) / \hat{\gamma}(z) \tag{6.35}$$

で与えられるように定める。又，$\tilde{\varepsilon}$，$\tilde{\rho}$，$\tilde{\eta}$，$\tilde{\zeta}$をそれぞれ，

$$\tilde{\varepsilon} \triangleq Z^{-1}[\hat{\varepsilon}(z)/\hat{\gamma}(z)],\ \tilde{\rho} \triangleq Z^{-1}[\hat{\rho}(z)/\hat{\gamma}(z)]$$
$$\tilde{\eta} \triangleq Z^{-1}[\hat{\eta}(z)/\hat{\gamma}(z)],\ \tilde{\zeta} \triangleq Z^{-1}[\hat{\zeta}(z)/\hat{\gamma}(z)] \tag{6.36}$$

で定める。但し，$Z^{-1}[\cdot]$は逆Z変換を示す。

このとき，(6.33)～(6.36)から，

$$x = G_2\tilde{G}_1 x + G_2 u + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\eta} \tag{6.37}$$

$$\tilde{y} = G_2\tilde{G}_1\tilde{y} + G_2 u + \tilde{\rho} + \tilde{\zeta} \tag{6.38}$$

を得る。

ところで，数値積分法の安定解析とは，「いかなる条件の下に$\{\tilde{y}_n\}$は有界となるか，そして$\{\tilde{y}_n\}$と$\{x_n\}$との差はどの程度か」という問題である。従って，(6.37)，(6.38)で記述されるフィードバック系の連続性について調べる問題である。又，一般に$\{\varepsilon_n\}$，$\{\rho_n\}$は，常に値を有する（0でない）ので対象とする空間はl_∞又はそれと等価なノルムを有する空間である。

---

* このような$\gamma > 0$は，与えられた公式の絶対安定領域[95]の中に$-\gamma$が存在するようにとればよい。

今，$G_1 = -\tilde{G}_1$ とすると，図6－3に示すフィードバックモデルSが得られる。従って，定理6・3から次の結果を得る。

［系6・6］　図6－4に示すような適当なマルチプライヤMが存在して，次の4条件を満足するとする。

i) $\exists (G_2M^{-1})^{-1}: l_\infty \to l_\infty$，$(G_2M^{-1})^{-1}$：因果的かつリプシッツ連続；

ii) M：リプシッツ連続；

iii) MG_1：因果的。

さらに，

$$\lambda_\infty(MG_1; x, y) \geq \epsilon, \quad {}^\forall x, y \in l_\infty,\ x \neq y,$$

$$\lambda_\infty(-(G_2M^{-1})^{-1}(-I); x, y) \geq \delta, \quad {}^\forall x, y \in l_\infty,\ x \neq y,$$

$$\epsilon + \delta \triangleq m > 0$$

なる条件が成り立つとする。このとき，$u, \xi, r \in l_\infty$ ならば，

1)　$\tilde{x} \in l_\infty$；

2)　${}^\exists \gamma > 0$，$|\tilde{x} - x|_\infty \leqq \gamma [\,|\xi|_\infty + |r|_\infty + |\tilde{\zeta} - \hat{\zeta}|_\infty\,)$

となる。

（証明）　$\hat{\gamma}(z) = 0$ の根が全て単位円の内部にあることと $\xi, r \in l_\infty$ であることから $\hat{\xi}, \hat{r}, \tilde{\zeta}, \hat{\zeta} \in l_\infty$ となることii)と $u \in l_\infty$ から $M(-hu) \in l_\infty$ となることに注意すれば，補助定理2・2と定理6・3から結果を得る。

（証明終）

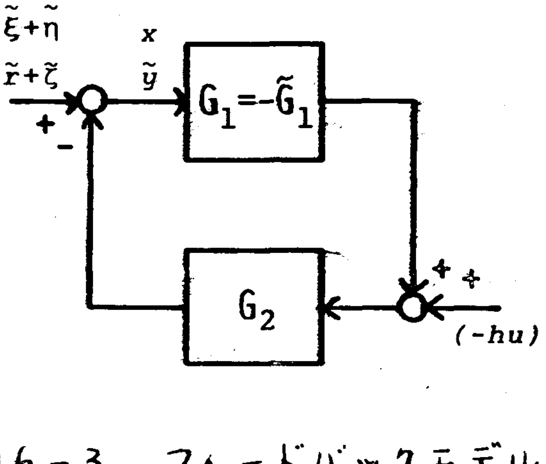


図6－3　フィードバックモデルS

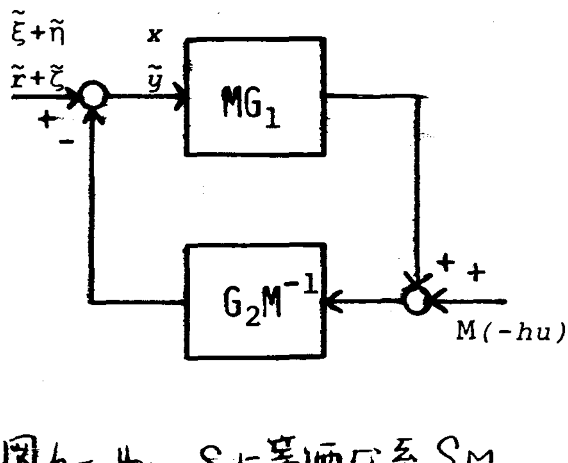


図6－4　Sに等価な系SM

系6・6の適用例を示そう

[例1]　前進オイラー法

$$y_{k+1}=y_k+h[f(y_k,t_k)+u_k],\ k\in\mathbb{Z}_+ \tag{6.39}$$

切り捨て誤差ξがl_∞に属することを保証するために次の条件6−4を設ける。

[条件6−4]　系(6.28)において次の4条件が満足される。

i)　$\exists a_1\geqq 0$, $|u(t)|\leqq a_1$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$;

ii)　$\exists a_2\geqq 0$, $|\dot{u}(t)|\leqq a_2$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$;

iii)　$\exists a_3:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $a_3\in C$,
$\|\partial_1 f(x,t)\|\leqq a_3(|x|)$, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$;

iv)　$\exists a_4:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $a_4\in C$,
$|\partial_2 f(x,t)|\leqq a_4(|x|)$, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$.

このとき、仮定6−3、補題2・8、条件6−4、i)と定理4・6から

$\exists K\geqq 0$, $\exists B(|x^0|)\geqq 0$,

$$|x(t)|\leqq K|x^0|+B\cdot a_1,\ \forall t\in\mathbb{R}_+ \tag{6.40}$$

が成り立つ。但し、$x(\cdot)$は(6.28)の解を示す。

一方テーラーの公式[40),162)]によって、

$$x(t+h)=x(t)+h\dot{x}(t)+(h^2/2)\int_0^1\ddot{x}(t+\tau h)d\tau$$
$$\forall t,\ t+h\geqq 0 \tag{6.41}$$

を得る。そして、条件6−4と(6.40)から

$\exists M>0$

$$|\ddot{x}(s)|\leqq\|\partial_1 f[x(s),s]\|\{|f[x(s),s]|+|u(s)|+|\partial_2 f[x(s),s]|$$
$$+|\dot{u}(s)|\}\leqq M,\quad \forall s\geqq 0 \tag{6.42}$$

が成り立つ。(6.41)と(6.42)から、

$$x_{k+1}=x_k+hf(x_k,t_k)+\xi_k,\ |\xi_k|\leqq(M/2)h^2$$

を得る。従って、$\xi\in l_\infty$となる。

さて、(6.39)から、

$$\hat{\alpha}(z) = z - 1\ ,\ \hat{\beta}(z) = 1$$
$$\hat{\gamma}(z) = z - (1-\gamma)\ ,\ \gamma \in (0, 1)$$
とし，マルチプライヤMを
$$(Mx)_k = x_{k-1}\ ,\quad k \in \mathbb{Z}_+$$
とすると，$M \in \mathcal{F}_L$で，$G_2 \triangleq \mathcal{Z}^{-1}[\hat{\beta}(z)/\hat{\gamma}(z)]$に対し，
$$(G_2 M^{-1})^{-1} = I + (\gamma - 1)M$$
となる。従って，$(G_2 M^{-1})^{-1}$は有界的かつリプシッツ連続となる。さらに，定理2・2，(d)，(e)，(b)から，
$$\begin{aligned} \lambda_\infty[-(G_2 M^{-1})^{-1}(-I); x, y] &= 1 + (1-\gamma)\lambda(-M; x, y) \\ &\geqq 1 - 1 + \gamma \\ &= \gamma\ ,\ {}^\forall x, y \in l_\infty\ ,\ x \neq y \quad (6.43) \end{aligned}$$
を得る。一方
$$(MG_1 x)_k = -\gamma x_{k-1} - h f(x_{k-1}, t_{k-1})$$
から，
$$\lambda(MG_1; x, y) \geqq -\{\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} \|\gamma I + h\partial_1 f(x,t)\| \quad (6.44)$$
を得る。(6.43)，(6.44)から
$$\gamma - \|\gamma I + h\cdot\partial_1 f(x, t)\| \geqq \hat{m} > 0\ ,\ {}^\forall(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \quad (6.45)$$
が成り立てば，系6・6の条件が満足される。仮定6－3においてノルムがl_1又はl_∞で指定されている場合は，hを
$$0 < h \leqq \gamma / |[\partial_1 f(x,t)]_{ii}|\ ,\ {}^\forall i \in \bar{d}\ ,\ (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$
にとれば，(6.45)は，$\hat{m} = mh$に対し成り立つ。

又，$f(x, t) = Kx$，($K \in \mathbb{R}^{d\times d}$，$\mathrm{Re}\,\lambda_i(K) < 0$)である場合には，任意に与えた$\varepsilon > 0$に対し，ある正則行列$Q_\varepsilon \in \mathbb{R}^{d\times d}$が存在し，$|x| \triangleq |Q_\varepsilon x|_1$とすると，
$$\|\gamma I + hK\| \leqq \max\{|\gamma + h\lambda_i(K)| + \varepsilon,\ i \in \bar{d}\}$$
が成り立つ[91]。従って，
$$\gamma > \max\{|\gamma + h\lambda_i(K)|\ ,\ i \in \bar{d}\} \quad (6.46)$$
であれば，(6.45)が成り立つ。そしてこのとき，(6.46)から$\lambda_i(K)$が

図6－5に示す円の内部にあればよいことがわかる。この(6.46)は，前進オイラー法が安定であるための必要条件ともなっている。

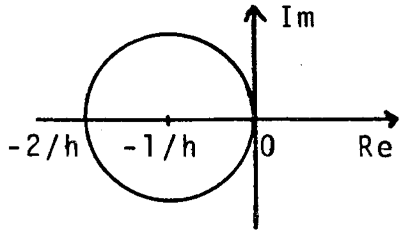


図6－5　前進オイラー法の絶対安定領域

[例2]　後退オイラー法

$$y_{k+1}=y_k+h\{f(y_{k+1},t_{k+1})+u_{k+1}\},\ k\in\mathbb{Z}_+ \qquad (6.47)$$

仮定6－3，条件6－4が満足されれば，例1と同様にして，$\xi\in l_\infty$となる。(6.47)から

$$\hat{\alpha}(z)=z-1,\quad \hat{\beta}(z)=z$$

$$\hat{\gamma}(z)=(1+\gamma)z-1,\ \gamma>0$$

従って，$M=I$とすると，$G_2=\mathcal{Z}^{-1}[\hat{\beta}(z)/\hat{\gamma}(z)]$から，

$$(G_2^{-1}x)_k=(1+\gamma)x_k-x_{k-1},\quad k\in\mathbb{Z}_+$$

となり

$$\eta(-G_2^{-1}(-I);x,y)\geq 1+\gamma-1=\gamma>0,\quad {}^\forall x,y\in l_\infty,\ x\neq y \qquad (6.48)$$

を得る。一方

$$\eta(G_1;x,y)=\eta(-\gamma I-hf(\cdot,t);x,y)$$
$$\geq-\gamma+hm,\quad {}^\forall x,y\in l_\infty,\ x\neq y \qquad (6.49)$$

となる。(6.48)，(6.49)から

$$\gamma+(-\gamma+hm)=hm>0$$

となり，系6．6の条件が満足されることがわかる。

又，$f(x,t)=Kx$の場合は，$h>0$，$\mathrm{Re}\,\lambda_i(K)<0$と等価であり，後退オイラー法がA-stable(95)であるということと一致している。

6.6　結　言

本章では，関数解析的アプローチによってフィードバック系の入出力安

定解析を行った。そして，有界性については，λ関数を用いた2つの安定定理を得た。この2つの定理は，スモールゲイン定理よりもシャープな結果となっている。又，連続性についても，λ関数を用いた安定定理を得た。この結果は，スモールゲイン定理よりもシャープな結果となっているとともに，ヒルベルト空間においては，従来知られている受動定理と一致している。そして，その意味において，受動定理を一般のバナッハ空間へまで拡張することができた。

第7章　ある種の物理的制約条件を有する系の安定解析[96]

7・1　緒　言

物理系，化学系，生体系などの広範な物理的，生理的現象を表わすダイナミカルシステムにおいては，物理学的，化学的保存法則によって，その状態方程式が，$\dot{x}_i = -g_i(x) + f_i(x) + u_i,\ i \in \bar{d}$ で与えられる。これは状態 i の状態量 x_i の変化割合が，系外からの流入割合（入力）u_i と他の状態から状態 i への流入割合 f_i との和から，状態 i から他の状態および系外への流出割合 g_i を差し引いたもので与えられることを示しており，一般に"流れの連続性"と呼ばれる性質が成り立っていることを示している。さらに，熱交換系，化学反応系やある種のRC回路などにおいてみられるように，i)　$g_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ji}(x_i) + a_{0i}(x_i)$，$f_i(x) = \sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j)$，ii)　$a_{ji}(x_i) \geqq 0$，$a_{0i}(x_i) \geqq 0$，$x_i \geqq 0$ なる条件が満足される場合も少なくない。

この章では，上に示した物理的制約条件を有する特殊な非線形ダイナミカルシステムについて，i)解の非負性（初期状態および入力が非負であれば，解軌道も非負であるか），ii)安定性（漸近安定性，指数安定性，有界入力有界状態安定性），およびiii)定常解の存在とその安定性の3点について考察している。

又，7・5では，7・2～7・5で得られた結果を化学プロセスおよびある種のRC回路に応用している。

7・2　解の非負性

対象とするダイナミカルシステムは，次式で与えられる。

$$\dot{x}_i = f_i(x) + u_i,\ x_i(0) = x_i^0 \geqq 0,\ i \in \bar{d} \qquad (7.1)$$

但し，

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x_j),\ x \in R^d \qquad (7.2)$$

ここで，$a_{ij}(\cdot)$ は，

$$-a_{ii}(\alpha)=\Sigma_{j\neq i}\, a_{ji}(\alpha)+a_{0i}(\alpha)\ ,\ \alpha\in\mathbb{R} \tag{7.3}$$

で与えられ，$a_{ij}, a_{0j}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$i,j\in\overline{d}$ は連続で，

$$a_{ij}(0)=a_{0j}(0)=0\ ,\ i,j\in\overline{d} \tag{7.4}$$

とし，$u_i:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は区分的に連続とする。

この章を通じて，次の仮定7－1が満足されるものとする。

［仮定7－1］：系（7.1）の解 $x(\cdot;x^0,u)$ は，区間 $[0,\infty)$ において唯一存在し，入力 u および初期値 x^0 に関して連続である。

ベクトルの不等号を次のように定める。

［定義7・1］ $x,y\in\mathbb{R}^d$, $u,v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^d$ を与える。

i) $x\geqq(>)\theta \iff x_i\geqq(>)0\ ,\ ^\forall i\in\overline{d}$;

ii) $x\geqq(>)y \iff x-y\geqq(>)\theta$;

iii) $u(\cdot)\geqq(>)\theta \iff u(t)\geqq(>)\theta\ ,\ ^\forall t\in\mathbb{R}_+$;

iv) $u(\cdot)\geqq(>)v(\cdot) \iff (u-v)(\cdot)\geqq(>)\theta$.

［補題7・1］ 系（7.1）において，次の条件：

$$^\forall i,j\in\overline{d}\ ,\ i\neq j\ ,\ \lambda(a_{ij};\alpha,0)\geqq 0\ ,\ ^\forall\alpha>0$$

が満足されるとする。このとき，

$$^\forall x^0>\theta\ ,\ ^\forall\hat{u}(\cdot)\geqq\theta\ ,\ ^\forall\varepsilon>0\ ,\ u(\cdot)=\hat{u}(\cdot)+\varepsilon e\ ,$$
$$x(\cdot;x^0,u)>\theta\ .$$

が成り立つ

（証明） 背理法によって証明する。今，

$$^\exists x^0>\theta\ ,\ ^\exists\hat{u}(\cdot)\geqq\theta\ ,\ ^\exists\varepsilon>0\ ,\ ^\exists t^*\in\mathbb{R}_+\ ,\ ^\exists j\in\overline{d}$$
$$x_j(t^*;x^0,u)\leqq 0\ ,\ u(\cdot)=\hat{u}(\cdot)+\varepsilon e \tag{7.5}$$

が成り立つとする。$x^0>\theta$ と $x(\cdot;x^0,u)$ の連続性から，

$$^\exists h>0\ ,\ x(t;x^0,u)>\theta\ ,\ ^\forall t\in[0,h)$$

となることに注意すると，（7.5）が成り立つためには，ある $t_1>0$ と $J_1\subset\overline{d}$ が存在して，

$$x_j(t_1;x^0,u)=0\ ,\ ^\forall j\in J_1 \tag{7.6}$$

$$x_j(t;x^0,u)>0,\quad {}^\forall j\in J_1,\quad t\in[0,t_1) \tag{7.7}$$
$$x_i(t;x^0,u)>0,\quad {}^\forall i\notin J_1\quad t\in[0,t_1] \tag{7.8}$$
が成り立たなければならない。このとき(7.6)～(7.8)と仮定から
$$f_j[x(t_1;x^0,u)]\geqq 0,\quad {}^\forall j\in J_1$$
を得る。上式と $f_j(\cdot)$, $x(\cdot;x^0,u)$ の連続性と $u(\cdot)\geqq\theta$, $\varepsilon>0$ であることから,
$$^\exists h'>0,\ {}^\forall j\in J_1,\ {}^\forall t\in(t_1-h',t_1]$$
$$f_j[x(t;x^0,u)]+u(t+0)>0 \tag{7.9}$$
を得る。一方, 十分小さい $h''>0$ に対して,
$$x_j(t_1;x^0,u)-x_j(t;x^0,u)$$
$$=(t_1-t)\{f_j[x(t;x^0,u)]+u(t+0)\}+o(t_1-t),$$
$${}^\forall j\in J_1,\ t\in[t_1-h'',t_1]$$
が成り立つから, 上式と(7.9)から,
$$^\exists j\in J_1,\ {}^\exists t\in[0,t_1),\ x_j(t;x^0,u)<0$$
となる。上式は(7.7)に矛盾する。 (証明終)

この補題7.1を用いて次の定理を得る。

[定理7.1] 系(7.1)を考える。次の5条件は等価である。

i) ${}^\forall i,j\in\mathcal{I},\ i\neq j,\ x(a_{ij};\alpha,0)\geqq 0,\ {}^\forall\alpha>0$;

ii) ${}^\forall x^0\geqq\theta,\ {}^\forall u(\cdot)\geqq\theta,\ x(\cdot;x^0,u)\geqq\theta$;

iii) ${}^\forall u(\cdot)\geqq\theta,\ x(\cdot;\theta,u)\geqq\theta$;

iv) ${}^\forall x^0>\theta,\ x(\cdot;x^0,\theta)\geqq\theta$;

v) ${}^\forall x^0\geqq\theta,\ x(\cdot;x^0,\theta)\geqq\theta$.

(証明) i) ⇨ ii) 補題7.1と仮定7.1から明らか.

ii) ⇨ iii) 明らか

iii) ⇨ iv) 任意に $x^0>\theta$ を与える。$\hat{\tau}>0$ を
$$x_i^0-\hat{\tau}f_i(\alpha x^0)\geqq\theta,\quad {}^\forall i\in\mathcal{I},\quad \alpha\in[0,1]$$
となるように選ぶ*。そして

* このような $\hat{\tau}$ の存在は, $f(\theta)=\theta$ と $f(\cdot)$ の連続性から明らか。

$$u(t) \triangleq \begin{cases} (1/\hat{t})x^0 - f[(t/\hat{t})x^0] \geqq \theta, & t \in [0, \hat{t}) \\ \theta, & t \geqq \hat{t} \end{cases}$$

とすると，(7.1)の解の一意性から

$$x(\hat{t};\theta,u) = x^0$$

となる。そして，iii)から，

$$x(\cdot;\theta,u) \geqq \theta$$

となる。従って，(7.1)が時間不変系であることを考慮するとvi)を得る。

iv) ⇨ v). 明らか.

v) ⇨ i). 背理法によって証明する。今

$$\exists k,\ell \in \mathcal{I},\ k \neq \ell,\ \exists \alpha > 0,\ a_{k\ell}(\alpha) < 0$$

とする。$x^0 = \alpha e^\ell$とすると，十分小さな$t>0$に対して，

$$\begin{aligned} x_k(t;x^0,\theta) &= x_k^0 + t f_k(\alpha e^\ell) + o(t) \\ &= t \cdot a_{k\ell}(\alpha) + o(t) < 0 \end{aligned}$$

となる。これは，v)に矛盾する。

(注7.1)　$f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^{d\times d}$の場合については，Bellman(58)によって，定理7.1は既に証明されている。

定理7.1から，解の単調性に関する次の結果が直ちに得られる。

[系7.1]　系(7.1)を考える。次の4条件は等価である。

i) $\forall i,j \in \mathcal{I},\ i \neq j,\ \lambda(a_{ij};\alpha,\beta) \geqq 0,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \neq \beta$;

ii) $\forall x^0, \tilde{x}^0 \geqq \theta : x^0 \geqq \tilde{x}^0,\ \forall u(\cdot), \tilde{u}(\cdot) \geqq \theta ; u(\cdot) \geqq \tilde{u}(\cdot)$,
$x(\cdot;x^0,u) \geqq x(\cdot;\tilde{x}^0,\tilde{u})$;

iii) $\forall x^0, \tilde{x}^0 \geqq \theta : x^0 \geqq \tilde{x}^0,\ \forall u(\cdot) \geqq \theta,\ x(\cdot;x^0,u) \geqq x(\cdot;\tilde{x}^0,u)$;

iv) $\forall x^0 \geqq \theta,\ \forall u(\cdot), \tilde{u}(\cdot) \geqq \theta ; u(\cdot) \geqq \tilde{u}(\cdot)$,
$x(\cdot;x^0,u) \geqq x(\cdot;x^0,\tilde{u})$.

(証明)　(省略)

7・3　安定性

ここでは，系（7.1）の漸近安定性，指数安定性，および有界入力有界状態安定性について考察する。

まず次の定義から示す。

［定義7・2］　行列$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{d\times d}$が分解可能

$\Longleftrightarrow$　　$\exists\mathcal{J}\subset\mathcal{I},\ \mathcal{J}\neq\phi,\ \forall j\in\mathcal{J},\ \forall k\notin\mathcal{J},\ a_{jk}=0$，

すなわち，適当な順列行列Pが存在して，

$$PAP^{tr}=\begin{bmatrix} A_{11} & \bigcirc \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

となる。但し，A_{ii}，$i\in\overline{2}$は正方行列である。

Aが分解不能　$\Longleftrightarrow$　Aが分解可能でない。すなわち，

$$\forall J\subset\mathcal{I},\ \exists j\in J,\ \exists k\notin J,\ a_{jk}\neq 0$$

（注7・2）　普通Aが分解可能であることをAが可約（reducible）であるといい，Aが分解不能であることをAが既約（irredueible）であるというが，ここでは，分解可能，分解不能という語の方が内容からして適切と思われるのでこの語を用いている。

以下においては，仮定7－1と共に，次の仮定7－2が満足されるものとする。

［仮定7－2］　系（7.1）において，

$$\forall i,j\in\mathcal{I},\ i\neq j,\ \lambda(a_{ij};\alpha,0)\geqq 0,\ \forall\alpha>0;$$
$$\forall i\in\mathcal{I},\ \lambda(a_{0i};\alpha,0)\geqq 0,\ \forall\alpha>0.$$

が成り立つ。

仮定7－2が満足されるように系においては，主に興味があるのは，$x(\cdot;x^0,u)\geqq\theta$の場合である。従って，ここでは，$x^0\geqq\theta$，$u(\cdot)\geqq\theta$の場合のみについて考察する。

まず漸近安定性について考える。

［定義7・3］ 系（7.1）において，$u(\cdot)\equiv\theta$とする。

Mが系（7.1）の不変集合である。

$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x^0\in M$，$x(t;x^0,\theta)\in M$，$\forall t\geqq 0$．

［補題7・2］（Lasall[38),(47)]） 系（7.1）において，$u(\cdot)\equiv\theta$とする。ある連続な偏微分を有するリアプノフ関数$V:\mathbb{R}^d_+\to\mathbb{R}^d_+$が存在して，

i) $V(x)\geqq 0$，$\forall x\in\mathbb{R}^d_+$；

ii) $V(x)=0 \Longleftrightarrow x=\theta$；

iii) $V'_{(7.1)}(x)\leqq 0$，$\forall x\in\mathbb{R}^d$

を満足するとする。今，$E\triangleq\{x\geqq\theta \mid V'_{(7.1)}(x)=\theta\}$とし，MをE内の最大不変集合とする。このとき，系（7.1）の有界な解はMへ漸近する。

（注7・3） 通常Lasallの定理として知られているものは，$V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$が，条件i)′～iii)′（$\mathbb{R}^d_+$を$\mathbb{R}^d$にかえたもの）をみたす場合について示されているが，全く同様な証明によって，補題7・1を得ることができる。

［定理7・2］ 系（7.1）において$u(\cdot)\equiv\theta$とする。次の2条件：

i) $\exists j_1\in\mathcal{J}$，$a_{0j_1}\in CP$

但し，$CP\triangleq\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \mid \varphi\in C,\ \varphi(\alpha)>0,\ \alpha>0,\ \varphi(0)=0\}$；

ii) $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{d\times d}$：分解不能

但し，

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 1 & i\neq j,\ a_{ij}\in CP\\ 0 & i\neq j,\ a_{ij}\notin CP\end{cases}$$

が満足されるならば，系（7.1）の零解は大域漸近安定である。

（証明） $V(x)\triangleq e^{tr}x$

とする。このとき，（7.3）と仮定7－2から，

$$\begin{aligned}V'_{(7.1)}(x)&=\textstyle\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x_j)\\&=-\textstyle\sum_{j=1}^{d}a_{0j}(x_j)\leqq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}^d_+\end{aligned}\tag{7.10}$$

となり，仮定7－2，定理2・1から

$$|x(t;x^0,\theta)|_1=V[x(t;x^0,\theta)]\leqq V(x^0)=|x^0|_1,\quad \forall t\geqq 0$$

が成り立つ。従って，任意の$x^0 \geqq \theta$に対し，解$x(\cdot;x^0,\theta)$は有界となる。
今，$E \triangleq \{x \geqq \theta \mid V_{(7.11)}(x)=0\}$とし，$M$を$E$内の最大不変集合とする。もし，$M=\{\theta\}$ならば，補題7・2によって結論が得られる。従って$M=\{\theta\}$を示す。(7.10)と仮定から $E \subset \{x \geqq \theta \mid x_{j_1}=0\}$ となる。任意に$x^0 \in M \subset E$を固定する。このとき，$x(\cdot;x^0,\theta) \geqq \theta$であることに注意すると，$M$が$E$内の不変集合だから，

$$0 = \dot{x}_{j_1}(0) = \sum_{j=1}^{d} a_{j_1 j}(x_j)$$

となる*，一方，Bが分解不能だから，ある$j_2 \neq j_1$に対し，$a_{j_1 j_2} \in CP$である。従って，仮定7-2，(7.4)と$x^0_{j_1}=0$とに注意すると$x^0_{j_2}=0$でなければならない。よって，$M \subset \{x \geqq \theta \mid x_j=0,\ j \in J_2\}$，$J_2 \triangleq \{j_1\} + \{j_2\}$となる。同様に，

$$0 = \dot{x}_j(0) = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(x^0_k), \quad j \in J_2$$

から，ある$j_3 \notin J_2$に対し，$x^0_{j_3}=0$となる。従って，$M \subset \{x \geqq \theta \mid x_j=0,\ j\in J_3\}$，$J_3 \triangleq J_2+\{j_3\}$となる。以下これを繰り返して，$M \subset \{x \geqq \theta \mid x_j = 0,\ j \in J_d = \mathcal{J}\} = \{\theta\}$となる。（証明終）

次に指数安定性について考える。
［定理7・3］系(7.1)において，$u(\cdot)\equiv\theta$とする。次の4条件：

i) $\exists c>0,\ \forall j \in \mathcal{J},\ \lambda(-a_{jj};\alpha,0) \leqq c,\ \forall\alpha>0$;

ii) $\forall i,j\in\mathcal{J},\ i\neq j,\ \exists b_{ij}\geqq 0,\ \lambda(a_{ij};\alpha,0)\geqq b_{ij},\ \forall\alpha>0$;

iii) $B=(b_{ij})$は分解不能

iv) $\exists j_1\in\mathcal{J},\ \exists\varepsilon_1>0,\ \lambda(a_{0j_1};\alpha,0)\geqq\varepsilon_1,\ \forall\alpha>0$

が満足されるならば，系(7.1)の零解は大域指数安定である。
（証明） もし，

$$\exists\{\gamma_j>0,\ j\in\mathcal{J}\},\ \exists\varepsilon>0$$

$$\gamma_j\lambda(a_{jj};\alpha,0)+\sum_{i\neq j}\gamma_i\lambda(a_{ij};\alpha,0)\leqq-\varepsilon, \quad \forall j\in\mathcal{J},\ \forall\alpha>0 \qquad (7.11)$$

---

* $x(\cdot)\triangleq x(\cdot;x^0,\theta)$（以下同様に略す）．

が成り立つならば，

$$V(x) \triangleq \sum_{j=1}^{d} \gamma_j x_j, \quad x \in \mathbb{R}_+^d$$

とすると．

$$V(x) \geqq \hat{\gamma}|x|_1, \quad x \in \mathbb{R}_+^d, \quad \hat{\gamma} \triangleq \min\{\gamma_j, j \in \bar{d}\}$$

および

$$\begin{aligned} V'_{(7.1)}(x) &= \sum_{i,j=1}^{d} \gamma_i a_{ij}(x_j) \\ &\leqq -\hat{\varepsilon} \sum_{j=1}^{d} x_j \\ &\leqq -(\hat{\varepsilon}/\hat{\gamma}) V(x), \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}_+^d \end{aligned}$$

を得る。従って，$x(\cdot\,; x^0, \theta) \geqq \theta$ であることに注意すると，上式から，(7.1) の零解は大域指数安定となることがわかる。

以下 (7.11) を示す．

仮定 7－2，(7.3) と条件 iv) から，

$$\lambda(a_{jj}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \lambda(a_{ij}; \alpha, 0) \leqq -\varepsilon_1, \quad {}^\forall \alpha > 0, \quad j \in J_1 \triangleq \{j_1\} \tag{7.12}$$

および，

$$\lambda(a_{jj}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \lambda(a_{ij}; \alpha, 0) \leqq 0, \quad {}^\forall \alpha > 0, \quad j \in \bar{d} - J_1 \tag{7.13}$$

が成り立つ。今，$\gamma_j' > 0$，$j \in \bar{d}$ を，

$$\gamma_j' \triangleq \begin{cases} 1 - \varepsilon_1/2c, & j \in J_1 \\ 1, & j \notin J_1 \end{cases}$$

とすると，条件 i)，ii)，(7.12) と (7.13) から

$$\begin{aligned} &\gamma_j' \lambda(a_{jj}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \gamma_i' \lambda(a_{ij}; \alpha, 0) \\ &\leqq -\varepsilon_1 - (1 - \gamma_j') \lambda(a_{jj}; \alpha, 0) \\ &\leqq -\varepsilon_1/2, \quad {}^\forall \alpha > 0, \quad j \in J_1 \end{aligned} \tag{7.14}$$

および

$$\begin{aligned} &\gamma_j' \lambda(a_{jj}; \alpha, 0) + \sum_{i \neq j} \gamma_i' \lambda(a_{ij}; \alpha, 0) \\ &\leqq -\sum_{i \neq j} (1 - \gamma_i') \lambda(a_{ij}; \alpha, 0) \\ &\leqq -\sum_{i \in J_1} (1 - \gamma_i') b_{ij}, \quad {}^\forall \alpha > 0, \quad j \in \bar{d} - J_1 \end{aligned} \tag{7.15}$$

を得る。一方，条件iii)から，ある$K_1 \subset \mathcal{J}$，$K_1 \cap J_1 = \phi$が存在して，任意の$j \in K_1$に対して適当な$i \in J_1$が存在して，$b_{ij} > 0$となる。従って，

$$J_2 = J_1 + K_1$$

$$\varepsilon_2 \triangleq \varepsilon_1 b/2c \leqq \varepsilon_1/2 \quad , b \triangleq \min\{b_{ij} > 0 \ , i, j \in \mathcal{J}, i \neq j\},$$

$$a_{ij}^1(\alpha) \triangleq \gamma_i^1 a_{ij}(\alpha) \quad , \alpha \in \mathbb{R} \ , i, j \in \mathcal{J}$$

とすると，(7.14)，(7.15)から，

$$\lambda(a_{jj}^1; \alpha, 0) + \Sigma_{i \neq j} \lambda(a_{ij}^1; \alpha, 0) \leqq -\varepsilon_2 , \ ^\forall\alpha > 0 , \quad j \in J_2$$

$$\lambda(a_{jj}^1; \alpha, 0) + \Sigma_{i \neq j} \lambda(a_{ij}^1; \alpha, 0) \leqq 0 , \ ^\forall\alpha > 0 , \quad j \in \mathcal{J} - J_2$$

を得る。以下上の操作をくり返すと，ある$m < d$に対して，$J_m = \mathcal{J}$となり

$$\lambda(a_{jj}^{m-1}; \alpha, 0) + \Sigma_{i \neq j} \lambda(a_{ij}^{m-1}; \alpha, 0) \leqq -\varepsilon_m , \ ^\forall\alpha > 0 , \quad j \in \mathcal{J}$$

を得る。従って，

$$\gamma_j \triangleq \Pi_{k=1}^{m-1} \gamma_j^k , \quad j \in \mathcal{J}$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_m$$

とおくと，(7.11)が成り立つことがわかる。　　　　　　　　　　(証明終)

(注7.4)　もし，仮定7-2，および定理7・3の条件i)〜iv)が，任意の$\alpha \in \mathbb{R}$，$\alpha \neq 0$に対して成り立つならば，全く同様にして　(7.11)が任意の$\alpha \in \mathbb{R}$，$\alpha \neq 0$に対し成り立つことが示される。そして，この場合，$V(x) \triangleq \Sigma_{j=1}^{d} \gamma_j |x_j|$とおくことによって，(7.1)の零解が通常の意味で大域指数安定となることが示される。

最後に有界入力有界状態安定について示す。

[定理7・4]　系(7.1)において，定理7・3の条件i)〜iv)が全て満足されるならば，(7.1)は有界入力有界状態安定である。

(証明)　任意に$x^0 \geqq \theta$，$u(\cdot) \geqq \theta$を与える。(7.11)に注意して，

$$\psi(t) \triangleq \Sigma_{j=1}^{d} \gamma_j x_j(t; x^0, u) , \quad t \geqq 0$$

とおくと，

$$\psi(0) = \Sigma_{j=1}^{d} \gamma_j x_j^0$$

$$\dot{\psi}_+(t) \leqq -(\hat{\varepsilon}/\delta)\psi(t) + \delta |u|_\infty , \quad \delta = \max\{\gamma_j , j \in \mathcal{J}\} .$$

を得る。従って，比較定理（補題4・4）によって，

$$\psi(t) \leqq \exp(-mt)\psi(0) + (\delta/m)|u|_\infty \ , \ ^\forall t \geqq 0$$

が成り立つ。但し，$m = \hat{\varepsilon}/\hat{\delta}$

上式から，$x(\cdot;x^0,u) \geqq \theta$ に注意すると，

$$|x(t;x^0,u)|_1 \leqq (\hat{\delta}/\delta)|x^0|_1 + \hat{\varepsilon}\delta|u|_\infty$$

を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

7・4　定常解の存在と安定性

この節では，入力および系外への流出がない場合，すなわち，次の仮定7－3が満足される場合について，定常解の存在およびその安定性について考える。

［仮定7－3］　系（7.1）において，次の2条件が成り立つ。

i)　$u(\cdot) \equiv \theta$；

ii)　$a_{0i}(\alpha) = 0 \ , \ ^\forall \alpha \geqq 0 \ , \ i \in \bar{d}$．

仮定7－3，ii)，（7.3）と（7.4）から

$$-a_{jj}(\alpha) = \Sigma_{i \neq j}\, a_{ij}(\alpha) \ , \ ^\forall \alpha \geqq 0 \ , \ j \in \bar{d} \qquad (7.16)$$

が成り立つ．今，系（7.1）において，

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} I & \theta \\ e^{tr} & 1 \end{bmatrix} x \ , \ \eta \in \mathbb{R} \ , \ \xi \in \mathbb{R}^s \ , \ s \triangleq d-1 \qquad (7.17)$$

なる変換を行うと，（7.16）から，

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \Sigma_{i=1}^{d}\Sigma_{j=1}^{d}\, a_{ij}(x_j) \\ &= \Sigma_{j=1}^{d}(\Sigma_{i=1}^{d}\, a_{ij}(x_j)) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

となり，

$$\eta(t) \equiv \eta(0) = \Sigma_{i=1}^{d}\, x_i^0$$

となる。従って，

$$k \triangleq \Sigma_{i=1}^{d}\, x_i^0 \qquad (7.18)$$

$$q_i(\xi) \triangleq \sum_{j=1}^{s} a_{ij}(\xi_j) + a_{in}(k - e^{tr}\xi),$$
$$\xi \in \mathbb{R}^s,\ i \in \overline{s} \qquad (7.19)$$

とすると，（7.1），（7.17）〜（7.19）から，

$$\dot{\xi}_i = q_i(\xi),\ \xi_i(0) = \xi_i^0 = x_i^0,\ i \in \overline{s} \qquad (7.20)$$

を得る。さて議論の都合上，ある $\tilde{m} > 0$ を与えて，$\tilde{a}_{ij}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i, j \in \overline{d}$，$i \neq j$ を，

$$\tilde{a}_{ij}(\alpha) \triangleq \begin{cases} a_{ij}(\alpha), & \alpha \geqq 0, \\ \tilde{m}\alpha, & \alpha < 0 \end{cases} \qquad (7.21)$$

で与え，$\tilde{a}_{jj}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ j \in \overline{s}$ を

$$\tilde{a}_{jj}(\alpha) \triangleq \sum_{i=1, i \neq j}^{d} \tilde{a}_{ij}(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

で定める。そして，$\tilde{q}_i: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R},\ i \in \overline{s}$ を，

$$\tilde{q}_i(\zeta) \triangleq \sum_{j=1}^{s} \tilde{a}_{ij}(\zeta_j) + \tilde{a}_{in}(k - e^{tr}\zeta),\ \zeta \in \mathbb{R}^s \qquad (7.22)$$

で与える。このとき次のことが成り立つ。

［補助定理7・1］　今，$\tilde{q}(\zeta^\infty) = \theta$ なる $\zeta^\infty \in \mathbb{R}^s$ が存在し，次の系：

$$\dot{\zeta} = \tilde{q}_i(\zeta),\ \zeta(0) = \zeta^0 \triangleq \xi^0 \qquad (7.$$

の解が区間［0.∞）で唯一存在するとする。さらに，

$$\exists m > 0,\ |\zeta(t;\zeta^0) - \zeta^\infty| \leqq \exp(-mt)\,|\zeta^0 - \zeta^\infty|,$$
$$\forall t \geqq 0 \qquad (7.23)$$

が満足されるならば，

i) $\zeta^\infty \geqq \theta$;

ii) $f(x^\infty) = \theta,\ x^\infty \triangleq [(\zeta^\infty)^{tr}, k - e^{tr}\zeta^\infty]^{tr} \geqq \theta$;

iii) $\exists K > 0,\ |x(t; x^0, \theta) - x^\infty| \leqq K\exp(-mt)\,|x^0 - x^\infty|,\ \forall t \geqq 0$

が成り立つ。

（証明）　$\tilde{q}$ の定め方と，仮定7－1，7－2，および定理7・1から，

$$\begin{aligned} \zeta_i(t;\zeta^0) &= \xi_i(t;\xi^0) \\ &= x_i(t; x^0, \theta) \\ &\geqq 0,\ \forall i \in \overline{s},\ t \geqq 0 \end{aligned} \qquad (7.24)$$

を得る。従って，（7.23）と（7.24）から i) を得る。そして，仮定7－3

と(7.17)から$f(x^\infty)=\theta$となることがわかる。さらに，$\mathbb{R}^d$におけるノルムの等価性，(7.23)，(7.24)から，ある$K_1, K_2>0$に対して，

$$
\begin{aligned}
&|x(t;x^0,\theta)-x^\infty| \\
&\leqq K_1 \textstyle\sum_{i=1}^{d} |x_i(t;x^0,\theta)-x_i^\infty| \\
&= K_1\{\textstyle\sum_{i=1}^{s} |\xi_i(t;\xi^0)-\xi_i^\infty| + |e^{tr}\xi(t;\xi^0)-e^{tr}\xi^\infty|\} \\
&\leqq 2K_1 \textstyle\sum_{i=1}^{s} |\xi_i(t;\xi^0)-\xi_i^\infty| \\
&\leqq 2K_1\cdot K_2\, |\xi(t;\xi^0)-\xi^\infty| \\
&\leqq 2K_1\cdot K_2 \exp(-mt)\, |\xi^0-\xi^\infty| \quad, \forall t\geqq 0
\end{aligned} \tag{7.25}
$$

を得る。同様に，$K_3, K_4>0$に対し，

$$
\begin{aligned}
|\xi^0-\xi^\infty| &\leqq K_3 \textstyle\sum_{i=1}^{s} |\xi_i^0-\xi_i^\infty| \\
&= K_3 \textstyle\sum_{i=1}^{s} |x_i^0-x_i^\infty| \\
&\leqq K_3 \textstyle\sum_{i=1}^{d} |x_i^0-x_i^\infty| \\
&\leqq K_3\cdot K_4\, |x^0-x^\infty|
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

が成り立つ。(7.25)と(7.26)から，iii)を得る。そして，iii)と$x(\cdot;x^0,\theta)\geqq\theta$から，$x^\infty\geqq\theta$となる。　　　　　　(証明終)

[定理7.5]　系(7.1)において，次の条件：

i)　$\forall i,j\in\overline{d}$, $i\neq j$, $\lambda(a_{ij};\alpha,\beta)\geqq 0$, $\forall\alpha,\beta\geqq 0$, $\alpha\neq\beta$;

ii)　$\exists m>0$, $\forall j\in\overline{s}$, $s=d-1$,

$$\lambda(a_{nj};\alpha,\beta)\geqq m>0 \quad, \forall\alpha,\beta\geqq 0 \quad, \alpha\neq\beta$$

が満足されるとする。このとき，任意の$x^0\geqq\theta$に対し，

i)　$f(x^\infty)=\theta$;

ii)　$\sum_{i=1}^{d} x_i^0=\sum_{i=1}^{d} x_i^\infty$;

iii)　$|x(t;x^0,\theta)-x^\infty|\leqq K\cdot\exp(-mt)\,|x^0-x^\infty|$, $K>0$, $\forall t\geqq 0$

が成り立つような$x^\infty(x^0)$が一意に定まる。

(証明)　$\hat{a}_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を(7.21)，(7.22)のように定める$(\hat{m}=m)$と，

$$\lambda(\hat{a}_{ij};\alpha,\beta)\geqq 0 \quad, \forall\alpha.\beta\in\mathbb{R}, \quad \alpha\neq\beta \quad, i,j\in\overline{d} \quad, i\neq j \tag{7.27}$$

および，

$$\lambda(\tilde{a}_{jj};\alpha,\beta)+\sum_{i=1, i\neq j}^{s}\lambda(\tilde{a}_{ij};\alpha,\beta)$$
$$=-\lambda(\tilde{a}_{nj};\alpha,\beta)$$
$$\leqq -m<0\ ,\quad {}^{\forall}\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\beta,\ j\in\overline{S} \tag{7.28}$$

が成り立つ。ノルム$|\cdot|:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$を（2.28）で定めると，定理2・2，(e)，(f)，(7.27)，(7.28)から，補題2・5と同様にして，

$$\lambda(-\tilde{g};x,y)\geqq m\ ,\quad {}^{\forall}x,y\in\mathbb{R}^s,\ x\neq y \tag{7.29}$$

および

$$\lambda(\tilde{g};x,y)\leqq -m\ ,\quad {}^{\forall}x,y\in\mathbb{R}^s,\ x\neq y \tag{7.30}$$

を得る。（7.29）と定理3・2から，$\tilde{g}(\xi^*)=\theta$ なる$\xi^*\in\mathbb{R}^s$が唯一存在する。又，（7.30）と定理4・7から，系：$\dot{\xi}=g(\xi)$，$\xi(0)=\xi^0$ の一意解が区間［0.∞）で存在することがわかる。さらに，（7.30）と定理4・4から，（7.23）が成り立つことがわかる。従って，補助定理7・1から結論を得る。　　　　(証明終)

7・5　応用例

ここでは，上で得られた結果に対する2つの応用例を示す。

［例1］　化学プロセスにおける応用例

図7－1に示す凝縮器，蒸気空間（塔），およびリボイラーからなる棚

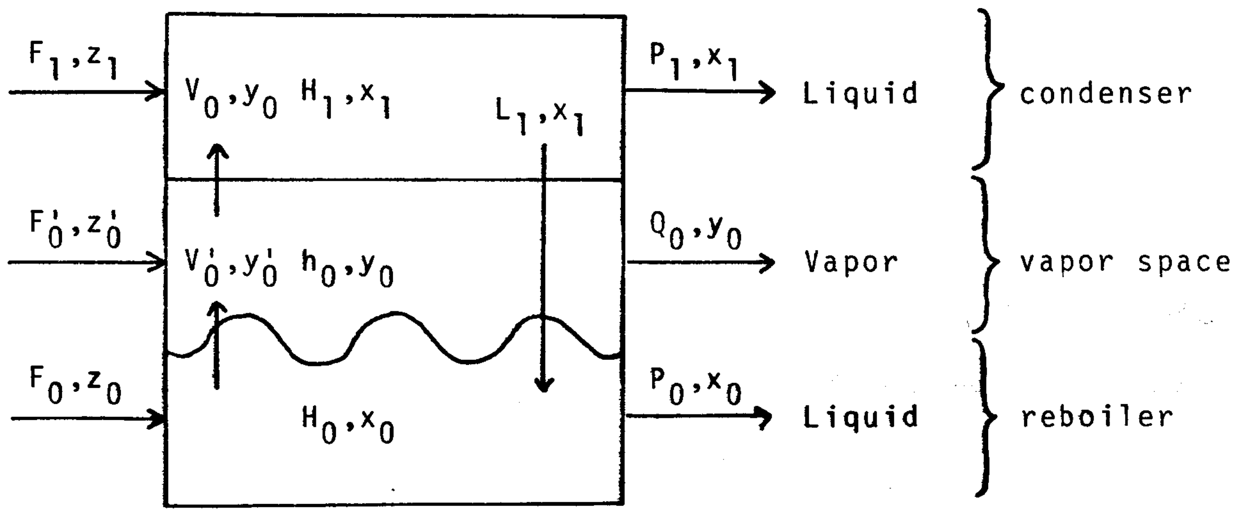


図7－1　　棚段式蒸留塔のモデル

段式蒸留塔を考える。図中，$F_i\,(F_i')$，$i=0,1$は成分$z_i\,(z_i')$の液体（気体）供給率を，$V_0\,(V_0')$は，成分$y_0\,(y_0')$の蒸気流量率を，$H_i\,(h_i)$ $i=0,1$は，i段における液体（気体）のホールドアップ割合を，P_i，$i=0,1$は，i段における成分x_iの回収率を，Q_0は，成分y_0の蒸気回収率を，L_1は，成分x_1の1段目からの液体流量率を示している。

このとき，各段における質量の平衡から，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(H_0x_0) &= -V_0'y_0' - P_0x_0 + L_1x_1 + F_0z_0 \\
\frac{d}{dt}(h_0y_0) &= V_0'y_0' - (V_0+Q_0)y_0 + F_0'z_0' \qquad (7.31)\\
\frac{d}{dt}(H_1x_1) &= V_0y_0 - (L_1+P_1)x_1 + F_1z_1
\end{aligned}
$$

が成り立つ[2][3]。

一方，気相−液相平衡特性を$y_0'=f_0(y_0, p_0)$で与える。但し，p_0は0段上の圧力を示している。今

$$[\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3]^{tr} \triangleq [H_0x_0,\ h_0y_0,\ H_1x_1]^{tr}$$

とすると，(7.31)から，

$$
\begin{aligned}
\dot\xi_1 &= -V_0'f_0(H_0^{-1}\xi_1, p_0) - P_0H_0^{-1}\xi_1 + L_1H_1^{-1}\xi_3 + F_0z_0 \\
\dot\xi_2 &= V_0'f_0(H_0^{-1}\xi_1, p_0) - (V_0+Q_0)h_0^{-1}\xi_2 + F_0'z_0' \qquad (7.32)\\
\dot\xi_3 &= V_0h_0^{-1}\xi_2 - (L_1+P_1)H_1^{-1}\xi_3 + F_1z_1
\end{aligned}
$$

を得る。従って，p_0を固定して，

$$a_{21}(\xi_1) \triangleq V_0'f_0(H_0^{-1}\xi_1, p_0) - V_0'f_0(0, p_0),\ a_{31}(\xi_1)\equiv 0,\ a_{01}(\xi_1)\triangleq P_0H_1^{-1}\xi_1$$

$$a_{12}(\xi_2)\equiv 0,\ a_{32}(\xi_2)\triangleq V_0h_0^{-1}\xi_2,\ a_{02}(\xi_2)\triangleq Q_0h_0^{-1}\xi_2$$

$$a_{13}(\xi_3)\triangleq L_1H_1^{-1}\xi_3,\ a_{23}(\xi_3)\equiv 0,\ a_{03}(\xi_3)\triangleq P_1H_1^{-1}\xi_3$$

$$-a_{ii}(\xi_i)\triangleq \textstyle\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3} a_{ji}(\xi_i) + a_{0i}(\xi_i),\ i\in\Xi$$

$$f_i(\xi)\triangleq \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij}(\xi_j),\ i\in\Xi$$

$$u\triangleq[F_0z_0,\ F_0'z_0',\ F_1z_1]^{tr} + [-V_0'f_0(0,p_0),\ V_0'f_0(0,p_0),\ 0]^{tr}$$

とすると，(7.32)は，

$$\dot\xi_i = f_i(\xi) + u,\quad \xi_i(0)=\xi_i^0 \geq 0 \qquad (7.33)$$

とかける。このとき，次の結果が成り立つ。

［系7.2］ 系(7.33)において次の3条件が成り立つとする。

i) $V_0, V_0', L_1, h_0, H_0, H_1 > 0$;

ii) $P_0, Q_0, P_1 > 0$;

iii) $\forall p_0 \geqq 0$, $\lambda(f_0(\cdot, p_0); \alpha, 0) \geqq 0$, $\forall \alpha > 0$.

このとき，次のことが成り立つ。

1) $u = \theta$ ならば，系（7.33）は大域指数安定である；

2) $u \geqq \theta$ ならば，系（7.33）は有界入力有界状態安定である。

（証明） 定理7・3，7・4から明らか．（証明終）

［例2］ ある種のRC回路網．

図7－2に示すRC回路網を考える。図から，

$$I = [I_1, \cdots, I_d]^{tr} \in \mathbb{R}^d$$

$$V = [V_1, \cdots, V_d]^{tr} \in \mathbb{R}^d$$

とすると，

$$I = GV \tag{7.34}$$

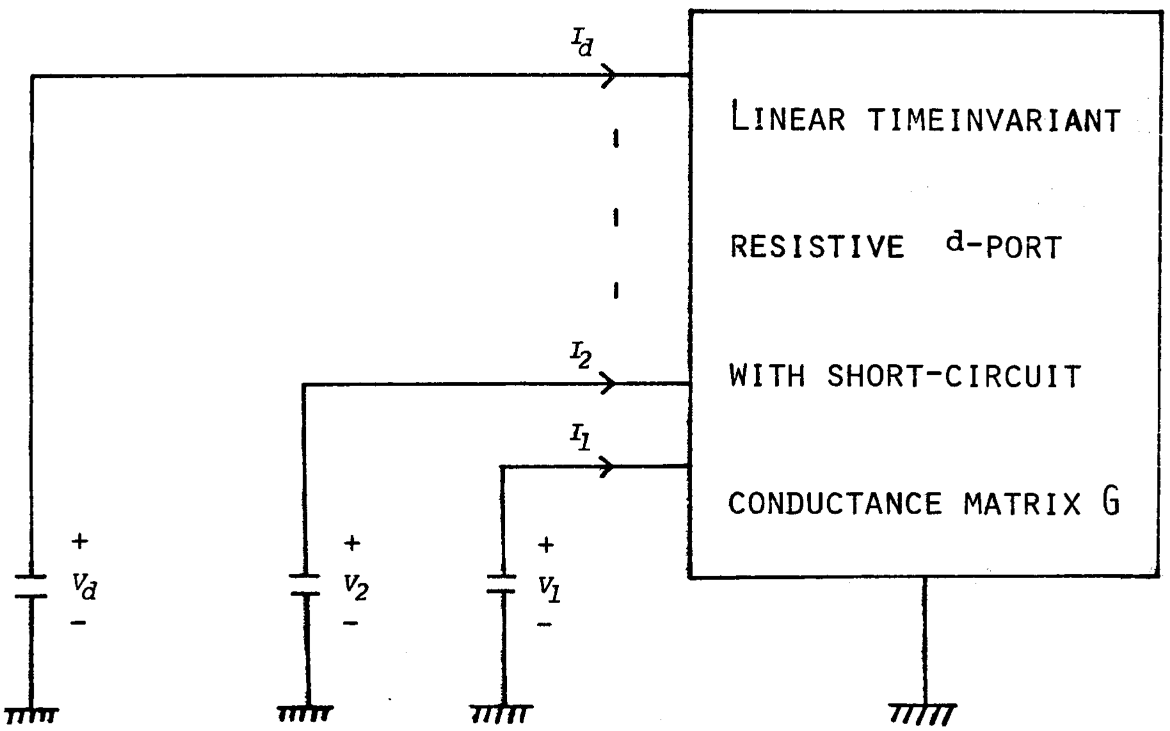


図7－2． d＋1端子を有するRC回路網

が成り立つ。ここで，$G=(g_{ij})\in\mathbb{R}^{d\times d}$ は，

i) $g_{ij}\leqq 0$，$^{\forall}i,j\in\overline{d}$，$i\neq j$；

ii) $g_{jj}+\sum_{i\neq j}g_{ij}\geqq 0$，$^{\forall}j\in\overline{d}$

なる条件を満足することが知られている(97)．

今，各コンデンサの特性を

$$V_j=C_j(q_j)\quad,\ j\in\overline{d} \tag{7.35}$$

で与える。このとき，図7－2から

$$\dot{q}_i=-I_i\ ,\quad i\in\overline{d} \tag{7.36}$$

が成立するから，(7.34)～(7.36)から，

$$\dot{q}_i=-[\textstyle\sum_{j=1}^{d}g_{ij}C_j(q_j)]\ ,\ i\in\overline{d}$$

が成り立つ。従って，$a_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$i,j\in\overline{d}$ および $f_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$，$i\in\overline{d}$ を

$$a_{ij}(\alpha)\triangleq -g_{ij}C_j(\alpha)\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$f_i(q)\triangleq\textstyle\sum_{j=1}^{d}a_{ij}(q_j)\ ,\ q\in\mathbb{R}^d$$

とすると，

$$\dot{q}_i=f_i(q)\ ,\ i\in\overline{d} \tag{7.37}$$

を得る。

［系7・3］ 系(7.37)において，次の条件：

$$^{\exists}j_1\in\overline{d}\ ,\ g_{j_1j_1}+\textstyle\sum_{i\neq j_1}g_{ij_1}>0$$

が成り立つとする。そして，$G=(g_{ij})$は分解不能とする。

1) $C_j\in CP$，$^{\forall}j\in\overline{d}$

ならば，系(7.37)の零解は大域漸近安定である；

2) $^{\exists}\varepsilon>0$，$^{\forall}j\in\overline{d}$，$\lambda(C_j;\alpha,0)\geqq\varepsilon>0$，$^{\forall}\alpha>0$

ならば，系(7.37)の零解は大域指数安定である。

（証明） 定理7・2・7・3から明らか。（証明終）

（注7・5） この場合，初期状態は，$q^{\circ}\geqq\theta$に限る。又，2)については，上に示した条件のかわりに，

$$^{\exists}\varepsilon>0\ ,\ ^{\forall}j\in\overline{d}\ ,\ \lambda(C_j;\alpha,\beta)\geqq\varepsilon\ ,\ ^{\forall}\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha\neq\beta$$

が成り立つとすると，初期状態は任意にとってよい（注7・4参照）．

[系7・4]　系(7.37)において，次の2条件が満足されるとする。

i)　$^{\exists}k \in \mathcal{J}$，$q_{kj} > 0$，$^{\forall}j \in \mathcal{J}$，$j \neq k$；

ii)　$^{\exists}\varepsilon > 0$，$^{\forall}j \in \mathcal{J}$，$\lambda(C_j; \alpha, \beta) \geqq \varepsilon$，$^{\forall}\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\alpha \neq \beta$

このとき，任意の $q^0 \geqq \theta$ に対し，系(7.37)は唯一の定常解 $q^\infty(q^0) \geqq \theta$ を有し，解 $q(\cdot; q^0)$ は q^∞ へ指数的に漸近する。

(証明)　定理7・5から明らか　　(証明終)

7・6 結　言

この章では，ある種の物理的制約条件を有する特殊な非線形システムについて，解の非負性，安定性，および定常解の存在とその安定性について考察した。まず，解の非負性については，その必要十分条件を示すことができた。さらに安定性については，システムの構造，特性の特殊性を利用することによって，非常にシャープな結果を得ることができた。又，定常解の存在とその安定性についても，ここで取り扱ったような特殊なシステムにおいては，ある程度一般的な結果を示すことができた。なお，この定常解の解析については，よりシャープな結果が得られると思われる。

第8章 結　論

本研究では，連続な特性を有する連続時間，離散時間非線形ダイナミカルシステムの安定性および可解性の問題について考えた。

まず第3章では，平衡点方程式および非線形関数方程式の可解性について考察し，従来Palaisの定理や大域逆関数定理を用いて得られている結果を，Hadamardタイプの結果を除いて全て含む実用的な結果を得ることができた。これらの結果は，対象とする方程式が必ずしも連続微分可能な特性や区分的線形特性でなくともよく，単に連続，ないし，局所的にリプシッツ連続であればよいという点と，単調性に関して比較的緩い条件を仮定すればよいという点において従来の結果を改良したものである。又ここでは，唯一解が存在するための条件についてのみ考察したが，今後の問題としては，多価解の存在に関する問題が残されている。

次に第4章では，常微分方程式の可解性と安定性，そしてそれらの応用として周期系における周期解の存在とその安定性について考察した。まず可解性については，2つのタイプの結果を示した。1つは，岡村の結果に沿って得られるもので，その実用的な十分条件となっている。そしてもう1つの結果は，安定性をも考慮するために前者のように大域的な条件を必要としないものである。又，安定性については，指数安定性および有界入力有界状態安定について若干の結果が得られた。さらに，周期系における周期解の存在とその安定性については，その存在と指数安定性を保証する実用的な条件を明らかにした。

そして次に第5章では，平衡点や周期系における周期解を求める問題に関連して，平衡点方程式に対する反復法の適用とその収束性について考察した。ここではまず非線形ヤコビ法および非線形ＳＯＲ法についてその大域収束のための実用的な条件を明らかにした。又，線形方程式に対するＳＯＲ法に関してよく知られているオストロフスキー・ライクの定理が非線形ＳＯＲ法についてもある程度拡張できることを示した。次に，Sandberg

の反復法をもう少し使い易い形に変形した反復法を提案し，それが非常に緩い条件の下に大域収束性を有することを明らかにした。これらの反復法はいずれも緩い条件の下に大域収束性を有しているから，ニュートン法のように真の解の近傍では非常に速い収束性を示す反復法の初期近似値を与えるのに用いれば，非常に有効である。

又，第6章では，関数解析的アプローチによって非線形フィードバック系の入出力安定性（有界性，連続性）について考察した。まず有界性については，λ関数を用いた2つの安定定理を得た。これらの結果は，スモールゲイン定理よりもシャープな結果となっている。そして連続性についても，λ関数を用いた結果を得た。この結果は，スモールゲイン定理よりもシャープな結果となっているとともに，ヒルベルト空間においては，従来知られている受動定理と一致している。従って，この意味において，受動定理を一般のバナッハ空間へ拡張することができた。

最後に第7章では，ある種の物理的制約条件を有する非線形ダイナミカルシステムについて考察した。ここではまず最初に解の非負性について考え，その必要十分条件を得た。さらに，安定性については，システムの構造，特殊性を利用することによって，一般の非線形システムの安定解析に比して，シャープな結果を得た。又，非線形ダイナミカルシステムにおける定常解の存在とその安定性についても，第7章で対象とした特殊なシステムにおいては，ある程度一般的な結果が得られることを示した。なお，この定常解の解析については，よりシャープな結果を得ることが，今後に残された問題である。

謝　辞

本研究の全過程を通じて，直接理解ある御指導を賜わり，つねに励まされ御助言いただいた児玉慎三教授，前田肇講師に心から感謝の意を表する。

日頃御指導，御助言いただいている神戸大学工学部九橋徹教授，羽根田博正助教授に深く感謝する。

大学院博士課程において，御指導，御教授を賜わった電子工学教室尾崎弘教授，寺田浩詔教授，産業科学研究所角所収教授，電気工学教室藤井克彦教授，ならびに通信工学教室中西義郎教授に対し厚く御礼申し上げる。

本研究をまとめるにあたって有益な御助言を頂いた電気工学教室森田龍彌助教授，黒田英三講師，近畿大学長田郎教授，馬場鎮一助教授，神戸大学工学部池田雅夫助教授に心から感謝する。

筆者の所属している研究室の梶谷文彦助手，熊谷貞俊助手には種々の面で御協力をいただいた。また日本電信電話公社鐘ヶ江真一氏には第6章に関して有益な御助言をいただいた。ここに記して心から感謝する。

最後に，親切な御援助をいただいた電子工学教室の諸氏に御礼申し上げる。

文　　献

(1) 小池，福島：自動制御理論，近代科学社(昭43).

(2) L.A.Gould:Chemical process control:theory and applications, Reading,Mass.:Addison-Wesley(1969).

(3) H.H.Rosenbrock:A Lyapunov function with applications to some nonlinear physical systems,Automatica,1,2-3,pp.31-53(1963).

(4) 伊沢：自動制御入門 オーム社(昭29).

(5) 高橋：システムと制御，岩波書店(昭43).

(6) G.Dahlquist:Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations,Trans. of the Royal Inst. of Tech.,Stockholm,Sweden,130(1959).

(7) S.M.Lozinskij:Error estimate for numerical integration of ordinary differential equations,Pt.I,Ivz. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika,6,pp.52-90(1958).

(8) W.A.Coppel : Stability and asymptotic behavior of differential equations,D. C. Heath,Boston(1965).

(9) C.A.Desoer and H.Haneda:The measure of a matrix as a tool to analyze computer algorithm for circuit analysis,IEEE Trans., CT-19,5,pp.480-486(Sept. 1972).

(10) H.Haneda:μ-functional on bounded linear operators,Memoir Faculty of Engineering of Kobe Univ.,19,pp.15-25(1973).

(11) T.Kato:Nonlinear semigroup and evolution equations,J. Math. Soc. of Japan,19,pp.508-520(1967).

(12) J.M.Ortega and W.C.Reinboldt:Iterative solution of nonlinear equations in several variables,N. Y.:Academic Press(1970).

(13) W.C.Reinboldt:Local mapping relation and global implicit function theorem,Trans. Amer. Math. Soc.,138,pp.183-198(1969).

(14) J.Hadamard:Sur les transformation ponctuelles,Bull. Soc. Math. France,34,pp.71-84(1906).

(15) G.Mayer:On solving nonlinear equations with one-parameter operator imbedding,SIAM J. Numer. Anal.,5,pp.739-752(1968).

(16) M.Vehovec:Simple criterion for the global regularity of vector-valued functions,Elec. Letters,5,26,pp.680-681(Dec. 1969).

(17) I.W.Sandberg:Theorems on computation of the transient responce on nonlinear networks containing transistor and diodes,Bell Stst. Tech. J.,49,8,pp.1739-1776(Oct. 1970).

(18) 羽根田 :C^k級 ($1\leqq k\leqq\infty$)微分可能な特性をもつ直流方程式の解析,信学会,回路とシステム理論研資,CT72-39 (昭47-10).

(19) G.J.Minty:Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. J.,29,pp.341-346(1962).

(20) F.E.Browder:The solvability of non-linear functional equations,Duke Math. J.,30,pp.557-566(1963).

(21) R.S.Palais:Natural operation on differential forms,Trans. Amer. Math. Soc.,92,1,pp.125-141(1959).

(22) T.E.Stern:Theory of nonlinear networks and systems,Reading, Mass.:Addison-Wesley(1965).

(23) T.Ohtsuki and H.Watanabe:State-variable analysis of RLC networks containing nonlinear coupling elements,IEEE Trans. CT-18,pp.146-152(Jan. 1971).

(24) F.F.Wu and C.A.Desoer:Global inverse function theorem,IEEE Trans.,CT-19,2,pp.199-201(Mar. 1972).

(25) E.S.Kuh and I.N.Hajj:Nonlinear circuit theory:resistive networks,Proc. IEEE 59,pp.340-355(Mar. 1971).

(26) T.Ohtsuki and N.Yoshida:Dc analysis of nonlinear networks

based on generalized piecewise-linear characerization,IEEE Trans.,CT-18,1,pp.146-152(Jan. 1971).

(27) 羽根田，石井，丸橋：区分的線形な特性をもつ直流方程式の解析．信学論(A),58-A,2,pp.105-112(昭50-02).

(28) H.Haneda:A generalization of monotonicity applied to the dc analysis of non-differentiable resistive networks,IEEE Trans.,CAS-21,3,pp.406-412(May 1974).

(29) F.F.Wu:Existence of an operating point for a nonlinear circuit using the degree of mapping,IEEE Trans.,Cas-21,5, pp.671-677(Sept. 1974).

(30) A.N.Willson,Jr.:On the solutions of equations for nonlinear resistive networks,Bell Syst. Tech. J.,47,pp.1755-1773(Oct. 1968).

(31) I.W.Sandberg and A.N.Willson,Jr.:Some theorems on properties of dc equation of nonlinear networks,Bell Syst. Tech. J.,48, pp.1-34(Jan. 1969).

(32) T.Fujisawa and E.S.Kuh:Some results on existence and uniqueness of solutions of nonlinear networks,IEEE Trans.,CT-18,5, pp.501-506(Sept. 1971).

(33) T.Fujisawa and E.S.Kuh:Piecewise-linear theory of nonlinear networks,SIAM J. Appl.Math.,22,pp.307-328(Mar.1972).

(34) L.Bers:Introduction to topology,New York Univ. (1945-1955).

(35) 大槻：位相幾何，至文堂 (昭36).

(36) L.Cesari:The implicit function theorem in functional analysis,Duke Math. J.,30,pp.417-440(1966).

(37) 岡村：微分方程式序説，森北出版 (昭44).

(38) T.Yoshizawa:Stability theory by Liapunov's second method, Math. Soc. of Japan(1966).

(39) C.A.Desoer:Notes for a second course on linear systems,N. Y. :Van Nostrand Reinhold(1970).

(40) R.G.Bartle:The element of real analysis,N. Y.:John-Wiley (1964).

(41) A.G.Filippov:Differential equations with discontinuous right-hand side,Math. Sb.,51,93,1,pp.99-128(1960),and Eng. Transl. AMS Trans. Ser. 2,42,pp.199-231(1964).

(42) E.Winston:The existence of periodic solutions of perturbed periodic systems,SIAM J. Appl. Math.,21,1,pp.95-103(July 1971).

(43) I.W.Sandberg:On the properties of some systems that distort signals,Pt.I,Bell Syst. Tech. J.,42,pp.2033-2047(Sept. 1964).

(44) R.E.Kalman and J.E.Bertram:Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov',Pt.I and II,ASME Basic Engineering,Ser. D,82,pp.371-393,and 394-400(June 1960).

(45) W.Hahn:Theory and applications of Liapunov's direct method, Englewood Cliff,N. J.:Prentice-Hall(1963).

(46) A.Halanay:Differential equations:stability,oscilation,time lags,N. Y.:Academic Press(1966).

(47) J.P.Lasalle and S.Lefschetz:Stability by Liapunov's direct method,N. Y.:Academic Press(1966).

(48) S.Lefschetz:Stability of nonlinear control systems,Academic Press(1965).

(49) M.A.Aizerman and F.R.Gantmacher:Absolute stability of regulator systems,Holden-Day(1964)

(50) G.Zames:On the input-output stability of time-varing nonlinear feedback systems,Pt.I and II,IEEE Trans.,AC-11,2,pp.228-238(Apr. 1966),and 3,pp.465-477(July 1966).

(51) I.W.Sandberg:On the L_2 boundness of solutions of nonlinear functional equations,Bell Syst. Tech. J.,43,pp.1581-1599 (July 1964).

(52) I.W.Sandberg:Conditions for the causality of nonlinear operators defined on a functional space,Quart. Appl. Math., 12,pp.87-91(Apr. 1965).

(53) J.C.Willems:Stability,instability,invertibility,and causality,SIAM J. Contr.,7,4,pp.645-671(Nov. 1969).

(54) C.A.Desoer and M.Y.Wu:Input-output properties of multiple -input,multiple output discrete systems,Pt.I and II,J. Franklin Inst.,290,1,pp.11-24(July 1970),and 2,pp,85-101 (Aug. 1970).

(55) C.A.Desoer and M.Vidyasager:Feedback systems:input-output properties,N. Y.:Academic Press(1975).

(56) V.M.Popov:Absolute stability of nonlinear systems of automatic control,Automation and Remote control,22,8,pp.857-875 (aug. 1961).

(57) C.A.Desoer:A generalization of the Popov criterion,IEEE Trans.,AC-10,pp.182-184(Sept. 1964).

(58) R.Bellman:Vector Liapunov functions,SIAM J. Contr.,3,pp.443 -462(1966).

(59) M.Fieder and V.Ptak:On matrices with nonpositive off-diagonal elements and positive principal minors,Czech. Math. J.,12, 3,pp.382-400(1962).

(60) D.Mitra and H.C,So:Existence conditions for L_1 Lyapunov functions for a class fo nonautonomous systems,IEEE Trans., CT-19,6,pp.594-598(Nov. 1972).

(61) J.M.Ortega:Numerical analysis;a second cource,N. Y.:Academic

Press(1970).

(62) J.Diedonne:Foundation of modern analysis,N. Y.:Academic Press(1969).

(63) 太田，羽根田，丸橋：非線形周期系における周期解の存在と安定性について，信学論(A),58-A,2,pp.105-112 (昭50-02).

(64) 太田：直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について，信学論(A),59-A,6,pp.498-505 (昭51-06).

(65) 太田，児玉：非線形方程式の解の存在と唯一性について，信学会，回路とシステム理論研資，CST75-103(昭51-01).

(66) 児玉，佐藤，須田：制御工学者のためのマトリクス理論(13)，システムと制御，16,9,pp.715-717(昭47-09).

(67) T.Strom:On logarithmic norm,SIAM J. Numer. Anal.,12,5,pp.741-752(Oct. 1975).

(68) K.Yosida:Functional analysis,Springer(1964).

(69) J.M.Holtzman:Nonlinear system theory:a functional approach, Prentice-Hall(1970).

(70) Y.Ohta:Monotone nonlinear mappings in general Banach spaces :the solvability and a solution algorithm,SIAM J. Appl. Math.(投稿中).

(71) 児玉，須田：制御工学者のためのマトリクス理論(21)，システムと制御，17,5,pp.296-304(昭48-05).

(72) R.K.Brayton and J.K.Moser:A theory of nonlinear networks, Pt.I and II,Quart. Appl. Math.,22,pp.1-33,and 81-104(Apr. and July 1964).

(73) C.A.Desoer and J.Katzenelson:Nonlinear RLC networks,Bell Syst. Tech. J.,44,pp.161-198(Jan. 1965).

(74) L.O.Chua and R.A.Rohrer:On the dynamic equations of a class of nonlinear RLC networks,IEEE Trans.,CT-12,pp.475-489

(Dec. 1965).

(75) T.E.Stern:On the equations of nonlinear networks,IEEE Trans. ,CT-13,pp.74-81(Mar. 1966).

(76) P.P.Varia and R.Liu:Normal form and stability of a class of coupled nonlinear networks,IEEE Trans.,CT-13,pp.413-418 (Dec. 1966).

(77) C.A.Desoer and F.F.Wu:Nonlinear monotone networks,SIAM J. Appl. Math.,26,pp.315-333(Mar. 1974).

(78) M.Ikeda and S.Kodama:Large-scale dynamical systems:state equation,Lipschitz conditions and linearization,IEEE Trans., CT-20,3,pp.193-202(May 1973).

(79) R.M.Redheffer:Differential and integral inequalities,Proc. Amer. Math. Soc.,15,pp.715-716(1964).

(80) P.R.Bryant:The order of complexity of electrical networks, Proc. IEE,106C,pp.174-188(June 1959).

(81) E.A.Coddington and N.Levinson:Theory of ordinary differential equations,N. Y.:McGraw-Hill(1955).

(82) 太田,羽根田,丸橋:周期系における周期解の発生条件,信学会,回路とシステム理論研資,CT73-15(昭48-05).

(83) 太田,羽根田,丸橋:周期系における周期解の発生条件,第3回ダイナミカルシステムシンポジウム予稿集,pp.11-14 (昭48-07).

(84) 児玉,池田,須田:制御工学者のためのマトリクス理論(6),システムと制御,16,2,pp.51-58(昭47-02).

(85) H.K.Gummel:A charge-control transistor model for networks analysis program,Proc. IEEE,56,4,p.751(Apr. 1968).

(86) D.Kohler:The charge-control concept in the form of equivalent circuit representing a link between the classical large signal diode transistor models,Bell Syst. Tech. J.,46,p.523

(Mar. 1967).

(87) I.W.Sandberg:Some theorems on the dynamic responce of nonlinear transistor networks,Bell Syst. Tech. J.,48,1, pp.35-54(Jan. 1969).

(88) 太田：直流方程式に対する反復法の適用とその収束性について，信学会，回路とシステム理論研資，CST75-6 (昭50-05).

(89) E.Isaacson and H.Keller:Analysis of numerical method,N. Y.: John-Wiley(1966).

(90) R.S.Verga:Matrix iterative analysis,Prentice-Hall:Englewood Cliff,New Jersey(1962).

(91) J.M.Ortega:Numerical analysis:a second cource,N. Y.:Academic Press(1972).

(92) 鐘ケ江，太田：関数解析的アプローチによるフィードバック系の入出力安定：受動定理の拡張，信学会，回路とシステム理論研資，CST-75-47(昭50-07).

(93) 太田，鐘ケ江，児玉：作用素のメジャーによる非線形離散値フィードバック系の安定解析，信学論(D),59-D,8,pp.545-552 (昭51-08).

(94) B.D.O.Anderson:The small gain theorem,the passivity theorem, and their equivalence,J. Frank. Inst.,293,2,pp.105-115(1972).

(95) C.W.Gear:Numerical intitial balue problems in ordinary differential equations,Englewwod Cliff,New Jersey:Prentice-Hall(1971).

(96) 太田，前田，児玉：ある種の物理的制約条件を持つ非線形システムの解析，信学会，回路とシステム理論研資，CST76-103(昭51-11).

(97) L.Weinberg:Network analysis ans synthesis,N. Y.:McGraw-Hill (1962).